

УДК 533.6.011.8

ПРЯМОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

АБРАМОВ А. А.

При рассмотрении задач расчета стационарных течений газа возникает проблема согласования решений для областей с существенно различными пространственными масштабами. Примером может служить задача о расчете обтекания сильно испаряющего (конденсирующего) газ тела, когда область течения содержит кнудсеновский слой, слой смещения, невязкую область течения, описываемые соответственно уравнением Больцмана, Навье – Стокса и Эйлера. Получение решения в каждой области представляет собой достаточно трудную задачу, усложняющуюся необходимостью согласования полученных решений друг с другом. Аналогичные проблемы имеют место при исследовании обтекания холодных тел и рассмотрении структуры течения около тел при уменьшении числа Кнудсена, а также в задачах о разлете разреженного газа. Уравнение Навье – Стокса и Эйлера, которые описывают течение газа в области сплошной среды, получаются из уравнения Больцмана путем разложения функции распределения в ряд по числу Кнудсена $\epsilon \rightarrow 0$. В связи с этим возникает вполне законный вопрос о распространении методов решения уравнения Больцмана и его кинетических моделей [1, 2] в область малых чисел Кнудсена. Предлагаемый ниже подход основан на решении кинетического уравнения сразу во всей области течения, поэтому отпадает проблема стыковки решений, полученных на основе различных уравнений, а методика расчета является «сквозной». Естественно, в полном объеме решить поставленную задачу трудно и, по-видимому, в настоящий момент невозможно, однако первые шаги в этом направлении уже сделаны [3] для указанных кинетических модельных уравнений. В данной работе аналогичная попытка делается путем распространения метода прямого статистического моделирования для расчета стационарных течений газа при малых значениях числа Кнудсена на примере задачи о сильной переконденсации газа между двумя плоскопараллельными испаряющимися пластинами.

1. Движение одноатомного бесструктурного газа описывается уравнением Больцмана

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} = \int (f' f_1' - f f_1) g d\sigma d\xi_1 \quad (1.1)$$

Скорости молекул после столкновения ξ' и ξ_1' , входящие в f' и f_1' , находятся по формулам

$$\xi' = 0,5(\xi + \xi_1 + g\epsilon), \quad \xi_1' = 0,5(\xi + \xi_1 - g\epsilon), \quad g = |\xi - \xi_1| \quad (1.2)$$

Здесь ϵ – единичный вектор, определяющий направление относительной скорости молекул после столкновения; $d\sigma$ – дифференциальное сечение упругих столкновений. Остальные обозначения общепринятые [1].

Для построения решения уравнения (1.1) в рассматриваемой области физического пространства задаются начальные и граничные условия для функции распределения молекул f .

Существуют различные методы решения уравнения Больцмана (1.1) [4]. Метод прямого статистического моделирования, предложенный впервые Бёрдом [5, 6] и получивший дальнейшее развитие в [7], оказался одним из простых и эффективных при $\epsilon \geq 0,1$ для широкого круга задач динамики разреженного газа [6, 8].

Этот метод состоит в следующем. Большое количество молекул в области течения заменяют значительно меньшим, и распределяют их в начальный момент времени в ячейках неподвижной эйлеровской сетки со скоростями, которые моделируются с помощью начальной функции распределения в данной ячейке. Сечение столкновения моделирующих течение молекул σ_m выбирается существенно большим сечением столкновения реальных молекул σ_r для того, чтобы смоделировать частоту столкновений молекул или число Кнудсена ϵ . В связи с этим на величину указан-

ного сечения и средние плотности молекул n_{**} и n_{**} накладывается соотношение $\sigma_m/\sigma_r = n_{**}/n_{**}$. Эволюция системы моделирующих течение частиц на временном интервале Δt расщепляется на два этапа: а) свободный перелет молекул в течение контрольного времени Δt , б) столкновение неподвижных молекул, расположенных в данной ячейке, — этап релаксации.

