

УДК 532.5.013.4:536.46

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ФРОНТА ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ
РЕАКЦИИ В КОНДЕНСИРОВАННОЙ ФАЗЕ

БЕРМАН В. С., КҮРДЮМОВ В. Н.

В [1] рассматривалась устойчивость стационарной волны экзотермической реакции в конденсированной фазе по отношению к продольным возмущениям. Аррениусовская зависимость скорости реакции от температуры заменялась кусочно-постоянной. Показано, что стационарная волна теряет устойчивость по отношению к таким возмущениям при достаточно малой ширине зоны горения. Ниже в рамках той же модели рассматриваются пространственные возмущения стационарной волны. Показано, что при уменьшении ширины зоны реакции стационарная волна теряет устойчивость по отношению к пространственным возмущениям с некоторой критической длиной волны раньше, чем при плоских возмущениях.

Впервые потеря устойчивости плоской стационарной волны описана в [2], где она была исследована численными методами при аррениусовской зависимости скорости реакции от температуры. Существенное влияние пространственных возмущений на устойчивость плоского фронта реакции отмечалось ранее в [3, 4], где для анализа устойчивости использовалась аппроксимация температурной зависимости скорости химической реакции в виде δ -функции. Однако такая аппроксимация приводит к отсутствию непрерывного спектра при исследовании задачи устойчивости.

Пусть стационарная плоская волна распространяется вдоль оси x , тогда уравнение теплопроводности и уравнение для степени превращения в системе координат, движущейся с фронтом волны, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu(1-a)f(\theta) \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{\partial a}{\partial x} + \mu(1-a)f(\theta) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\theta = \rho C_p (T - T_0) / Q C_0$, $a = 1 - C / C_0$, $t = \tau U^2 / \chi$, $x = UX / \chi$, $\mu = K \chi / U^2$, χ — температуропроводность, ρ , C_p — плотность и теплоемкость вещества, T_0 , C_0 — температура и концентрация до начала реакции, Q , K — тепловой эффект и скорость реакции, X — координата, τ — время, U — скорость стационарного фронта в неподвижной системе координат, T и C — температура и концентрация в данной точке.

Условия на бесконечности для системы (1) зададим в виде

$$\theta = a = 0, \quad x = +\infty; \quad \theta = a = 1, \quad x = -\infty \quad (2)$$

Ниже, как и в [1], рассматривается модельная зависимость $f(\theta) = h(\theta - \theta_*)$, где h — функция Хэвисайда, $\theta_* < 1$. Стационарное решение задачи (1)–(2) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_* &= \begin{cases} \mu \exp(-x) / (1 + \mu), & x \geq 0 \\ 1 - \exp(\mu x) / (1 + \mu), & x < 0 \end{cases} \\ a_* &= \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1 - \exp(\mu x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mu = \theta_* / (1 - \theta_*)$ — параметр, характеризующий ширину фронта реакции $l \sim \mu^{-1}$.

Исследуем устойчивость стационарного решения (3) в рамках линейной теории. Возьмем возмущения в виде

$$\delta \theta = u(x) \exp(\lambda t + i k_y y + i k_z z)$$

$$\delta a = v(x) \exp(\lambda t + i k_y y + i k_z z)$$

Уравнения, условия на бесконечности и условия сшивки при $x=0$ получим аналогично [1]

$$\begin{aligned} u'' + u' - (\lambda + k^2)u - \mu h(-x)v(x) &= 0 \\ v - \lambda v - \mu h(-x)v(x) &= 0, \quad x \neq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} [u] = 0, \quad [u'] + (1 + \mu)u(0) = 0, \quad [v] + (1 + \mu)v(0) = 0 \\ u(x = \pm\infty) = v(x = \pm\infty) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$[g] = g(x+0) - g(x-0), \quad k^2 = k_y^2 + k_z^2$$

где штрих обозначает дифференцирование по x .

Найдем общее решение (4) для всех λ , кроме $\lambda = -\mu \pm \sqrt{k^2 - \mu}$. Имеем

$$u = c_1 \exp(\alpha_+ x) + c_2 \exp(\alpha_- x)$$

$$v = c_3 \exp(\lambda x), \quad x > 0$$

$$u = A c_4 \exp[(\lambda + \mu)x] + c_5 \exp(\alpha_+ x) + c_6 \exp(\alpha_- x)$$

$$v = c_4 \exp[(\lambda + \mu)x], \quad x < 0$$

$$A = \mu / [(\lambda + \mu)^2 + \mu - k^2], \quad \alpha_{\pm} = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + \lambda - k^2}$$

Точки $\lambda = -\mu \pm \sqrt{k^2 - \mu}$ должны быть рассмотрены отдельно.

Условия сшивки при $x=0$ и условия на бесконечности (5) дают систему однородных линейных уравнений относительно c_i , $i=1, \dots, 6$. Существование нетривиального решения при некотором λ этой системы говорит о принадлежности этой точки к спектру.

Особый интерес представляет зона $\text{Re } \lambda \geq 0$. В этой зоне условием на спектр будет

$$\sqrt{1 + 4(\lambda + k^2)} (\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2/2 + \mu/2 - k^2) = (1 + \mu) (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu/2 - k^2) \quad (6)$$

При $k^2=0$ это уравнение совпадает с уравнением, полученным в [1]. Возводя (6) в квадрат и приводя подобные члены, получим уравнение пятого порядка относительно λ . Ввиду его громоздкости оно не приводится. Заметим, что корнями этого уравнения и уравнения (6) будут $\lambda = -\mu \pm \sqrt{k^2 - \mu}$, которые требуют, как уже говорилось, особого рассмотрения. Разделив полученный полином пятого порядка на полином $(\lambda + \mu)^2 + \mu - k^2$, получим уравнение

$$\begin{aligned} 4\lambda^3 + [1 + 4k^2 + 8\mu - (1 + \mu)^2]\lambda^2 + \\ + [2\mu(1 + 4k^2) - 4k^2]\lambda + k^2[(1 + \mu)^2 - 1 - 4k^2] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

При $\mu^2 - 6\mu + k^2(12 - 16k^2)/(1 + 4k^2) = 0$, т. е. $\mu = 3 \pm \sqrt{9 - k^2(12 - 16k^2)/(1 + 4k^2)}$ уравнение (7) имеет два чисто мнимых корня.

