

УДК 533.6.013.2:532.582.3+533.6.011.72

**О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДИФРАКЦИОННЫХ
АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА И О ЧИСЛЕННОМ
ИХ МОДЕЛИРОВАНИИ**

ДЕМЬЯНОВ А. Ю., ПАНАСЕНКО А. В.

Исследованию взаимодействия плоской ударной волны с телами различных геометрических форм посвящено большое число работ, обобщение и систематизация которых для неподвижного тела проведена в [1, 2]. Отдельные результаты экспериментального и теоретического исследований взаимодействия ударной волны с движущимися со сверхзвуковыми скоростями клином, конусом, сферой и цилиндром содержатся в [3–9]. Анализ имеющихся результатов показывает, что особенности формирующихся при этом нестационарных течений газа в значительной степени зависят от характера краевой задачи, возникающей для системы дифференциальных уравнений газовой динамики. При численном исследовании данного класса задач центральным является вопрос о волновой структуре нестационарного течения газа и о точности полученного решения.

На основе явного численного метода сквозного счета второго порядка точности проведены расчеты наиболее характерных типов нестационарных автомодельных течений газа, возникающих при взаимодействии плоской ударной волны с телами типа клин и выпуклый угол. Обсуждается вопрос о точности численных решений на основе сравнения с экспериментальными данными. Рассмотрен случай взаимодействия ударной волны с волной разрежения, возникающей при сверхзвуковом обтекании выпуклого угла.

1. Рассмотрим взаимодействие плоской ударной волны с выпуклым или вогнутым углом в идеальном совершенном газе при наличии или отсутствии обтекания угла сверхзвуковым потоком газа. Фронт ударной волны перпендикулярен образующей угла и параллелен его ребру. Взаимодействие начинается в момент времени $t=0$ от вершины угла, связанной с декартовой системой координат x, y (ось x направлена по вектору нормали к фронту ударной волны). Определяющими параметрами задачи являются: число Маха набегающей ударной волны M_s , число Маха потока газа M_f , величина раствора выпуклого (или вогнутого) угла θ_s (угла, образованного граничной линией тока и отсчитываемого по часовой стрелке), показатель адиабаты газа $\gamma=c_p/c_v$. Возникающее нестационарное течение газа описывается системой дифференциальных уравнений газовой динамики. При отсутствии в задаче характерного линейного размера в автомодельных переменных $\xi=x/Dt, \eta=y/Dt$, где $D=(M_s+M_f)a_0$, эта система принимает вид

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial \eta} + X = 0 \quad (1.1)$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho Q \\ Q^2 + \rho P \\ QN \\ Q(E+P) \end{vmatrix}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho N \\ QN \\ N^2 + \rho P \\ N(E+P) \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} 2\rho \\ 3Q \\ 3N \\ E_1 \end{vmatrix}, \quad f = \begin{vmatrix} \rho \\ Q \\ N \\ E \end{vmatrix}$$

$$Q = \rho(u - \xi), \quad N = \rho(v - \eta), \quad E = \rho \epsilon + \frac{1}{2}(Q^2 + N^2)/\rho$$

$$E_1 = 2(E+P) + (Q^2 + N^2)/\rho$$

Здесь и ниже P , ρ , a , ε , u , v — соответственно давление, плотность, скорость звука, внутренняя энергия единицы массы газа и компоненты скорости газа вдоль осей x , y . Обезразмеривание, если не оговорено особо, проводится по скорости ударной волны D и плотности ρ_0 (индекс 0 относится к параметрам невозмущенного газа перед ударной волной).

2. Численное решение рассматриваемых ниже задач получено методом установления [10] с добавлением в левую часть (1.1) члена $\partial f/\partial t$ ($\tau = \ln t$). Начальные условия при этом задаются достаточно произвольно и, как показали расчеты, не влияют на результат установления. Граничные условия задаются на всех границах расчетной области в соответствии с типом рассматриваемой задачи. При набегании ударной волны на вогнутый угол ($M_1=0$, $\theta_s < 180^\circ$) на невозмущенных границах расчетной области поддерживаются известные параметры течения перед и за ударной волной, связанные соотношениями Гюгонио. В случае выпуклого угла [11] за ударной волной задаются параметры течения Прандтля — Майера, перед ударной волной — невозмущенные параметры ($M_1=0$) или параметры течения Прандтля — Майера ($M_1 > 1$).

