МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1986

УДК 533.95

О НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЖИМАХ ПРОТЕКАНИЯ ТОКА ЧЕРЕЗ СЛАБОИОНИЗОВАННЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ И ОБ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

БЕНИЛОВ М. С.

Задача о стационарных режимах и устойчивости протекания тока в низкотемпературной плазме с учетом джоулева тепловыделения неоднократно рассматривалась для случая ограниченной покоящейся плазмы (см., например, [1]). Данная работа посвящена асимптотическому решению этой задачи для случая ламинарного пограничного слоя слабоионизованной плазмы. Ранее аналогичная задача в нуль-мерном приближении рассматривалась в [2].

1. Рассмотрим стационарный газодинамический ламинарный пограничный слой слабоионизованной плазмы на проводящей поверхности (электроде). Поперек пограничного слоя к электроду течет ток плотностью j. Магнитное поле отсутствует, проводимость плазмы σ предполагается известной функцией температуры T. Влиянием протекания тока на распределение среднемассовой скорости плазмы пренебрегается (справедливость такого пренебрежения в рамках рассматриваемой модели обосновывается ниже) и компоненты среднемассовой скорости v_x, v_y считаются заданными функциями координат. Распределение температуры плазмы описывается задачей

$$\rho c_p\left(v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)=v_x\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{j^2}{\sigma}\tag{1.1}$$

$$y=0,\quad T=T_w;\quad y/\delta\to\infty,\quad T\to T_\infty\tag{1.2}$$

Здесь δ — масштаб толщины пограничного слоя, T_∞ — температура на внешней границе пограничного слоя, индекс w здесь и ниже приписан значениям соответствующих функций на поверхности электрода, остальные обозначения общепринятые. Будем сначала пренебрегать термическим сопротивлением электрода, т. е. положим температуру поверхности T_w заданной и не зависящей от плотности тока.

Предположим, что степень ионизации плазмы достаточно мала и проводимость определяется столкновениями электронов с нейтралами. Тогда проводимость пропорциональна концентрации электронов и, следовательно, является весьма сильной функцией температуры (функция $\sigma(T)$ содержит экспоненту с большим параметром в показателе). Естественно по аналогии с [3] ожидать, что асимптотическая структура решения будет следующей: последний член уравнения (1.1) существен лишь в асимптотически тонкой пристеночной области, в которой $\sigma=O(\sigma_w)$; вне этой внутренней области указанный член экспоненциально мал. В этой пристеночной области изменение температуры плазмы является асимптотически малым и, следовательно, показатель экспоненты в зависимости $\sigma(T)$ можно в первом приближении линеаризовать

$$\sigma=\sigma_w\exp\left[\left(\frac{d\ln\sigma}{dT}\right)_w(T-T_w)\right]\tag{1.3}$$

Полагая градиент температуры в указанной области порядка T/δ, находим, что масштаб толщины этой области равен δ/m, где параметр $m=(d\ln\sigma/d\ln T)_w$ по порядку величины равен отношению энергии ионизации нейтральных частиц к тепловой энергии и рассматривается в качестве большого параметра. Определим порядок величины плотности тока j из условия, что джоулево тепловыделение сравнимо с плотностью конвективного теплового потока: $j^2=O(\varkappa T\sigma_w m\delta^{-2})$.

Из сделанных выше асимптотических оценок следует, что для описания распределения температуры в пределе $m\to\infty$ необходимо рассмотреть внешнее асимптотическое разложение, справедливое при $y=O(\delta)$, и внутреннее, справедливое при $y=O(\delta/m)$. Первый член внешнего разложения удовлетворяет уравнению (1.1) без последнего члена и граничным условиям (1.2). Внутреннее разложение и уравнение, описывающее второй член этого разложения, имеют вид

$$T=T_w[1+(1/m)\theta+\ldots],\quad \theta''=-{}^1/_2\nu^2e^{-\theta}$$

$$\eta=\frac{mq_*y}{\varkappa_wT_w},\qquad \nu=\left(\frac{2\varkappa_wT_wj^2}{m\sigma_wq_*^2}\right)^{1/2}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по η, q_* — значение при $y=0$ плотности теплового потока q, рассчитанное по первому члену внешнего разложения (или, что то же самое, значение плотности теплового потока на поверхность электрода при $j=0$). Очевидно, $q_*=O(\varkappa T/\delta)$, $\nu=O(1)$ в соответствии с выбранным выше порядком величины j.

Граничное условие для функции θ при $\eta=0$ вытекает из первого условия (1.2), граничное условие при $\eta\to\infty$ получаем, сращивая двучленное внутреннее разложение с одночленным внешним

$$\eta=0,\quad \theta=0;\quad \eta\to\infty,\quad \theta'\to1 \tag{1.4}$$

Последнее граничное условие означает, что тепловой поток из внешней области во внутреннюю не зависит от тока на электрод. Все джоулево тепло, выделяющееся во внутренней области, уходит в электрод. Этот вывод согласуется с соответствующими предположениями моделей работ [2, 4].