Имеется несколько алгоритмов моделирования процесса столкновения молекул [5–8]. Наиболее простой алгоритм [7], моделирующий статистику и частоту столкновений молекул, состоит в последовательной переборке всевозможных пар молекул данной ячейки и проверки условия столкновения молекул с номерами i, j с вероятностью

$$P_{ij} = g_{ij}\sigma(g_{ij})\Delta t/V, \quad g_{ij} = |\xi_i - \xi_j|$$

где V — объем рассматриваемой ячейки, $\sigma(g_{ij})$ — сечение столкновения молекул i, j , в общем случае зависящее от величины относительной скорости g_{ij} . Условия применимости данного алгоритма [9], которые имеют вид $\sum_{j \neq i} P_{ij} \ll 1$ для всех значений

номеров i молекул, расположенных в рассматриваемой ячейке, приводят к ограничению на величину контрольного времени $\Delta t \ll \tau$, где τ — среднее время между столкновениями молекул. На практике задают, как правило, $\Delta t \approx \tau/3$. Указанный алгоритм оказался эффективным при малом числе частиц в ячейке (1–5 молекул), что важно в силу ограниченности памяти существующих ЭВМ.

В дальнейшем будем рассматривать метод прямого статистического моделирования применительно к стационарным задачам. Для стационарных задач в методе прямого статистического моделирования важен выбор размера ячеек эйлеровской сетки. В большинстве работ (см. [6–8]), в которых применялся этот метод, размер ячеек выбирался меньше средней длины свободного пробега молекул.

Отметим трудности, возникающие в случае, когда течение содержит области с существенно различными масштабами, на примере задачи обтекания тела, поверхность которого сильно испаряется, при малых числах Кнудсена. Вблизи поверхности тела на расстоянии порядка нескольких длин свободного пробега молекул имеется область, в которой макропараметры газа изменяются на свою величину. Если размеры ячеек во всей области течения меньше длины свободного пробега молекул, то потребная память ЭВМ при уменьшении числа Кнудсена ϵ увеличивается как ϵ^{-p} , где p — размерность задачи. При этом время расчета увеличивается примерно как $\epsilon^{-(p+1)}$. Если размеры ячеек выбирать в соответствии с локальным градиентом макровеличин, т. е. во внешней области в соответствии с характерным масштабом длины L , то число молекул, расположенных в них, с уменьшением ϵ будут возрастать по закону $\sim \epsilon^{-p}$, а время решения задач — по $\sim \epsilon^{-(2p+1)}$! (Для схемы организации столкновений по Бёрду [6] время решения меняется как $\epsilon^{-(p+1)}$.)

Приведенные оценки показывают, что применение метода прямого статистического моделирования в области малых чисел Кнудсена ограничено памятью и быстродействием существующих ЭВМ. Подобные вопросы и проблемы, связанные со сходимостью, имеют место и для других численных методов решения уравнения Больцмана. Например, при решении модельных кинетических уравнений (БГК и S -модели) методом интегральных итераций в области малых чисел Кнудсена скорость сходимости итерационного процесса порядка ϵ^2 [3]. В силу этого обстоятельства изменение макровеличин от итерации к итерации может сравниться с величиной погрешностей. Это означает, что практически получить решение таким способом не удастся по причине локальности метода интегральных итераций: изменения макропараметров в некоторой точке распространяются за одну итерацию на область, имеющую размер порядка длины свободного пробега молекул. Выход найден в привлечении уравнений сохранения на промежуточных итерациях, в которых определенным образом в тензоре напряжений и векторе потока тепла выделяются их главные асимптотические выражения. Последовательное использование метода интегральных итераций и уравнений сохранения с выделенными асимптотическими членами приводит к тому, что в процессе итераций макропараметры газа реагируют на изменение граничных условий сразу на расстояниях, определяемых гидродинамическим масштабом течения. На основе этого метода удалось решить большое количество различных задач [3]. К недостаткам такого подхода следует отнести и трудности, связанные с решением уравнений типа Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса.

В связи с тем что метод интегральных итераций можно модифицировать для решения задач динамики разреженного газа при малых числах Кнудсена, возникает аналогичный вопрос и для метода прямого статистического моделирования. Этот модифицированный метод должен быть пригоден для расчета стационарных течений газа с областями, которые описываются различными уравнениями (Эйлера, Навье — Стокса, Больцмана), и для использования на существующих ЭВМ. Покажем, что такая модификация возможна. В основе предлагаемого подхода лежит та же идея сделать метод нелокальным, что и в указанном выше методе решения модельных кинетических уравнений.