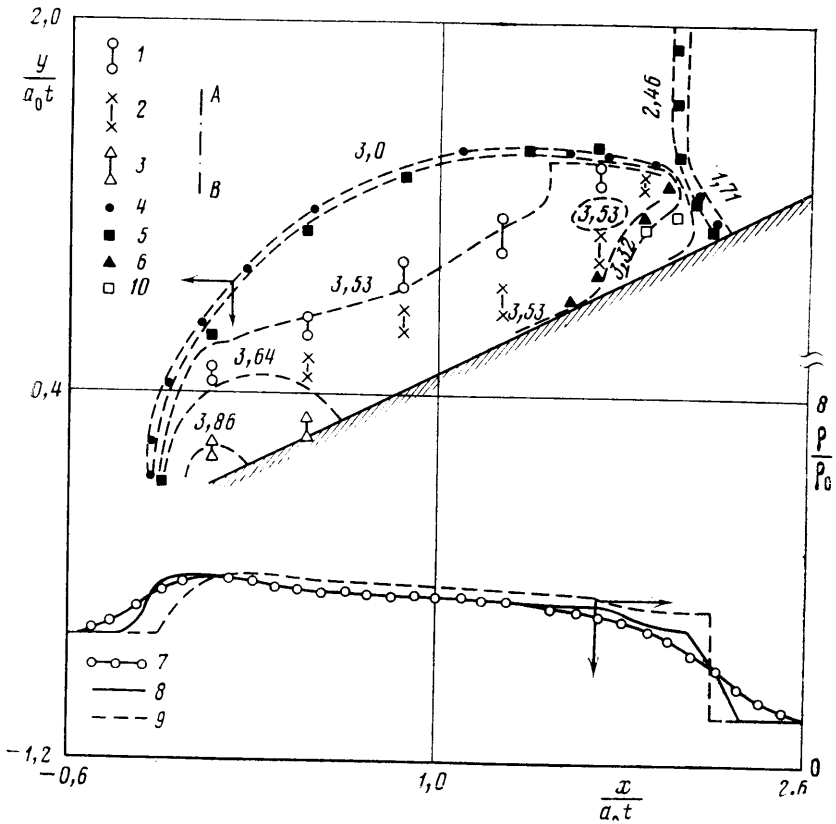
3. При исследовании нестационарных течений газа за ударной волной при ее взаимодействии с твердой поверхностью основным вопросом наряду с изучением закономерностей процесса является степень достоверности получаемых результатов. Поэтому интерес представляет точность, с которой на разностных сетках с числом узлов $\sim 70 \times 40$ при использовании современных численных методов удается воспроизвести основные структурные элементы возникающего течения газа: ударные волны, контактные разрывы, положения отдельных линий $\rho = \text{const}$ в поле течения и т. п.

В этой связи рассмотрим наиболее часто встречающийся при взаимодействии с вогнутым углом случай простого маховского отражения нестационарной ударной волны. На фиг. 1 представлен результат расчета при $M_s=2$, $\gamma=1,4$, $\theta_s=153,44^\circ$. Здесь пунктиром приведены линии $\rho = \text{const}$ (значения ρ указаны на фигуре), цифры 1—3, 10 соответствуют экспериментальным значениям $\rho=3,52-3,57$; 3,62—3,67; 3,82—3,87 и 3,32, взятым из [12], 4 соответствует линии AB

$$(u-\xi)^2 + (v-\eta)^2 - a^2 = 0 \quad (3.1)$$

построенной по параметрам за падающей ударной волной; 5, 6 — положение ударных волн и контактного разрыва по [12].

Видно, что в окрестности встречи падающей ударной волны с поверхностью угла сформировались отраженная и преломленная (ножка Маха) ударные волны и слегка изогнутый контактный разрыв. Соответствие численного расчета решениям [1, 2] и экспериментальным данным [12] удовлетворительное. Достаточно хорошо совпадают не только положения основных газодинамических разрывов, но и местоположение отдельных линий $\rho = \text{const}$. В нижней части фиг. 1 приведены распределения $\rho(\xi)$ вдоль нулевой линии тока, взятые из расчетов на двух разностных сетках с последовательным увеличением количества узлов в 2 раза (7 — грубая сетка, 8 — мелкая сетка, на которой рассчитывались линии $\rho = \text{const}$) и из эксперимента [12] — 9. Видна сходимость численного решения задачи к экспериментальным данным вне малой окрестности ударной волны, пересекающей рассматриваемую линию тока. Анализ настоящих результатов (положений отдельных линий $\rho = \text{const}$, взаимосогласованности кривой (3.1) с положением головной ударной волны и т. п.) приводит к выводу, что указанное расхождение не может быть отнесено за счет погрешностей численного расчета. Кроме того, в [12] отмечалось, что головная ударная волна вырождается в звуковую. Однако этому противоречит ее опережение линии AB (фронта звуковых возмущений). Поэтому наблюдаемое расхождение, по-видимому, вызвано наличием неучтенных при численном решении задачи факторов, имевших место в эксперименте.