Решение сформулированной задачи и плотность теплового потока на поверхность электрода таковы:

$$\theta=2\ln\left[\nu\,\mathrm{sh}\left(\frac{\eta}{2}+\mathrm{arsh}\frac{1}{\nu}\right)\right],\qquad q_w=q_*\sqrt{1+\nu^2}$$

Очевидно, падение напряжения в пограничном слое ΔU с точностью до экспоненциально малых членов совпадает с падением напряжения во внутренней области. В первом приближении находим

$$\Delta U=\left(\frac{\varkappa_wT_w}{2m\sigma_w}\right)^{1/2}u,\qquad u=\nu\int_0^\infty e^{-\theta}\,d\eta=\frac{2\nu}{\sqrt{1+\nu^2}+1}$$

Введенный здесь параметр u имеет смысл безразмерного падения напряжения. Очевидно, найденная вольт-амперная характеристика является монотонно возрастающей и ограниченной.

Из полученного выше решения следует, в частности, что влияние протекания тока на распределение температуры во всем пограничном слое мало (порядка $1/m$). Поскольку влияние протекания тока на распределение среднемассовой скорости осуществляется только через распределение температуры, то это влияние также мало.

Перейдем к анализу устойчивости рассчитанного выше стационарного режима. Представим возмущения температуры и потенциала в виде

$$(\delta T,\ \delta\varphi)=(T^\circ(y),\ \varphi^\circ(y))\exp(-\lambda t+ik_xx+ik_zz)$$

Рассмотрим первые члены $\psi(\eta)$, $\omega(\eta)$ внутренних асимптотических разложений амплитуд $T^\circ(y)$, $\varphi^\circ(y)$. Для их определения имеем уравнения

$$\psi''+(\alpha-r+\nu^2e^{-\theta}/2)\psi+\nu s'=0 \tag{1.5}$$

$$(e^\theta s'+\nu\psi)'-e^\theta rs=0 \tag{1.6}$$

$$s(\eta)=\left(\frac{2\sigma_wT_w}{m\varkappa_w}\right)^{1/2}\omega(\eta),\qquad \alpha=\frac{\rho_wc_{pw}\varkappa_wT_w{}^2\lambda}{m^2q_*{}^2}$$

$$r=r_x{}^2+r_z{}^2,\qquad r_{x,z}=\frac{\varkappa_wT_wk_{x,z}}{mq_*}$$

При записи этих уравнений предполагалось, что $r_{x,z}=O(1)$, $\alpha=O(1)$, т. е. рассматриваются возмущения с длиной волны порядка толщины внутренней области и частотой порядка обратного времени прогрева этой области. Считалось, что число Рейнольдса невязкого течения R существенно меньше m^4, так как в противном случае в (1.5) войдет (при $r_x\neq0$) член, учитывающий конвективный перенос возмущений температуры.

Граничные условия для функций ψ, s при $\eta=0$ будут

$$\eta=0,\quad \psi=0,\quad s=0 \tag{1.7}$$

Сформулируем граничные условия при $\eta\to\infty$. Рассмотрим сначала неодномерные возмущения.

Найдем асимптотику при $\eta\to\infty$ уравнений (1.5), (1.6). Введем новую независимую переменную $z=e^\theta s'+\nu\psi$ и преобразуем эти уравнения к одному уравнению четвертого порядка

$$z^{\mathrm{IV}}-\theta'z^{\mathrm{III}}+(\alpha-2r+{}^1/_2\nu^2e^{-\theta})z''+\theta'(r-\alpha)z'+r(r-\alpha-{}^1/_2\nu^2e^{-\theta})z=0 \tag{1.8}$$

$$s=\frac{1}{r}e^{-\theta}z',\qquad \psi=\frac{1}{\nu r}(rz+\theta'z'-z'')$$

При $\eta\to\infty$ это уравнение с точностью до экспоненциально малых членов становится уравнением с постоянными коэффициентами и общее решение его дается формулой

$$z=c_1\exp\left(\sqrt{r+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)\eta+c_2\exp\left(-\sqrt{r+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)\eta+$$

$$+c_3\exp\sqrt{r-\alpha}\,\eta+c_4\exp(-\sqrt{r-\alpha}\,\eta) \tag{1.9}$$

Здесь c_k — произвольные постоянные, $\arg\sqrt{\ }\in]-\pi/2;\ \pi/2]$. Заметим, что первые два слагаемых описывают изотермические возмущения.

Постоянные c_k должны определяться с учетом сращивания с первыми членами внешних асимптотических разложений амплитуд. Применяя процедуру двухмасштабных асимптотических разложений [5], можно показать, что первому и второму, третьему и четвертому слагаемым (1.9) соответствуют в выражении для первого члена внешнего разложения решения экспоненциальные слагаемые с показателями

$$m\int_0^p\left(\pm\sqrt{r+\frac{F_3{}^2}{4}}+\frac{F_3}{2}\right)dp,\qquad \pm m\int_0^p\sqrt{r-\alpha F_1+iF_2}\,dp$$

$$F_1(p)=\frac{\rho^bc_p{}^b\varkappa_w}{\rho_wc_{pw}\varkappa^b},\qquad F_2(p)=\frac{\varkappa_wT_w\rho^bc_p{}^bv_xr_x}{\varkappa^bmq_*}$$

$$F_3(p)=\frac{\varkappa_wT_wq^b}{\varkappa^bT^bq^*}\frac{1}{m}\frac{d\ln\sigma^b}{d\ln T^b},\qquad p=\frac{q_*y}{\varkappa_wT_w}$$

Верхний индекс b здесь и ниже приписан значениям соответствующих функций, вычисленным по первому члену внешнего разложения стационарного решения. Порядок функции F_2 равен $R^{1/2}/m$ и, следовательно, зависит от отношения между большими параметрами R и m^2; рассматривается общий случай, когда эти параметры сравнимы и $F_2=O(1)$.