2. Для наглядного изложения подхода рассмотрим известную одномерную задачу о сильной перекоонденсации газа между двумя плоскопараллельными пластинами, расположенными на расстоянии L друг от друга (фиг. 1) [10, 11].

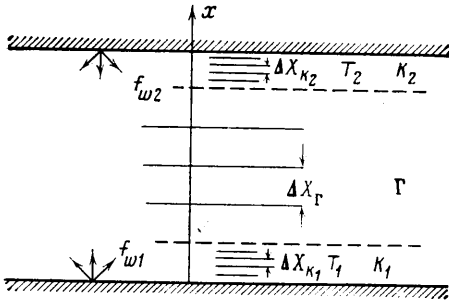
Необходимо решить стационарное уравнение Больцмана (1.1) ($\partial f/\partial t = 0$) с граничными условиями на поверхностях

$$f_{w1} = f(\xi_x > 0, \xi_y, \xi_z, x=0) = (a_1 n_{ev1} + n_{r1}) (h_1/\pi)^{3/2} \exp(-h_1 \xi^2)$$

$$f_{w2} = f(\xi_x < 0, \xi_y, \xi_z, x=L) = (a_2 n_{ev2} + n_{r2}) (h_2/\pi)^{3/2} \exp(-h_2 \xi^2)$$

$$h_i = m/2kT_i, \quad i=1, 2; \quad p_{ev} = n_{ev} kT = A \exp(-q/kT)$$

Здесь a_i — коэффициент испарения; T_i , $n_{ev i}$ и $n_{r i}$ — температура ($T_1 > T_2$), плотность насыщенного пара и плотность отраженных молекул i -й поверхности;



Фиг. 1

q — теплота перехода. При решении задачи параметры $n_{ev i}$, T_i , a_i заданы, а давление насыщенного пара меняется с температурой по экспоненциальному закону [12]. Требуется исследовать картину течения при малых значениях числа Кнудсена $\epsilon = (\sqrt{2} \sigma n_{ev1} L)^{-1}$. В задаче использовалась модель молекул газа «твердые сферы».

Аналогичная задача решалась при малых числах Кнудсена на основе модельного кинетического уравнения (S -модели) в [13]. Решение поставленной задачи методом прямого статистического моделирования при $\epsilon \geq 0,1$ не вызывает затруднений.

При малых числах Кнудсена около поверхностей образуются тонкие кнудсеновские слои K_1 и K_2 (фиг. 1) толщиной несколько длин свободного пробега $\delta_{1,2} \sim \epsilon L$. В режиме сильного испарения ($M = O(1)$) уравнения, описывающие течение газа в гидродинамической области, различны [13]. Например, при $M \rightarrow 1 = O(1)$ течение описывается уравнениями Эйлера, при $M \rightarrow 1$ необходимо использовать уравнения Навье — Стокса. Размер внешней области в обоих случаях порядка $L \gg l$. Непосредственное применение метода прямого статистического моделирования на внешнюю гидродинамическую область течения приводит к трудностям, которые обсуждались выше.

3. Рассмотрим сначала более простой случай, когда внешнее течение невязкое с локально-максвелловской функцией распределения молекул по скоростям.

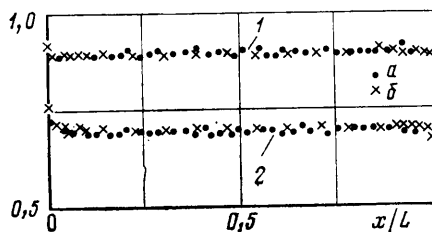
Как сказано выше, в основе метода прямого статистического моделирования лежит идея о расщеплении физического процесса на два этапа: свободный перелет и релаксацию [8, 9].