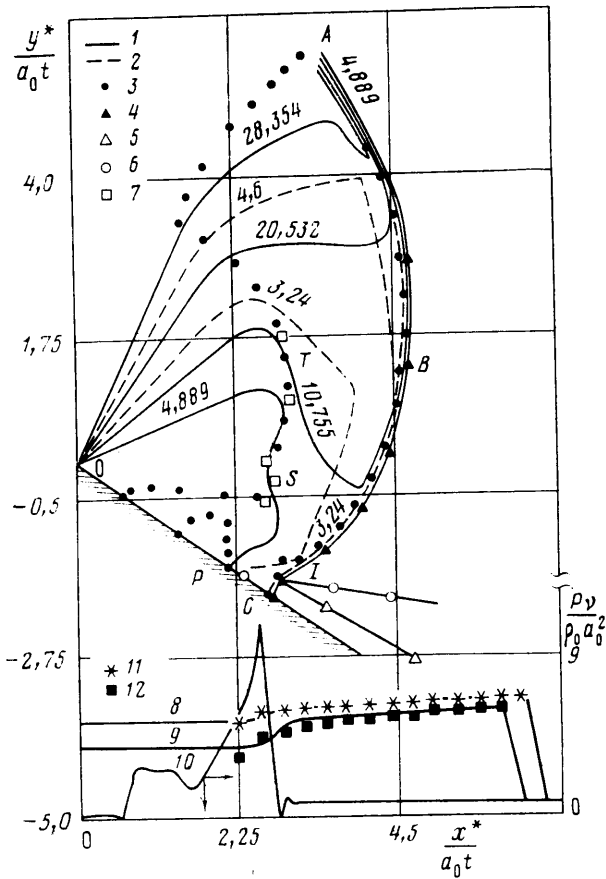


Фиг. 1

В [11, 13] опубликованы систематические данные численных расчетов взаимодействия плоской ударной волны с выпуклым углом. Имеющиеся экспериментальные результаты [1, 14] показывают, что при больших $\theta = \theta_s - 180^\circ$ внутренняя ударная волна TS вызывает нестационарный отрыв (OSP) пограничного слоя, образованного у поверхности угла дифрагированной ударной волной ABC (фиг. 2).

В этой связи возникает вопрос о степени влияния нестационарного отрыва потока газа от поверхности угла на основные элементы волновой картины течения в целом. С этой целью рассмотрим взаимодействие ударной волны с выпуклым углом в математической постановке, данной выше и исключаяющей при численном решении возможность возникновения отрыва потока газа от поверхности угла (в экспериментах [1] здесь наблюдается отрыв). В частном случае $M_s = 5,95$, $M_t = 0$, $\gamma = 1,4$, $\theta = 65^\circ$ такое решение приведено на фиг. 2 в декартовой системе координат x^* , y^* , повернутой относительно x , y против часовой стрелки на угол $\alpha = 30^\circ$; здесь 1-3 — соответственно линии $P = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ и (3.1). Следует подчеркнуть, что в настоящих расчетах было получено численное решение без отрыва потока от поверхности угла и потому можно проследить, на что влияет этот отрыв. Основные элементы волновой структуры течения напоминают случай малых θ [11].

Дифрагируемая ударная волна сильно искривляется. В окрестности поверхности угла образуется хорошо различимая преломленная ударная волна (аналог маховской ножки, возникающей при маховском отражении ударной волны от поверхности тела). Линии $\rho = \text{const}$ указывают на наличие контактного разрыва, образованного в результате взаимодействия ударных волн в точке I . Отраженная ударная волна при этом неразличима из-за недостаточной разрешающей способности использованной раз-



Фиг. 2

ностной сетки. Вверх по потоку формируется внутренняя ударная волна; это позволяет установить анализ поведения линии (3.1) во внутренней области течения, аналогичный [11]. При приближении к верхней части течения внутренняя ударная волна вырождается. Любопытно отметить, что при отсутствии отрыва потока внутренняя ударная волна обязана была бы иметь форму, сходную с линией (3.1), как это видно из фиг. 2. На фиг. 2 цифры 4–7 из эксперимента, проведенного В. С. Комаровым и аналогичного [1, 14], положение дифрагируемой ударной волны *ABC*, траектория движения тройной точки пересечения ударных волн *I*, положение контактного разрыва, образованного в результате взаимодействия ударных волн в точке *I*, положение внутренней ударной волны *TS*. Видно, что численное решение хорошо соответствует эксперименту вне области нестационарного отрыва (*OSP*) по основным, перечисленным выше особенностям волновой картины течения.