Полагая, что в невязкой области возмущения затухают, исключим экспоненциально растущие при $p\to\infty$ слагаемые. Очевидно, следует положить постоянную c_1

равной нулю; при $\alpha \neq [r+iF_2(\infty)+t]/F_1(\infty)$, где t — произвольное положительное число, следует положить равной нулю также c_3 или c_4 (в зависимости от того, четное или нечетное число пересечений в плоскости w отрицательной полуоси точкой $w(p)=r-\alpha F_1(p)+iF_2(p)$ при изменении параметра p от нуля до бесконечности, причем пересечения в направлении из верхней полуплоскости в нижнюю и в обратном направлении учитываются с разными знаками). Число этих пересечений зависит от значений параметров r и α, свойств функций F_1, F_2. Ограничим далее рассмотрение практически интересным случаем, когда функция $F_1(p)$ монотонна. В этом случае для всех нарастающих ($\operatorname{Re}\alpha<0$) и нейтральных ($\operatorname{Re}\alpha=0$) возмущений таких пересечений заведомо нет.

Таким образом, для нарастающих и нейтральных возмущений $c_1=c_3=0$ и искомые граничные условия имеют вид

$$\eta\to\infty,\quad \psi\to 0,\ s\to 0 \tag{1.10}$$

С физической точки зрения это граничное условие означает, что нарастающие и нейтральные возмущения локализованы во внутренней области.

Теперь сформулируем граничные условия для одномерных возмущений. Найдем сначала граничное условие для возмущения температуры. Выразим из (1.6) функцию s и подставим это выражение в (1.5)

$$s=\int_0^\eta (s_w'-\nu\psi)e^{-\theta}\,d\eta \tag{1.11}$$

$$\psi''+(\alpha-{}^1/_2\nu^2e^{-\theta})\psi+\nu e^{-\theta}s_w'=0 \tag{1.12}$$

Асимптотика решений уравнения (1.12) при $\eta\to\infty$ в первом приближении дается при $\alpha\neq 0$ формулой (c_5, c_6 — произвольные постоянные, $\arg\sqrt{-\alpha}\in]-\pi/2;\ \pi/2]$)

$$\psi=c_5\exp\sqrt{-\alpha}\eta+c_6\exp(-\sqrt{-\alpha}\eta) \tag{1.13}$$

Находя первый член внешнего разложения амплитуды возмущения температуры, полагая, что $\alpha\neq]0;\ \infty[$, и исключая экспоненциально растущее при $p\to\infty$ слагаемое, получаем, что следует положить $c_5=0$. Таким образом, для нарастающих и нейтральных колебательных возмущений получаем граничное условие

$$\eta\to\infty,\quad \psi\to 0 \tag{1.14}$$

При $\alpha=0$ вместо экспоненциальной асимптотики (1.13) имеем линейную асимптотику. Исключая на основании аналогичного изложенному выше рассмотрения растущее слагаемое, получим

$$\eta\to\infty,\quad \psi'\to 0 \tag{1.15}$$

Заметим, что для нарастающих и нейтральных колебательных возмущений условия (1.14) и (1.15) эквивалентны. Поэтому для всех одномерных нарастающих и нейтральных возмущений можно использовать граничное условие (1.15).

Наконец, найдем граничное условие для возмущения потенциала. Будем полагать, что характерная частота рассматриваемых возмущений существенно меньше обратного времени распространения электродинамических возмущений в невязкой области на расстояние порядка продольного размера рассматриваемых возмущений. Из [6] следует, что линейный масштаб, характеризующий распределение потенциала на внешней границе пограничного слоя, равен $\delta\sigma_\infty/(m\sigma_w)$, где σ_∞ — проводимость плазмы на внешней границе пограничного слоя. Ограничим рассмотрение возмущениями, характерный продольный размер которых существенно меньше указанного масштаба (хотя и существенно больше масштаба толщины внутренней области δ/m). Можно ожидать, что такие возмущения не изменят падение напряжения в пограничном слое и граничное условие имеет вид

$$\eta\to\infty,\quad s\to 0 \tag{1.16}$$

Это условие с учетом (1.11) позволяет выразить s_w' через ψ и замкнуть тем самым задачу (1.12), (1.7), (1.15)

$$s_w'=\nu\int_0^\infty \psi e^{-\theta}\,d\eta\Big/\int_0^\infty e^{-\theta}\,d\eta \tag{1.17}$$

Рассмотрим кратко решение сформулированной задачи на собственные значения. Сначала рассмотрим неодномерные возмущения. Как и в случае ограниченной покоящейся плазмы [7], спектр данной задачи должен быть действительным. Чтобы убедиться в этом, введем в задачу

(1.5)—(1.7), (1.10) вместо зависимой переменной s переменную z

$$\psi''+(\alpha-r-\nu^2e^{-\theta}/2)\psi+\nu e^{-\theta}z=0$$

$$e^{\theta}(e^{-\theta}z')'-rz=-\nu r\psi$$

$$\eta=0,\quad \psi=0,\quad z'=0;\quad \eta\to\infty,\quad \psi\to 0,\quad z\to 0$$

Умножим первое уравнение на $\bar{\psi}$; во втором произведем комплексное сопряжение и умножим на $ze^{-\theta}$; проинтегрируем полученные соотношения от нуля до бесконечности и учтем граничные условия. Исключая из полученных соотношений интеграл от функции $e^{-\theta}z\bar{\psi}$, получаем для α выражение через интегралы от действительных функций.