При выводе схемы расщепления используется малость изменения функции распределения молекул в пределах рассматриваемой ячейки и на временном интервале Δt . Характерными пространственными и временными масштабами изменения функции распределения в гидродинамической области являются L и $\theta \sim L/u \sim L/a$, где a — скорость звука, в кнудсеновском слое $l \ll L$ и $\tau \ll \theta$. Требование, налагаемое на размер ячеек и величину контрольного времени Δt , состоит в том, что изменение функции распределения на размерах ячеек и на смещениях молекул при свободном перелете за контрольное время Δt , разных для различных областей, должно быть малой величиной одного порядка. В силу сказанного выше размер ячеек в гидродинамической области Δx_r и величина контрольного времени Δt_r могут быть существенно больше соответствующих величин Δx_k , Δt_k

в кнудсеновских слоях. При выполнении первого этапа — свободного перелета — в случае пересечения молекулой некоторой выбранной границы, разделяющей области с различными масштабами, необходимо осуществлять перенормировку оставшегося невыработанного контрольного времени в новый временной масштаб.

Рассмотрим второй этап — релаксацию. В кнудсеновских слоях никаких изменений в методе прямого статистического моделирования нет, так как $\Delta x_k \ll l$, $\Delta t_k \ll \tau$ и релаксация осуществляется указанным выше способом.

В эйлеровской области необходимо осуществлять максвеллизацию скоростей молекул в ячейке. Поскольку функция распределения молекул после столкновений известна, молекулы можно не сталкивать, а скорости находить путем розыгрыша по максвелловской функции распределения [14, 15]. При таком подходе нарушается консервативность метода: сумма импульсов и энергий молекул в ячейках до и после розыгрыша скоростей не совпадают. Поскольку фактором работоспособности метода, при модификации метода прямого статистического моделирования важно сохранить консервативность метода на микроскопическом уровне.



Фиг. 2

консервативность является важным фактором работоспособности метода, при модификации метода прямого статистического моделирования важно сохранить консервативность метода на микроскопическом уровне.

Известно, что максвеллизация функции распределения осуществляется на нескольких временах свободного пробега молекул [1] и для практических целей достаточно, чтобы каждая молекула в среднем испытала 3–5 столкновений. Поскольку в разбираемом случае конечное состояние на этапе релаксации фиксируется (n , T , u — не меняются) максвелловским распределением, путь, по которому оно достигается, не важен. Простейшая схема релаксации, использованная в настоящей работе, состоит в выполнении следующих действий: 1) случайным способом выбираются номера молекул i, j ; 2) молекулы сталкиваются и их скорости после столкновения находятся по формулам (1.2); 3) процесс продолжается до тех пор, пока число столкновений молекул в ячейке с номером s не достигнет величины $0,5rN_s$ ($N_s - 1$). Здесь N_s — текущее число молекул в ячейке с номером s , $r(N_s - 1)$ — число, имеющее смысл среднего числа столкновений одной молекулы. Величина r в процессе решения задается и может зависеть от градиента макропараметров. В области больших градиентов значение r должно быть больше.

В [6] для схемы Бёрда предлагается иной метод максвеллизации — путем регулирования сечений столкновений, причем в эйлеровской зоне нет необходимости вычислять все столкновения, достаточно проводить их столько, чтобы течение было равновесным. В алгоритме Бёрда [6] это можно осуществить, уменьшая сечение столкновений. При этом условие прекращения столкновений [5, 6] даст меньшее число столкновений по сравнению с тем, что имеет место в реальном случае, но достаточное для установления равновесного состояния. Предложенный алгоритм проще и в большей степени отражает физику явления: максвеллизация тем быстрее, чем больше сечение столкновения. Здесь не производится проверка — столкнутся или нет рассматриваемые две молекулы, а сразу производится столкновение, что фактически означает $P_{ij} = 1$.

Для указанного алгоритма машинное время на этапе релаксации практически не зависит от числа Кнудсена, а определяется лишь величинами r и N_s . Число молекул во внешних ячейках то же, что и в кнудсеновском слое. Расчет всего поля течения можно осуществлять при любом числе Кнудсена ϵ с фиксированным числом молекул во всей расчетной области, не зависящим от ϵ .

Заметим, что выше фактически изложена схема решения уравнений Эйлера методом прямого статистического моделирования. На границах обтекаемого тела в этом случае на функцию распределения отлетающих от тела молекул надо ставить условие зеркального отражения.

