

УДК 533.6.011.5

СРАВНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ФОРМЫ ПРОФИЛИРОВАННЫХ КОНТУРОВ СОПЕЛ ЛАВАЛЯ С «ПЛАВНЫМ» И С «ВНЕЗАПНЫМ» СУЖЕНИЯМИ

КРАЙКО А. Н., ТИЛЛЯЕВА Н. И., ЩЕРБАКОВ С. А.

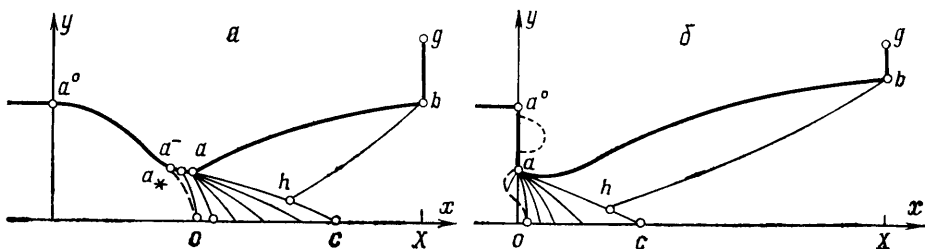
В приближении идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа исследуется влияние на интегральные характеристики и на форму профилированных сверхзвуковых частей плоских и осесимметричных сопел Лавалья выбора образующей их дозвуковых участков. Сравниваются сопла с «плавным входом» и с «внезапным сужением» при одинаковых расходах и габаритных ограничениях на все сопло, а не только на его сверхзвуковую часть. В такой постановке, согласно [1], у сопел с внезапным сужением при течении в них идеального газа следует ожидать лучшие характеристики. Это подтверждается результатами выполненных расчетов.

1. Рассмотрим плоское симметричное или осесимметричное сопло, прилегающее к полубесконечному цилиндрическому каналу, как показано на фиг. 1. Здесь x, y — декартовы или цилиндрические координаты, a° — точка стыковки цилиндрического канала и сужающегося участка сопла, X — его общая длина. На фиг. 1, a изображено сопло с плавным входом, а на фиг. 1, b — с внезапным сужением. Контуры сопел содержат заданные участки $a^\circ a$, профилируемые участки ab и в общем случае торцы bg , где $x=X$. Ограничимся случаем, когда торец — участок краевого экстремума, появляющийся в задаче профилирования из-за ограничения на длину сопла, — газом не обтекается и действующее на него известное давление p^+ не зависит от формы сопла. Штрихами на фиг. 1 показаны звуковые линии (ЗЛ). Тонкие сплошные кривые — характеристики: «предельная» c^- -характеристика $a^\circ o$, приходящая в «центр сопла» на фиг. 1, a , c^- -характеристики пучка волн разрежения, образующегося при обтекании излома в точке a , и так называемая замыкающая c^+ -характеристика hb .

В задаче профилирования контура ag , примыкающего к заданной образующей $a^\circ a$, излом в a при отсутствии ограничений на кривизну контура появляется, как известно [1, 2], из-за того, что здесь a — точка стыковки заданного (слева от нее) и искомого (справа) участков $a^\circ g$. При этом излом в a может быть и «сверхзвуковым» (фиг. 1, a — поток с обеих сторон от излома сверхзвуковой), и «звуковым» (фиг. 1, b — из a выходит ЗЛ). В задаче профилирования всего сопла, реализующего максимум тяги R при фиксированных p^+ , расходе G и габаритах, по той же причине возникает излом в a° . В такой постановке, согласно [1], профилируемый участок в общем случае имеет еще и внутренний излом, который обязательно должен быть звуковым, как на фиг. 1, b .

Пусть габаритные ограничения на поперечные размеры сопла имеют вид $0 \leq x \leq X$, т. е. оно ограничено и справа ($x \leq X$) и слева ($0 \leq x$ — запрещено «заглубление») контура сопла в цилиндрический канал). Тогда не исключено, что оптимальная образующая $a^\circ g$ содержит участок краевого экстремума $a^\circ a$, как показано на фиг. 1, b . С другой стороны, в подобной постановке оптимальное сопло может, вообще говоря, иметь углубления типа изображенного на фиг. 1, b пунктиром. Вне зависимости от того, нужны или нет такие углубления, сравнение конфигураций с плавным входом и с внезапным сужением представляет интерес. Более того, если из-за эффектов всегда существующей (хотя, возможно, и малой) вязкости при наличии углублений в них реализуются течения с замкнутыми линиями тока, то даже в пренебрежении трением тяга этих сопел вряд ли может заметно превосходить тягу сопла с внезапным сужением.