Если предположить, что переход к неустойчивости происходит непрерывно, то этому переходу соответствует $\alpha=0$. Можно показать, что, как и в случае ограниченной покоящейся плазмы [8], $\alpha=0$ ни при каких ν, r не является собственным значением (заметим, что при $\alpha=0$ уравнение (1.8) заменой $z_1=e^{-\theta/2}(z''-rz)$ приводится к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами), т. е. смена устойчивости отсутствует. Нетрудно показать, что при $\nu=0$ при всех r рассматриваемая задача собственных значений не имеет, т. е. нарастающие возмущения отсутствуют. Отсюда следует вывод об устойчивости при всех значениях ν, r.

Теперь рассмотрим задачу для одномерных возмущений (1.12), (1.17), (1.7), (1.15). Как и в случае ограниченной покоящейся плазмы [9], спектр ее должен быть действительным. При $\alpha=0$ общее решение уравнения (1.12) дается формулой

$$\psi=c_7\operatorname{cth}\eta_1+c_8(\eta_1\operatorname{cth}\eta_1-1)+2\frac{s_w'}{\nu},\qquad \eta_1=\frac{\eta}{2}+\operatorname{arsh}\frac{1}{\nu}$$

где c_7, c_8 — произвольные постоянные. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, приходим к выводу об устойчивости.

Из полученных выше результатов следует, что как при расчете стационарного режима, так и при анализе его устойчивости можно ограничивать рассмотрение внутренней областью; граничными условиями на внешней границе этой области является второе условие (1.4) и условие (1.10) или (1.15)—(1.16). Можно ожидать, что применимость такого подхода не ограничена рассматривавшейся выше моделью равновесной плазмы; далее такой подход будет использован для рассмотрения более сложной модели. Возникающие в рамках такого подхода стационарная задача и задача на собственные значения близки к соответствующим задачам для ограниченной покоящейся плазмы, неоднократно рассматривавшимся в литературе, различен лишь вид граничных условий. Выше указаны аналогии с [7—9].

2. Численные расчеты протекания тока через прианодный пограничный слой плазмы молекулярных газов с учетом неравновесных эффектов [10] показывают, что по мере увеличения плотности тока на электрод и возрастания отрыва температуры электронов от температуры тяжелых частиц сопротивление пограничного слоя существенно уменьшается вследствие увеличения концентрации электронов за счет прямой ионизации тяжелых частиц электронным ударом. С целью моделирования этого эффекта в рамках рассмотренной выше постановки задачи примем, что проводимость плазмы определяется уравнением Саха с температурой электронов T_e, которая в свою очередь определяется локальным балансом энергии электронов. Учтем также, что выделяющееся в пограничном слое джоулево тепло может (при не слишком малом тепловом сопротивлении электрода) оказывать влияние на температуру поверхности электрода, которая в свою очередь существенно влияет на электрическое сопротивление пограничного слоя [2] (см. также обсуждение влияния теплового сопротивления стенок в [11]).

Обозначим через T_*, σ_* температуру поверхности электрода и соответствующее значение проводимости при $j=0$. По аналогии с (1.3) во внутренней области линеаризуем показатель экспоненты в зависимости $\sigma(T_e)$, а уравнение баланса энергии электронов запишем в виде

$$\sigma=\sigma_* \exp\left[\left(\frac{d\ln\sigma}{dT_e}\right)_{T_e=T_*}(T_e-T_*)\right]$$

$$\frac{j^2}{\sigma}=\frac{3m_e}{m_n}\Delta\frac{\sigma}{e\mu_e}\nu_{en}k(T_e-T)$$

где m_e, m_n — масса электронов и средняя масса тяжелых частиц, Δ — коэффициент неупругих потерь, μ_e, e — подвижность и заряд электронов, ν_{en} — частота столкновений электронов с тяжелыми частицами, k — постоянная Больцмана. Величины m_n, Δ, μ_e в дальнейшем предполагаются постоянными и равными своим значениям при $T=T_e=T_*$.