Задача о сильной перекоонденсации решалась численно указанным выше способом в нетрансзвуковом режиме течения, когда во внешнем течении $M=O(1)$ и $M-1=O(1)$. Результаты расчетов приведены на фиг. 2 (кривые $1-\zeta=T/T_1$, $2-\eta=n/n_{ev1}$). Параметры течения: $\varepsilon=10^{-2}$; $T_2/T_1=0,8$; $\beta=4,0$; $a_1=a_2=1,0$.

Точками *a* представлены результаты расчета на основе метода прямого статистического моделирования с размером ячеек и контрольным временем, меньшим средней длины и времени свободного пробега молекул. Точки *b* — результаты расчета на основе описанной выше методики. Толщины кнудсеновских слоев вблизи поверхностей пластин полагались равными $\delta_{1,2}=10l_1=10(\sqrt{2}n_{ev1}\sigma)^{-1}$, размер ячеек в них выбирался меньше длины свободного пробега молекул: $\Delta x_{k1}=l_1/3$, $\Delta x_{k2}=l_1/2$. Во внешней области бралось 10 ячеек. Перелет в ней осуществлялся на временах $\Delta t_\Gamma \gg \Delta t_k$, релаксация производилась по описанной выше схеме. Сравнение приведенных результатов показывает их хорошее соответствие. Расчеты с другими значениями параметров дали также хорошее соответствие результатов. При уменьшении числа Кнудсена ε происходит пропорциональное уменьшение толщины кнудсеновских слоев около пластин. При этом потребная память и время счета практически не меняются.

Когда число Маха стремится к единице, указанная схема перестает работать, так как на течение во внешней гидродинамической области начинает оказывать влияние вязкость газа [13]. Для этого случая предлагается модифицировать метод прямого статистического моделирования следующим образом.

Внутри кнудсеновских слоев метод остается неизменным. Во внешней, гидродинамической области первый этап — свободный перелет — осуществляется за контрольное время $\Delta t_\Gamma > \Delta t_k$, как и в предыдущем случае. Вся трудность заключается в реализации релаксации на временном интервале $\Delta t_\Gamma > \tau$. Действительно, непосредственная подстановка в P_{ij} вместо Δt величины $\Delta t_\Gamma > \tau$ приводит к нарушению условия применимости указанного алгоритма ($\Delta t \ll \tau$).

Обратимся поэтому к основной идее этапа релаксации в методе прямого статистического моделирования — моделированию частоты столкновения молекулы или числа столкновений, испытанных молекулой за контрольное время Δt . Чтобы осуществить процесс релаксации на временном интервале Δt_Γ , надо правильно смоделировать статистику и число столкновений, которое испытает молекула за это время. Число столкновений молекулы является аддитивной величиной времени. Поэтому разбиваем Δt_Γ на сумму m_i одинаковых временных интервалов $\Delta t_\Gamma^{(1)}$ таких, что $\Delta t_\Gamma^{(1)} \ll \tau$. Тогда на каждом интервале $\Delta t_\Gamma^{(1)}$ можно смоделировать статистику и число столкновений молекулы, используя выражение для P_{ij} с $\Delta t = \Delta t_\Gamma^{(1)}$. Применяя указанную процедуру последовательно m_i раз, осуществляем моделирование этапа релаксации на интервале Δt_Γ .

Процесс прямого статистического моделирования на масштабах, превышающих кинетические (τ , l), сводится, таким образом, к последовательным этапам: свободному перелету за контрольное время Δt_Γ , выбранному в соответствии с внешним масштабом, и релаксации, осуществляемой с мелким шагом $\Delta t = \Delta t_\Gamma^{(1)} \ll \tau$ для того, чтобы правильно смоделировать статистику и частоту столкновений молекул. Указанная схема моделирования может применяться для расчета течений, описываемых как уравнениями Эйлера, так и Навье — Стокса.

Аналогично можно модифицировать этап релаксации в гидродинамической области и для других алгоритмов моделирования частоты столкно-

вений. Время решения задачи указанным способом меняется с числом Кнудсена как ε^{-1} и эта зависимость от ε — одна и та же для задач различной размерности. Расчет можно проводить при фиксированном числе молекул во всей области течения, как и в предыдущем варианте. Напомним, что время решения задачи о переконденсации обычным методом прямого статистического моделирования (с размером ячеек и величин контрольных времен меньше, чем длина и время свободного пробега молекул) меняется как ε^{-2} . Потребная память ЭВМ при этом растет с уменьшением ε как ε^{-1} .