Можно показать, что при

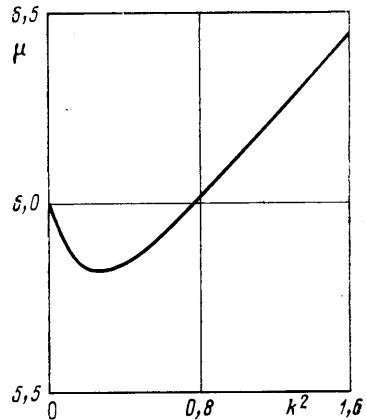
$$\mu < 3 + \sqrt{9 - k^2(12 - 16k^2)/(1 + 4k^2)} = M(k^2)$$

в полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq 0$ не существует корней уравнения (6). Кривая $\mu = M(k^2)$ является переходной кривой. Ее график приведен на фигуре. Она имеет минимум при $k^2 = 1/4$, равный $3 + 2\sqrt{2}$. При $k^2 = 0$ получаем $\mu = 6$.

Точка $\lambda = -\mu + \sqrt{k^2 - \mu}$ при $k^2 > \mu^2 + \mu$ попадает в правую полуплоскость, но можно показать, что она не является точкой спектра.

Опишем кратко структуру спектра в левой полуплоскости. При $k^2 \neq 0$ точка $\lambda = 0$ перестает быть точкой спектра. Непрерывный спектр состоит из полосы $-\mu < \text{Re } \lambda < 0$, за исключением кривой $(\text{Im } \lambda)^2 = -(\text{Re } \lambda + k^2)$. При $k^2 > (6\mu + \mu^2)/4$ на действительной оси появляется точка дискретного спектра $\lambda = (2\mu + \mu^2)/4 - k^2$.

Итак, найдено, что возмущения с $k^2 = 1/4$ становятся неустойчивыми при $\mu > 3 + 2\sqrt{2}$, тогда как возмущения с $k^2 = 0$ — при $\mu > 6$.



Из приведенного анализа следует, что неустойчивость фронта горения по отношению к пространственным возмущениям наступает при более широких зонах химической реакции ($\mu=5,283$), чем в случае продольных возмущений. Фронт горения наиболее чувствителен к возмущениям, волновые векторы которых лежат в пределах $0 < k^2 < 3/4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдеев П. А.* Исследование устойчивости стационарного фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 1, с. 115–118.
2. *Шкадинский К. Г., Хайкин Б. И., Мержанов А. Г.* Распространение пульсирующего фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе.— Физика горения и взрыва, 1971, т. 7, № 1, с. 19–28.
3. *Новожилов Б. В.* Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973. 176 с.
4. *Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I.* Propagation of a pulsating reaction front in solid fuel combustion.— SIAM J. Appl. Math., 1978, v. 35, p. 465–478.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1985

УДК 532.517.3

ВЛИЯНИЕ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ НА ВХОДЕ В КРУГЛУЮ ТРУБУ НА ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОСТИ

КОЛЯДА В. В., ПАВЕЛЬЕВ А. А.

Переход к турбулентности в круглой трубе обычно связывают с гидродинамической неустойчивостью течения на ее начальном участке. Течение в круглой трубе с параболическим профилем скорости (профилем Пуазейля), согласно большинству авторов, в линейном приближении устойчиво [1]. В настоящее время в литературе отсутствуют данные о переходе к турбулентности в трубе, когда профиль скорости в ней определяется не развитием пограничного слоя на ее стенке, а формируется входными устройствами. Проведение подобных экспериментов позволило бы получить данные о механизме перехода к турбулентности в трубе. Особый интерес представляет случай, когда на входе в трубу с помощью входных устройств формируется профиль скорости, близкий к профилю Пуазейля. Если при этом уровень возмущений таков, что интенсивность процессов переноса в потоке близка к молекулярному уровню, то развитие возмущений в таком потоке будет означать или несправедливость представлений о линейной устойчивости такого течения, или существование других механизмов перехода к турбулентности. В качестве такого механизма может рассматриваться развитие в потоке с градиентом скорости возмущений, возникающих за входными устройствами, причем масштаб этих возмущений может быть значительно меньше поперечных размеров потока [2, 3].

Условно этот механизм далее будем называть мелкомасштабным, а механизм перехода к турбулентности, связанный с развитием в потоке вследствие гидродинамической неустойчивости волновых колебаний (волн Толлмина — Шлихтинга), — длинноволновым механизмом.

1. Эксперименты проводились на аэродинамической трубе, которая ранее использовалась авторами для исследования перехода к турбулентности в потоке с профилем скорости, формирующимся естественным образом [4]. В настоящей работе для формирования профилей скорости в круглой трубе диаметром $D=49$ мм между ней и конфузором аэродинамической трубы помещалось устройство, состоящее из вставки и пакета гидравлических сопротивлений. Входной участок вставки был спрофилирован по методу Витопинского и обеспечивал поджатие потока до диаметра, составляющего $0,6D$ (вставка 1) и $0,33D$ (вставка 2). Выходной