В силу сказанного далее для краткости сопла с внезапным сужением условимся называть «оптимальными», а с плавным входом — «неоптимальными».



Фиг. 1

Профилирование участков ab сравниваемых сопел включает расчет смешанного, т. е. до-, транс- и сверхзвукового течения, ограниченного справа замыкающей c^- -характеристикой ac пучка волн разрежения. Этот расчет проводится в несколько этапов. Сначала с помощью специальной разностной схемы, называемой далее схемой Годунова — Колгана (СГК), в процессе установления на адаптированной к рассчитываемой конфигурации разностной сетке строится стационарное течение в области, заведомо содержащей ЗЛ и всю влияющую на нее «минимальную подобласть» сверхзвукового потока. В случае фиг. 1, a указанная подобласть ограничена справа предельной характеристикой a^-o , а в случае фиг. 1, $б$ — характеристикой ao . Не вдаваясь в подробности, заметим, что СГК представляет собой обобщение на произвольные сетки модификации В. П. Колгана [3] известной разностной схемы С. К. Годунова [4]. Основным достоинством СГК является аппроксимация уравнений течения на произвольных нерегулярных сетках. Данное свойство особенно существенно для расчета сопел со звуковым изломом (фиг. 1, $б$). Здесь качественный расчет без использования нерегулярных сеток, часть сеточных линий которых сгущается в излом, просто невозможен.

В рассматриваемых задачах, где часть контура (слева от a) задана, а часть строится в процессе решения, для расчета области сверхзвуковых скоростей естественно и наиболее оправдано применение классической схемы метода характеристик (МХ). При этом в силу более высокой точности МХ по сравнению с СГК целесообразно использовать минимум информации, получаемой по СГК в процессе установления. Ниже в качестве такого минимума бралась зависимость на ЗЛ угла наклона $\vartheta \equiv \vartheta_*$ вектора скорости к оси x от одной из координат. Эта зависимость корректировалась затем в соответствии с известными аналитическими решениями. Указанной информации достаточно для того, чтобы по ней с помощью МХ рассчитать все сверхзвуковое течение и построить контур ab . Одновременно вновь строится и ЗЛ, что служит одним из критериев оценки точности результатов счета.

Для сопла фиг. 1, a ϑ_* не зависит от формы стенки справа от точки a^- , а тем более — справа от a . Поэтому здесь в расчете по СГК действительная образующая с изломом в a заменялась гладким контуром. Слева от точки a он совпадал с исходным, а справа состоял из плавно сопрягающихся отрезков окружности, радиус которой был взят равным радиусу кривизны стенки при $x \rightarrow x_a - 0$, и прямой. По этой причине в данном случае расчет можно вести и на равномерной сетке. Однако и здесь сгущение поперечных сеточных линий к минимальному сечению, а для осесимметричных сопел — продольных линий к стенке (разбиение по «закону равных площадей»), обеспечивает в рамках СГК на менее густых сетках несоизмеримо большую точность, чем схема С. К. Годунова. Необходимая информация о реализации СГК и примеры, иллюстрирующие ее возможности, приведены в [5, 6].

Упомянутая выше корректировка ϑ_* состояла в замене на присоединенном участке ЗЛ угла ϑ , найденного по СГК, распределением $\vartheta = \vartheta_*(y)$, следующим из автомодельных решений [7, 8]. Последние, как оказалось, справедливы не только вблизи «центра сопла» o — точки пересечения ЗЛ с осью x , но и на значительных расстояниях от него, где угол ϑ_* тем не менее еще мал и, как следствие этого, велики погрешности его определения любым численным методом (в том числе и СГК). При этом константа в автомодельном распределении $\vartheta_*(y)$ определялась по данным СГК

в некоторой промежуточной точке ЗЛ. На части ЗЛ выше нее угол θ_* при счете МХ в точках, отличных от точек разностной сетки СГК, находился квадратичной интерполяцией. Исключение — отрезок ЗЛ, примыкающий на фиг. 1, б к точке a . На нем интерполяция θ_* выполнялась с учетом решения [9], справедливого вблизи звукового излома.