Отметим одно свойство предлагаемого метода прямого статистического моделирования. Вероятность столкновения P_{ij} двух молекул i, j зависит от сечения столкновения моделирующих молекул σ_m . Условие совпадения в ячейке частот столкновений моделирующих и реальных молекул приводит к условиям на сечения моделирующих молекул по разным областям:

$\sigma_m^{(d)} / \sigma_r = n_{*r}^{(d)} / n_{*m}^{(d)}$. $d = K_1, \Gamma, K_2$. Индекс d относится к соответствующим областям течения, величина $n_{*}^{(d)}$ — средняя плотность молекул по области d . Поскольку средние плотности моделирующих молекул по разным областям различны, то различными по областям будут и их сечения:

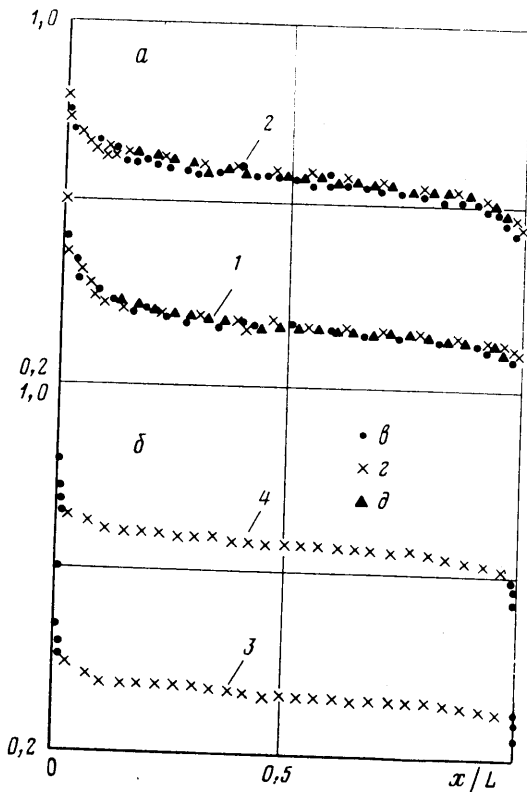
$\sigma_m^{(K_1)} \sim \sigma_m^{(K_2)} \sim \varepsilon \sigma_m^{(\Gamma)}$. Поэтому при перелете молекул через границы, отделяющие различные области друг от друга, меняется их сечение. Процесс вычисления макропараметров осуществляется по каждой области независимо усреднением по времени вдоль траекторий молекул, пересекающих ячейку. Процесс усреднения осуществляется в соответствующем данной области временном масштабе.

Задача о сильной переконденсации решалась указанным способом также в режиме трансзвукового течения газа $M \rightarrow 1$ ($T_2/T_1 \rightarrow 0$). На фиг. 3, *a, б* представлены результаты расчета течения при числах $\varepsilon = 10^{-2}$ (*a*) и 10^{-3} (*б*) ($1, 3 - \eta; 2, 4 - \zeta$); когда вторая пластина не испаряется. Параметры $a_1 = a_2 = 1, 0$. Точками *в* представлены данные, полученные по обычной методике прямого статистического моделирования, точками *г* и *д* — по описанной выше. Размер области кнудсеновских слоев около пластин $\delta_{1,2} = 10l$. Во внешней области при $\varepsilon = 10^{-2}$ бралось 10 (*г*) и 20 (*д*) ячеек при $\varepsilon = 10^{-3}$ — 50 ячеек. Из приведенных результатов видно, что во внешней гидродинамической области имеется градиент макровеличин, обусловленный, как уже отмечалось, влиянием вязкости. Хорошее количественное соответствие результатов доказывает правильность предложенной модификации метода прямого статистического моделирования.