Остановимся теперь на соответствии численного решения имеющимся аналитическим решениям рассматриваемой задачи [2, 15]. В нижней части фиг. 2 приведено распределение $P(\xi)$ по поверхности угла. Здесь 11, 12 – результат [2, 15], сплошные линии – настоящий расчет (кривая 10 – $M_s=5,95$, $M_t=0$, $\gamma=1,4$, $\theta=65^\circ$; 8, 9 – соответственно $\theta=5^\circ$ и 10° при $\gamma=1,4$, $M_s=6,56$, $M_t=0$, $\alpha=5^\circ$; масштабный множитель $\nu=1$ для кривой 10 и $\nu=0,2$ для кривых 8, 9). Видны удовлетворительное совпадение результатов при малых θ и отличия, возникающие по отношению к линейной теории при больших θ .

Таким образом, численное решение уравнений газовой динамики позволяет с точностью 5–10% установить положения основных разрывов (даже при наличии отрыва потока) и в ряде случаев с той же степенью точности построить геометрическое положение отдельных линий $P=\text{const}$, $\rho=\text{const}$. В целом это дает полную количественную и качественную информацию о характеристиках нестационарного течения газа, получение которой затруднительно в эксперименте.

Ниже приведены данные об ослаблении набегающей ударной волны с числом Маха $M_s=10$ при ее дифракции на выпуклом угле в зависимости от γ и θ (1 – настоящий расчет, 2 – данные по экспериментальной формуле из [1], Δ – относительная ошибка результатов) на нулевой линии тока.

γ	1,4	1,3	1,2	1,1	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
θ , град	50	50	50	50	60	70	80	90	100
1	6,4	5,9	4,8	4,0	5,3	5,0	4,5	3,9	3,4
2	6,2	–	–	–	5,5	4,84	4,21	3,64	3,1
Δ , %	3,2	–	–	–	3,8	3,3	6,9	7,1	9,7

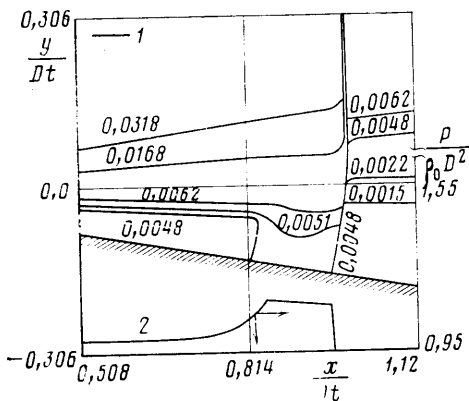
4. Остановимся теперь на результатах численного решения задачи о взаимодействии плоской ударной волны с течением Прандтля – Майера около выпуклого угла. В зависимости от определяющих параметров γ , M_s , M_f , θ веер волн Прандтля – Майера перед набегающей ударной волной может занимать различные положения по отношению к аналогичному вееру за ударной волной (здесь и выше предполагается, что поток за ударной волной сверхзвуковой). Этим определяется геометрия возмущенной области течения газа. При числе Маха за ударной волной $M_{f1} < M_f$ верхняя граница возмущенной области идет по окружности (3.1). Если при этом число Маха не слишком велико, то наличие перед ней веера волн разрежения не оказывает существенного влияния на формирование течения газа и картина течения напоминает случай $M_f=0$ [11]. Типичный результат численного расчета при $\gamma=1,4$, $M_s=2$, $M_f=7,84$, $\theta=10^\circ$ представлен на фиг. 3 в виде линий 1 – $P=\text{const}$. В нижней части фигуры приведено распределение $P(\xi)$ по поверхности угла (2). Видно, что ударная волна искривляется в сторону вершины угла, причем изгиб дифрагируемой волны происходит главным образом в нижней части первоначального веера волн разрежения. Как и в случае $M_f=0$, в сторону вершины угла распространяется ударная волна, сносимая потоком вниз по течению.