Асимптотическое разложение температуры плазмы во внутренней области и краевая задача, описывающая второй член этого разложения, имеют вид

$$T=T_*\left(1+\frac{1}{m}\theta+\ldots\right),\qquad m=\left(\frac{d\ln\sigma}{d\ln T_e}\right)_{T_e=T_*}$$

$$\theta''=-\frac{\nu^2}{2}\frac{1}{\Sigma},\qquad \Sigma=\exp\left(\theta+\frac{\gamma\nu^2}{\Sigma^2}\right)\tag{2.1}$$

$$\eta=0,\quad \theta=2\beta(\theta'-1);\quad \eta\to\infty,\quad \theta'\to1\tag{2.2}$$

$$\eta=\frac{mq_*y}{\varkappa_*T_*},\qquad \nu=\left(\frac{2\varkappa_*T_*j^2}{m\sigma_*q_*^2}\right)^{1/2},\qquad \Sigma=\frac{\sigma}{\sigma_*}$$

$$\gamma=\frac{m^2e\mu_em_nq_*^2}{6k\nu_{en}\Delta m_e\varkappa_*T_*^2\sigma_*},\qquad \beta=\frac{mhq_*}{2\varkappa^eT_*}$$

Здесь $\varkappa^e$, h — теплопроводность и толщина электрода, $\varkappa_*$ — значение теплопроводности плазмы при $T=T_*$. Предполагается, что температура на внешней поверхности электрода (при $y=-h$) задана и не зависит от плотности тока. Параметры γ, β характеризуют влияние на сопротивление пограничного слоя в рассматриваемом диапазоне значений плотности тока соответственно неравновесности электронной температуры и конечного теплового сопротивления электрода. Предполагается, что эти параметры сравнимы с единицей, тогда в рассматриваемом диапазоне значений плотности тока изменение температуры поверхности электрода и отрыв температуры электронов имеют порядок T/m. Заметим, что граничное условие на стенке для первого члена внешнего асимптотического разложения температуры имеет вид $T=T_*$.

Решение сформулированной задачи можно записать в параметрическом виде

$$\eta=\int\limits_{\Sigma_w}^{\Sigma}\frac{(x^2+2\gamma\nu^2)\,dx}{x(x^4+\nu^2x^3+{}^2/_3\gamma\nu^4x)^{1/2}},\qquad \theta=\ln\Sigma-\frac{\gamma\nu^2}{\Sigma^2}\tag{2.3}$$

где параметр Σ пробегает значения от Σ_w до бесконечности, Σ_w — корень трансцендентного уравнения

$$\ln\Sigma_w=\frac{\gamma\nu^2}{\Sigma_w^2}+2\beta\left(\sqrt{1+\frac{\nu^2}{\Sigma_w}+\frac{2\gamma\nu^4}{3\Sigma_w^3}}-1\right)\tag{2.4}$$

Плотность теплового потока на поверхность электрода и падение напряжения в пограничном слое в первом приближении будут

$$q_w=q_*\left(1+\frac{\nu^2}{\Sigma_w}+\frac{2\gamma\nu^4}{3\Sigma_w^3}\right)^{1/2}\tag{2.5}$$

$$\Delta U=\left(\frac{\varkappa_* T_*}{2m\sigma_*}\right)^{1/2}u, \qquad u=\frac{2}{\nu}\left[\left(1+\frac{\nu^2}{\Sigma_w}+\frac{2\gamma\nu^4}{3\Sigma_w^3}\right)^{1/2}-1\right] \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (2.4) можно разрешить относительно ν. Поэтому это уравнение вместе с соотношением (2.6) позволяет для каждого заданного значения параметра $\Sigma_w \geqslant 1$ определять соответствующие ν, u и может рассматриваться, следовательно, как параметрическое описание вольт-амперной характеристики. Формула (2.5) позволяет найти соответствующее значение плотности теплового потока на электрод.

При малых и больших значениях γ для вольт-амперной характеристики имеем соответственно следующие формулы:

$$\nu=\frac{[\Sigma_w \ln \Sigma_w (4\beta+\ln \Sigma_w)]^{1/2}}{2\beta} \qquad u=\frac{2\ln^{1/2}\Sigma_w}{[\Sigma_w(4\beta+\ln\Sigma_w)]^{1/2}}$$

$$\nu=\Sigma_w\left(\frac{\ln\Sigma_w}{\gamma}\right)^{1/2}, \qquad u=\left(1+\frac{2}{3}\ln\Sigma_w\right)\left(\frac{\ln\Sigma_w}{\gamma}\right)^{1/2}$$

Нетрудно видеть, что в случае малых γ вольт-амперная характеристика немонотонна: функция $u(\nu)$ имеет максимум (в точке $\nu=\beta^{-1/2}\exp(\sqrt{\beta^2+\beta}-\beta)$); в случае больших γ в рассматриваемой области $\Sigma_w=O(1)$ функция $u(\nu)$ монотонно возрастает. При малых γ влияние электрического поля на проводимость осуществляется только через джоулев нагрев плазмы в целом, при больших γ – через непосредственный нагрев электронов (джоулев нагрев плазмы в целом мал). Важно подчеркнуть, что члены уравнений (2.1), учитывающие указанные эффекты, зависят от Σ по-разному: они пропорциональны соответственно Σ^{-1} и Σ^{-2}. Именно этим объясняется отмеченное выше различное поведение вольт-амперной характеристики при малых и больших γ.