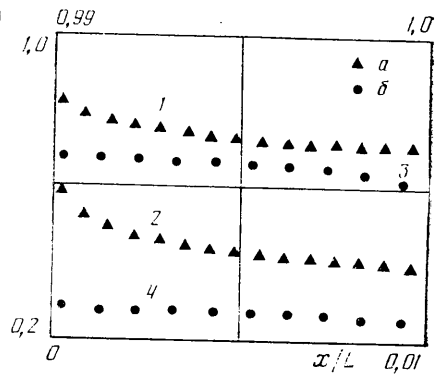
Указанная схема моделирования может использоваться и на рассмотренном выше (фиг. 2) режиме течения. Однако в этом случае ее невыгодно использовать, так как время счета задачи увеличивается с уменьшением числа Кнудсена как ε^{-1} . Использование алгоритма моделирования максвелловской функции распределения, в котором не учитывается статистика столкновений, существенно более экономично.

Структура кнудсеновских слоев около пластин приведена на фиг. 4. Точки *a* относятся к испаряющейся пластине, точки *б* — к конденсирующей ($2, 4 - \eta; 1, 3 - \zeta$).

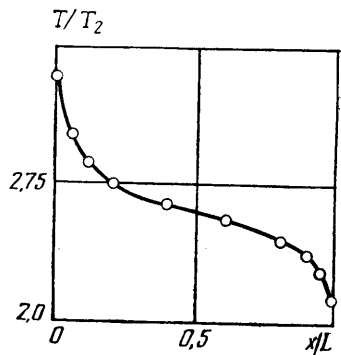
Сравним теперь результаты, полученные на основе S — модельного кинетического уравнения [13] для режима трансзвуковой конденсации, с результатами, которые получаются для уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования. На фиг. 5 сплошной кривой дан профиль температуры T/T_2 при $\varepsilon = 1,17 \cdot 10^{-2}$, $T_1/T_2 = 4,0$, $\beta \rightarrow \infty$ (в [13] введен параметр K , соответствующий данному численному значению ε при $K = 10^{-2}$). Коэффициенты переноса, получаемые для данного S -модельного уравнения, соответствуют коэффициентам переноса для модели молекул «твердые сферы». Здесь же представлены точки, полученные на



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

основе решения уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования для твердых сфер. Результаты, полученные на основе разных уравнений, совпадают.

4. Остановимся на вопросе о том, к каким задачам применим указанный подход. Отметим, что для режима слабой перекоандсации или в задаче о теплопередаче между двумя плоскопараллельными пластинами во внешней области размер ячеек нужно выбирать меньше длины свободного пробега молекул. Поэтому эти задачи при малых числах Кнудсена следует решать обычным методом прямого статистического моделирования.

Действительно, функция распределения молекул, влетающих в область кнудсеновских слоев, вычисляется с ошибкой $\sim O(\Delta x_T/L)$, а навье-стоксовская добавка к функции распределения, которая определяет характер течения во внешней области, имеет порядок $O(\varepsilon)$. Если ошибка, с которой вычисляется функция распределения влетающих в кнудсеновский слой молекул, будет больше навье-стоксовской добавки, то в кнудсеновском слое будет решаться задача с неправильной асимптотикой, определяемой ошибкой $O(\Delta x_T/L)$. Последнее приводит к тому, что в кнудсеновском слое параметры определяются с ошибкой, которая тем больше, чем больше толщина этого слоя. Контрольные расчеты подтверждают эти выводы.

Поэтому для класса задач, в которых градиенты макропараметров во внешней области течения и в кнудсеновских слоях одного порядка, следует при уменьшении числа Кнудсена уменьшать размер ячеек и величину контрольного времени во внешней области. В кнудсеновских слоях это делается автоматически, так как толщина слоя выбирается пропорциональной числу Кнудсена. Толщина пограничного слоя изменяется пропорционально $\varepsilon^{1/2}L$, здесь уменьшение размера ячеек при их фиксированном числе осуществляется автоматически с уменьшением ε .