Случай с $M_{f1} > M_f$ характерен тем, что верхняя граница возмущенной области проходит по характеристике AC , берущей начало в точке пересечения падающей ударной волны и первой характеристики начального веера Прандтля – Майера PA . Численное решение для такого режима приведено на фиг. 4 при $\gamma=1,4$, $\alpha=10^\circ$, $M_f=10$, $M_s=2$, $\theta=40^\circ$ (обозначения аналогичны использованным на фиг. 2). Поведение ударной волны оказывается довольно сложным: вначале происходит небольшое выпучивание ее вперед по потоку, а затем искривление к вершине угла при приближении к его образующей. Эллиптическая область течения газа $EFGH$ узкая, что характерно для больших θ и M_f .

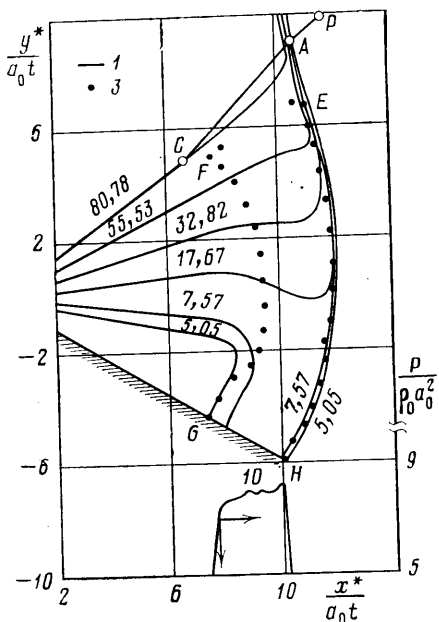
При увеличении интенсивности ударной волны в картине течения возникают изменения, вносимые взаимодействием с веером волн разрежения. На фиг. 5 приведено численное решение, отвечающее рассматриваемому случаю при $\gamma=1,4$, $M_f=7,84$, $M_s=10$, $\theta=10^\circ$. Здесь 1–3 соответствуют линиям $P=\text{const}$, $\rho=\text{const}$ и (3.1). Наблюдается характерное выпучивание ударной волны (ABC). Оно начинается в нижней части первоначального

чального веера волн (EB). При этом внутри эллиптической области течения газа ($AMNPCBA$) распространяется волна сжатия (BQF), обусловленная сильным искривлением ударной волны (EBC) в области ее взаимодействия с веером волн разрежения. Полученное в расчете распределение $P(\xi)$ по поверхности угла (4) показано в нижней части фигуры. Видно, что волна сжатия, приходящая на поверхность угла, достаточно глубокая и заканчивается около левой границы возмущенной области, где формируется слабая ударная волна на NP . Об этом свидетельствует анализ, аналогичный [11].

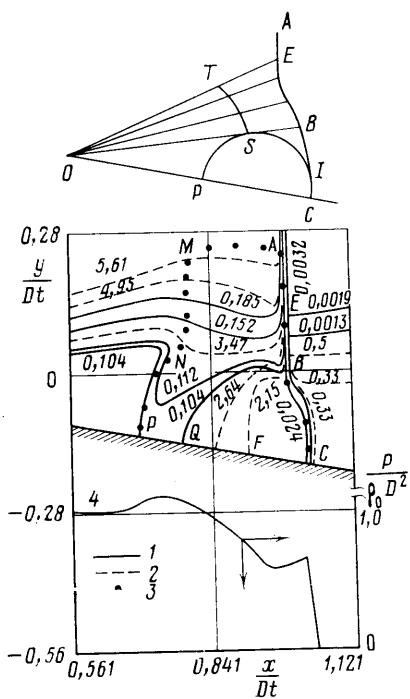
5. Метод характеристик позволяет дать наглядную интерпретацию некоторых из полученных результатов в плоскости автомодельных переменных [16].