При малых значениях β для вольт-амперной характеристики имеем

$$\nu=\Sigma_w\left(\frac{\ln\Sigma_w}{\gamma}\right)^{1/2}, \qquad u=\frac{2}{\Sigma_w}\left(\frac{\gamma}{\ln\Sigma_w}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{\Sigma_w\ln\Sigma_w}{\gamma}+\frac{2\Sigma_w\ln^2\Sigma_w}{3\gamma}\right)^{1/2}-1\right]$$

Нетрудно видеть, что описываемая этими формулами функция $u(\nu)$ имеет максимум. Соответствующее этому максимуму значение Σ_w является корнем трансцендентного уравнения

$$\Sigma_w \ln^3\Sigma_w=9\gamma \tag{2.7}$$

При больших значениях Σ_w и $\beta\neq 0$ для вольт-амперной характеристики имеем формулы

$$\nu=\frac{\Sigma_w^{1/2}\ln\Sigma_w}{2\beta}, \qquad u=\frac{2}{\sqrt{\Sigma_w}}$$

Функция $u(\nu)$ убывает.

Из полученных результатов следует, что при β и γ порядка единицы и не равных одновременно нулю функция $u(\nu)$ имеет максимум. Непосредственные расчеты по соотношениям (2.4), (2.6) показывают, что других экстремумов нет. По мере увеличения параметра γ этот максимум уходит на бесконечность (точнее, за пределы рассматриваемой части вольт-амперной характеристики, соответствующей Σ_w, сравнимой с единицей) и функция $u(\nu)$ в рассматриваемой области становится монотонно возрастающей. Аналогично максимум уходит на бесконечность при $\beta+\gamma\to 0$.

Найденная выше вольт-амперная характеристика отличается от аналогичной характеристики, рассчитанной в нуль-мерном приближении [2]. В частности, при $\beta=\gamma=0$ характеристика [2] будет линейной, а характеристика, рассчитанная в данной работе, достигнет насыщения.

Рассмотрим устойчивость рассчитанного выше стационарного режима к одномерным возмущениям. Для первого члена внутреннего асимптотического разложения амплитуды возмущения температуры имеем по аналогии с (1.12), (1.17), (1.7), (1.15) следующую задачу на собственные значения:

$$\psi''+(\alpha-a)\psi'+b\int_0^\infty a\psi\,d\eta=0 \tag{2.8}$$

$$\eta=0,\quad \psi=2\beta\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\alpha\tau^e/\tau^g}}{\sqrt{\alpha\tau^e/\tau^g}}\psi';\quad \eta\to\infty,\quad \psi'\to 0 \tag{2.9}$$

$$\alpha=\tau^g\lambda,\quad \tau^g=\frac{\rho_* c_{p*}\varkappa_* T_*^2}{m^2 q_*^2},\quad a=a(\eta)=\frac{\nu^2}{2}\frac{\Sigma}{\Sigma^2+2\gamma\nu^2}$$

$$b=b(\eta)=2a\left(1+\frac{\gamma\nu^2}{\Sigma^2}\right)\left(\int_0^\infty a\,d\eta\right)^{-1},\quad \tau^e=\frac{\rho^e c^e h^2}{\varkappa^e}$$

Здесь ρ_*, c_{p*}, ρ^e, c^e — значения плотности и теплоемкости соответственно плазмы при $T=T_*$ и материала электрода. Заметим, что первое граничное условие (2.9) получено из решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности в электроде. При $\beta=o(1)$ это условие становится для нарастающих и нейтральных возмущений тождественным первому граничному условию (1.7).

Сформулированная задача содержит следующие характерные времена: время прогрева внутренней области плазмы τ^g и (при $\beta=O(1)$) время прогрева электрода τ^e. Отношение этих времен по порядку величины равно $\beta^{-2}\rho_* c_{p*}\varkappa_*/(\rho^e c^e \varkappa^e)$ и в типичных условиях весьма мало (при $\beta=O(1)$).

Рассмотрим сначала возмущения с характерным временем τ^e; очевидно, это рассмотрение имеет смысл при $\beta=O(1)$. В соответствии со сказанным выше на таких временах можно процессы в плазме рассматривать как квазистационарные и для описания распределения возмущенной температуры в плазме использовать стационарное решение (2.3). Заметим, что это решение при заданном γ однозначно характеризуется параметрами θ_w, ν. Поэтому рассмотрим плоскость (θ_w, ν). Каждой точке этой плоскости соответствует определенное стационарное состояние плазмы; соответствующее решение будем обозначать $\theta(\eta;\ \theta_w,\ \nu)$. Семейству решений при заданном β соответствует кривая, определяемая соотношением (2.4) и вторым соотношением (2.3); будем обозначать эту кривую Г.

Рассмотрим два близких состояния плазмы: невозмущенное стационарное, которое лежит на кривой Г и характеризуется некоторыми значениями θ_w, ν, и возмущенное квазистационарное, которое на кривой Г в общем случае не лежит и характеризуется значениями $\theta_w+\delta\theta_w$, $\nu+\delta\nu$ (величины $\delta\theta_w$, $\delta\nu$ пропорциональны $e^{-\lambda t}$). Имеем

$$\delta\theta=\theta(\eta;\theta_w+\delta\theta_w,\nu+\delta\nu)-\theta(\eta;\theta_w,\nu)=\frac{\partial\theta}{\partial\theta_w}\delta\theta_w+\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\delta\nu$$

Подставляя это выражение с учетом равенства $\delta\theta=mT_*^{-1}e^{-\lambda t}\psi$ в первое граничное условие (2.10), а также учитывая, что падение напряжения в пограничном слое одинаково для обоих состояний, получаем систему уравнений

$$\delta\theta_w=2\beta\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda\tau^e}}{\sqrt{\lambda\tau^e}}\left(\frac{\partial\theta_w'}{\partial\theta_w}\delta\theta_w+\frac{\partial\theta_w'}{\partial\nu}\delta\nu\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta_w}\delta\theta_w+\frac{\partial u}{\partial\nu}\delta\nu=0$$