Важный момент — это распространение указанного подхода на задачи с большей размерностью. Поскольку в настоящее время нет конкретных численных примеров, подтверждающих справедливость рассматриваемого нами подхода, то ограничимся замечаниями о модификации метода в этом случае. Первое — это наличие нескольких пространственных масштабов. Например, при расчете поля течения около пластины при числе Маха набегающего потока $M_\infty = O(1)$ ($M_\infty < 1$) можно выделить области течений в кнудсеновском слое, в пограничном слое на пластине и в следе за ней, и область невязкого эйлеровского течения. При этом в пограничном слое характерные размеры в продольном и поперечном направлениях различны. Это приводит к

тому, что как размер ячеек, так и контрольные времена, на которых осуществляется перелет молекул в соответствующих направлениях, могут выбираться различными в соответствии с продольными и поперечными масштабами.

К настоящему времени решение задач на основе метода прямого статистического моделирования с различными пространственными размерами ячеек осуществлялось с единым контрольным временем для всего поля течения [6–8]. Если величина контрольного времени выбирается по большему масштабу, то возникает ошибка при вычислении в областях с меньшим масштабом (размазывание ударной волны, например). Если контрольное время выбирается по меньшему масштабу, то, как было отмечено выше, увеличивается потребная память и время расчета на ЭВМ. Введение различных пространственных и временных масштабов позволяет существенно ослабить требования, налагаемые на время решения и память ЭВМ.

Предложенный подход для решения стационарных задач динамики разреженных газов является по существу методом установления в различных пространственных и временных масштабах. Отметим, что зависимость от времени не следует реальному нестационарному процессу. Существенно, что установление в различных областях происходит в соответствующем масштабе с одновременной подстройкой решений в разных областях за счет перелетающих из одной области в другую молекул. Предложенный подход для решения стационарных задач путем установления в соответствующем временном масштабе можно использовать и при решении других уравнений с малыми параметрами, которые допускают выделение различных пространственных и временных масштабов.

Отметим аналогию между методом решения модельных кинетических уравнений при малых числах Кнудсена [3] и данным подходом. В обоих подходах осуществляется выход во внешний масштаб, но делается он по-разному. В [3] это осуществляется за счет выделения в уравнениях сохранения асимптотически главных членов в выражениях для тензора напряжений и вектора потока тепла, которые определяют характер распространения возмущений и гидродинамическом режиме течения и обеспечивают нелокальность итерационного процесса. В данном подходе эта нелокальность достигается непосредственно переходом к соответствующему временному масштабу установления течения в данной области.

Автор выражает благодарность В. С. Галкину, М. Н. Когану, Н. К. Макашеву за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967, 440 с.
2. Шахов Е. М. Метод аппроксимации кинетического уравнения Больцмана. — В сб.: Численные методы в теории разреженных газов. М.: ВЦ АН СССР, 1969, с. 84–118.
3. Бишаев А. М., Рыков В. А. Решение стационарных задач кинетической теории газов при умеренных и малых числах Кнудсена методом итераций — В сб.: Численные методы в динамике разреженных газов. Вып. 2. М.: ВЦ АН СССР, 1975, с. 19–34.
4. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Численные методы в динамике разреженного газа. — Тр. IV Всесоюз. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. М.: ЦАГИ, 1977, с. 101–183.
5. Bird G. A. Direct simulation and the Boltzmann equation. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, № 11, p. 2676–2681.
6. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. 319 с.
7. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1975, ч. 1, т. 15, № 5, с. 1195–1209; ч. 2, 1975, т. 15, № 6, с. 1553–1567.
8. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
9. Nanbu K. Direct simulation scheme derived from the Boltzmann equation. I. Mono-component gases. — J. Phys. Soc. Japan, 1980, v. 49, № 5, p. 2042–2049.
10. Черемисин Ф. Г. Движение разреженного газа между бесконечными плоскопараллельными эмитирующей и поглощающей поверхностями. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2, с. 176–178.
11. Макашев Н. К. Сильная переконденсация в одно- и двухкомпонентном разреженном газе при произвольном значении числа Кнудсена. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 5, с. 130–138.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.
13. Бишаев А. М., Рыков В. А. Переконденсация одноатомного газа при малых числах Кнудсена. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1978, т. 18, № 3, с. 709–717.
14. Перепухов В. А. Решение методом Монте-Карло модельного кинетического уравнения. — Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 4, с. 114–117.
15. Pullin D. I. Direct simulation methods for compressible inviscid ideal-gas flow. — J. Comput. Phys., 1980, v. 34, № 2, p. 231–244.

Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1985