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Характеристики первого и второго семейств существуют всюду, кроме кривой (3.1), и описываются уравнением

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_{1,2} = \frac{-(u-\xi)(v-\eta) \pm a\sqrt{(u-\xi)^2 - (v-\eta)^2 - a^2}}{a^2 - (u-\xi)^2} \quad (5.1)$$

В случае ударной волны малой интенсивности ее образ в плоскости автомодельных переменных ξ, η в линейном приближении совпадает с характеристикой (5.1). При этом форма дифрагируемой ударной волны зависит от определяющих задачу параметров γ, M, θ , и может быть получена из рассмотрения поведения характеристики (5.1) внутри волны разрежения Прандтля — Майера (вне волны разрежения характеристики являются прямыми линиями, касающимися окружности (3.1)). Видно, что внутри веера волн разрежения характеристики первого и второго се-

мейств (5.1) совпадают с соответствующими линиями веера волн разрежения до линии (3.1), после которой они начинают искривляться так, чтобы выйти на касательную к окружности (3.1) вне области течения Прандтля — Майера. Внутри веера волн разрежения уравнение линии (3.1) может быть записано в виде

$$R = a_0 \sqrt{i \frac{(M^2 - 1)(1 + 0,5M_f^2(\gamma - 1))}{1 + 1/2 M^2(\gamma - 1)}} \quad (5.2)$$

где R — радиус-вектор, проведенный из вершины угла, M — текущее число Маха. Линия (5.2) является местом зарождения области течения газа, внутри которой система уравнений (1.1) — эллиптического вида.

В частном случае предельно слабой ударной волны $M_s \sim 1$, $M_f \sim 5$, $\theta \sim 10^\circ$ картина течения имеет вид, схематично показанный в верхней части фиг. 5. Падающая ударная волна AE совпадает с характеристикой κ , следуя ей, занимает положение $EBIC$. Линия (3.1) вырождается в (5.2) (TS внутри волн разрежения) и совпадает с окружностью PSC вне веера. Области течения OTS , $TSEB$, OSP , SBI — сверхзвуковые, PSC — дозвуковая; TS — линия параболжности уравнений (1.1).

Как показывают проведенные численные расчеты, по мере увеличения интенсивности ударной волны M_s линия (5.2) становится местом зарождения области течения газа, внутри которой система уравнений (1.1) является системой эллиптического типа. При этом эллиптическая область течения расширяется и достигает ударной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977. 274 с.
2. Аругян Г. М., Карчевский Л. В. Отраженные ударные волны. М.: Машиностроение, 1973. 376 с.
3. Kutler P., Sakell L. Three-dimensional, shock-on-shock interaction problem.— AIAA Pap., 1975, № 49, 11 p.
4. Балакин В. Б., Буланов В. В. Численное решение задачи о взаимодействии ударной волны с цилиндром в сверхзвуковом потоке.— Инж.-физ. журн., 1971, т. 21, № 6, с. 1033–1039.
5. Прокопов Г. П., Степанова М. В. Расчет осесимметричного взаимодействия ударной волны с затупленным телом, движущимся со сверхзвуковой скоростью. Препринт № 72. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1974.
6. Тузаков Р. Я. Систематические расчеты обтекания движущихся конусов при падении на них ударной волны.— Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3, с. 98–103.
7. Липницкий Ю. М., Лязов В. Н. Взаимодействие ударной волны с клином в сверхзвуковом потоке.— Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 4, с. 115–119.
8. Маковский Ю. Ф., Шуаев Ф. В. Набегание ударной волны на клин, обтекаемый сверхзвуковым потоком.— Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 3, с. 115–117.
9. Бужинский О. И., Василенко А. М., Жеребцов Л. М., Ткаченко А. Н. Взаимодействие плоской ударной волны с моделью, летящей со сверхзвуковой скоростью.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 6, с. 90–97.
10. Липницкий Ю. М., Панасенко А. В. Исследование взаимодействия ударной волны с острым конусом.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3, с. 98–104.
11. Демьянов А. Ю., Панасенко А. В. Численное решение задачи дифракции плоской ударной волны на выпуклом угле.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 5, с. 103–109.
12. Бен-Дор Г., Гласс И. И. Нестационарные отражения косых ударных волн: данные экспериментов и результаты численных расчетов.— Ракетная техника и космонавтика, 1978, т. 16, № 11, с. 33–42.
13. Демьянов А. Ю., Липницкий Ю. М., Лязов В. Н., Панасенко А. В., Яцук В. Ф. Результаты систематических численных расчетов взаимодействия ударных волн с выпуклым углом.— Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, вып. 24, с. 1481–1484.
14. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г., Комаров В. С., Сухов Б. Г. Исследование дифракции сильных ударных волн на выпуклых углах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4, с. 122–134.
15. Lighthill M. J. The diffraction of blast. 2.— Proc. Roy. Soc. London, A, 1950, v. 200, № 1063.
16. Панасенко А. В. Общий анализ картины дифракции плоской акустической волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 2, с. 172–175.

Москва

Поступила в редакцию
6.II.1985