Приравнивая детерминант этой системы нулю, получаем дисперсионное уравнение, которое с учетом уравнения стационарного теплового баланса $u\nu=2(\theta_w'-1)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\equiv\frac{Du}{D\nu}-\frac{\partial u}{\partial\theta_w}\frac{D\theta_w}{D\nu}=-\beta\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda\tau^e}}{\sqrt{\lambda\tau^e}}u\frac{\partial u}{\partial\theta_w}$$

где $D/D\nu$ означает производную вдоль кривой Г.

Производную $D\theta_w/D\nu$ можно выразить из первого граничного условия

(2.2). После преобразований получаем окончательно дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda\tau^e}}{\sqrt{\lambda\tau^e}}-1=\left[1-\frac{1}{2\beta}\left(\frac{\partial\theta_w'}{\partial\theta_w}\right)^{-1}\right]\frac{D\ln u}{D\ln\nu} \qquad (2.10)$$

Заметим, что это уравнение выведено без использования решения (2.3) и, следовательно, имеет довольно общий характер. Можно ожидать, что оно характеризует инкремент развития одномерных возмущений на частотах порядка обратного времени прогрева электрода во всех случаях, когда напряжение на разряде фиксировано, а тепловой поток на некотором расстоянии от электрода не зависит от плотности тока и температуры электрода (например, тепловой поток в плоскости симметрии разряда с продольным теплообменом в ограниченной покоящейся плазме при условии ионизационного равновесия при температуре электронов, которая в свою очередь определяется локальным балансом энергии электронов, равен нулю [11]). Характер процессов в плазме при этом не имеет значения, важно лишь, чтобы на данных частотах эти процессы можно было бы считать квазистационарными. Заметим, что производная в первом сомножителе правой части этого уравнения имеет смысл безразмерной производной плотности теплового потока на поверхность электрода по температуре поверхности при постоянной плотности тока (этот сомножитель можно представить в виде $1-\varkappa^e(h\partial q_w/\partial T_w)^{-1}$); второй сомножитель имеет смысл логарифмической производной вольт-амперной характеристики.

Уравнение (2.10), рассматриваемое как трансцендентное уравнение относительно λ, имеет счетное множество положительных корней; в случае, когда значение правой части равно нулю или лежит в интервале $]-1;\ 0[$, есть один соответственно нулевой или отрицательный корень. В обычных условиях, когда процессы в плазме таковы, что увеличение температуры поверхности электрода при фиксированной плотности тока приводит к уменьшению теплового потока, первый сомножитель правой части (2.10) заведомо положителен и точке потери устойчивости относительно рассматриваемых возмущений соответствует точка максимума вольт-амперной характеристики. Можно видеть, что в данных условиях производная $\partial\theta_w'/\partial\theta_w$, определяемая решением (2.3), отрицательная и ситуация именно такова.

Рассмотрим теперь возмущения с характерным временем τ^g. Будем далее учитывать, что в соответствии со сказанным выше первое граничное условие (2.9) принимает на таких временах вид $\psi(0)=0$.

При малых γ задача (2.8), (2.9) сводится к задаче (1.12), (1.17), (1.7), (1.15) и нарастающие и нейтральные возмущения отсутствуют. При больших γ в рассматриваемом диапазоне значений плотности тока имеем $a=O(\gamma^{-1})$ и уравнение (2.8) становится уравнением с постоянными коэффициентами и нарастающие и нейтральные возмущения вновь отсутствуют. Рассмотрим случай $\gamma=O(1)$, при этом ограничимся нахождением значений плотности тока, соответствующих нулевому α, и линейным анализом задачи (2.8), (2.9) в окрестности этих значений.

Рассмотрим некоторое фиксированное стационарное состояние плазмы, которому соответствуют, в частности, некоторые фиксированные значения Σ_w, θ_w, ν, u и фиксированные функции $\theta(\eta)$, $\Sigma(\eta)$; будем считать, что входящие в коэффициенты задачи (2.8), (2.9) величины ν, Σ соответствуют именно этому стационарному состоянию. Рассмотрим также однопараметрическое семейство стационарных состояний, соответствующих разным значениям плотности тока на электрод и одному и тому же значению θ_w, равному значению в указанном выше фиксированном состоянии; будем приписывать этим состояниям индекс ноль. Очевидно, эти состояния описываются краевой задачей

$$\theta_0'' = -\frac{\nu_0^2}{2}\frac{1}{\Sigma_0}, \qquad \Sigma_0=\exp\left(\theta_0+\frac{\gamma\nu_0^2}{\Sigma_0^2}\right) \tag{2.11}$$

$$\eta=0, \quad \theta_0=\theta_w; \qquad \eta\to\infty, \quad \theta_0'\to 1 \tag{2.12}$$

Указанное выше фиксированное состояние является элементом рассматриваемого семейства состояний, соответствующим $\nu_0=\nu$. Очевидно, задачу (2.8), (2.9) при $\alpha=0$ можно рассматривать как результат линеаризации задачи (2.11), (2.12) при заданном u_0 в окрестности решения, соответствующего этому фиксированному состоянию. Если задача (2.8), (2.9) при $\alpha=0$ имеет нетривиальное решение, то это означает, что при $u_0=u$ задача (2.11), (2.12) при заданном u_0 вырождается [12]. Нетрудно видеть, что вырождение последней задачи имеет место в точке максимума вольт-амперной характеристики $u_0(\nu_0)$. Находя указанную характеристику и определяя условие ее максимума, получаем после преобразований следующее условие разрешимости задачи (2.8), (2.9) при $\alpha=0$:

$$\gamma^2\nu^6=9\Sigma_w^5 \tag{2.13}$$

Заметим, что при малых β задача (2.11), (2.12) совпадает с (2.1), (2.2); соответственно при малых β условие (2.13) переходит в (2.7).

Условие (2.13) позволяет выделить на вольт-амперной характеристике точку, соответствующую нулевому α. Поскольку задача (2.8), (2.9) несамосопряженная, представляет интерес рассмотреть поведение функции $\alpha(\nu)$ в окрестности этой точки. Не приводя за недостатком места обоснование, укажем, что производная $d\sqrt{-\alpha}/d\nu$ в указанной точке положительна. Поэтому (2.13) можно трактовать как достаточное условие потери устойчивости относительно возмущений рассматриваемого типа.

Таким образом, в рамках рассматриваемой модели нарастающими могут оказаться возмущения как с характерным временем τ^e, так и τ^g. Условие развития первой неустойчивости соответствует максимуму вольт-амперной характеристики, достаточное условие развития второй имеет вид (2.13). При малых β первая неустойчивость отсутствует, а условие (2.13) соответствует максимуму вольт-амперной характеристики. При малых или больших γ отсутствует вторая неустойчивость. При $\beta=O(1)$, $\gamma=O(1)$ возможны обе неустойчивости; поскольку точка, соответствующая условию (2.13), находится, как показывают непосредственные расчеты, на падающей ветви вольт-амперной характеристики, то можно ожидать, что первая неустойчивость развивается при меньших значениях плотности тока. Отметим, что эти результаты согласуются с выводом о неустойчивости области, соответствующей падающему участку вольт-амперной характеристики, сделанным в [2] на основании нуль-мерного анализа.

Использованное в данной работе предположение об ионизационном равновесии во всем объеме пограничного слоя имеет, вообще говоря, модельный характер. Поэтому полученные результаты предназначены главным образом для целей качественного анализа. Например, на основании изложенного выше можно ожидать, что в отсутствие джоулева нагрева плазмы в целом неравновесность электронов не приведет к немонотонности вольт-амперной характеристики, и численные расчеты [10] подтверждают это предположение. С другой стороны, применимость некоторых полученных результатов (например, вывода о локализации нарастающих и нейтральных возмущений в пристеночной области, уравнения (2.10)) не ограничена рассматриваемой моделью.

Автор благодарит Г. А. Любимова и участников руководимого им семинара, И. М. Руткевича, В. Д. Хаита за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руткевич И. М., Синкевич О. А.* Волны и неустойчивости в низкотемпературной плазме.– В сб.: Итоги науки и техники, сер. Механика жидкости и газа. Т. 14, с. 127. М.: ВИНИТИ, 1980.
2. *Хаит В. Д.* Модель образования анодных пятен на горячих электродах в потоке слабоионизованной плазмы молекулярных газов.– Теплофиз. высоких температур, 1977, т. 15, № 3, с. 496–504.
3. *Бенилов М. С.* Распределение электрического тока в секционированном канале с сильно меняющейся проводимостью.– Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 2, с. 311–314.
4. *Ватажин А. Б., Алавидзе Г. Р.* Расчет турбулентного магнитогидродинамического пограничного слоя в каналах МГД-генераторов.– Теплофиз. высоких температур, 1976, т. 14, № 3, с. 619–628.
5. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
6. *Бенилов М. С.* Протекание тока через пограничный слой с анизотропной сильно меняющейся проводимостью.– Магнитная гидродинамика, 1984, № 3, с. 89–97.
7. *Глинов А. П.* О влиянии конечной толщины электродов на устойчивость дугового разряда.– Теплофиз. высоких температур, 1981, т. 19, № 6, с. 1162–1166.
8. *Недоспасов А. В., Хаит В. Д.* Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1979. 168 с.
9. *Куликовский А. Г., Регирер С. А.* О влиянии стенок на перегревную неустойчивость в магнитогидродинамическом канале.– ПМТФ, 1965, № 5, с. 34–39.
10. *Бенилов М. С., Бочкарев Г. Г.* Характеристики прианодного пограничного слоя в плазме продуктов сгорания.– В сб.: Физико-технические проблемы создания МГДЭС. М., 1985, ч. 2, с. 175.
11. *Руткевич И. М., Синкевич О. А.* О свойствах нелинейных стационарных режимов джоулева нагрева низкотемпературной плазмы.– Теплофиз. высоких температур, 1980, т. 18, № 1, с. 27–39.
12. *Келлер Дж. Б.* Теория ветвления решений обыкновенных дифференциальных уравнений.– В кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974, с. 19.

Москва

Поступила в редакцию
14.VI.1985