Интенсивность пучка волн разрежения, а следовательно, его граничная c^- -характеристика ac , положение точки h на ней и замыкающая c^+ -характеристика hb определяются необходимыми условиями максимума R , которые имеют вид [1, 2]

$$y^* \rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \theta = \text{const}$$

$$\Phi = [2(p^+ - p) + \rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin 2\theta]_b = 0 \quad (y_b < Y) \quad (1.1)$$

$$\Phi < 0 \quad (y_b = Y)$$

Здесь и далее $v=0$ и 1 в плоском и осесимметричном случаях соответственно; ρ , p и V — плотность, давление и модуль скорости; α — угол Маха; Y — максимально допустимая величина y ; нижний индекс приписывается параметрам в соответствующей точке. Первое равенство из (1.1) вместе с условием совместности для c^+ -характеристик и интегралами энергии и энтропии позволяет (при выбранной точке h на ac) построить характеристику hb , а из условия равенства расходов, протекающих через отрезки ah и hb , найти ее концевую точку b . Два произвола в выборе ac и точки h используются для того, чтобы при $x_b = X$ удовлетворить второму или третьему условию (1.1), которые определяют y_b . После того как характеристика hb построена, контур сопла ab находится как выходящая из a линия тока течения, которое определяется решением задачи Гурса с данными на характеристиках ah и hb . Не останавливаясь на дальнейших деталях, в частности на дополнительных условиях, имеющих вид неравенств, которые должны выполняться на hb и в точке b (во всех приводимых ниже примерах эти условия выполнялись), перейдем к результатам расчетов.

2. Как уже отмечалось, сравнение «оптимальных» и «неоптимальных» сопел проводилось при одинаковых общей длине X , расходе G и давлении p^+ . Газ считался совершенным с постоянными теплоемкостями и показателем адиабаты κ . Поток на входе в сопло был незакрученным и однородным по энтропии и полной энтальпии. За масштабы плотности, скорости и давления брались ρ_*° , V_*° и $\rho_*^\circ (V_*^\circ)^2$, где ρ_*° и V_*° — размерные критические плотность и скорость. В силу этого для безразмерных критических параметров имеем: $\rho_* = V_* = 1$ и $p_* = 1/\kappa$. За характерный линейный размер l° в случае осесимметричных сопел был взят радиус минимального сечения неоптимального сопла. Контур указанного сопла состоял из плавно сопрягающихся отрезков окружности радиуса $r_* = 0,625$ с центром в точке $x = x_a = 2$, $y = 1,625$, прямой $dy/dx = -1$ и окружности радиуса $r = 1$, которая сопрягала указанную прямую с прямой $y = y_a = 2,327$ — образующей цилиндрической трубы (напомним, что $x_a = 0$). Оптимальные сопла примыкали к той же цилиндрической трубе и пропускали тот же расход. Последнее достигалось подбором ординаты точки излома a . В примерах, приводимых далее, $p^+ = 0$, что отвечает истечению в вакуум, а показатель адиабаты $\kappa = 1,4$. Результаты расчетов и сравнения осесимметричных сопел собраны в таблице.

Первые два столбца таблицы дают общую длину сопла X и длину x_a заданных «плавного» ($x_a = 2$) или «неплавного» ($x_a = 0$) начальных участков. Далее следует коэффициент расхода μ — отношение расхода в данном сопле к расходу равномерного звукового потока через трубу радиуса y_a . Следующие шесть столбцов содержат геометрические параметры, дающие представление о профилируемых участках сравниваемых сопел. Это ордината точки a и $\zeta_{a+} = \operatorname{tg} \theta_{a+}$ — величина, характеризующая наклон контура в a сразу после излома, координаты x_m и y_m точки минимального сечения сопла (для неоптимальных сопел точки m и a совпадают), y_b — орди-

X	x_a	μ	y_a	ζ_{a+}	x_m	y_m	y_b	ζ_b	I_*	χ	R	ΔR
7	2	0,982	1,00	0,39	0,0	1,00	2,76	0,22	1,722	0,395	2,117	0,00
7	0	0,839	1,08	-0,45	0,1	1,06	2,76	0,12	1,730	0,421	2,150	1,56
7	0	0,839	1,08	-0,33	0,1	1,06	3,37	0,20	1,730	0,436	2,165	2,26
12	2	0,982	1,00	0,45	0,0	1,00	4,33	0,17	1,722	0,491	2,213	0,00
12	0	0,839	1,08	-0,35	0,1	1,06	4,33	0,12	1,730	0,498	2,227	0,66
12	0	0,839	1,08	-0,29	0,1	1,07	4,85	0,16	1,730	0,502	2,231	0,83
17	2	0,982	1,00	0,48	0,0	1,00	5,72	0,15	1,722	0,533	2,254	0,00
17	0	0,839	1,08	-0,31	0,1	1,07	5,72	0,12	1,730	0,533	2,263	0,37
17	0	0,839	1,08	-0,26	0,1	1,07	6,20	0,14	1,730	0,535	2,264	0,43
22	2	0,982	1,00	0,51	0,0	1,00	7,01	0,14	1,722	0,557	2,278	0,00
22	0	0,839	1,08	-0,28	0,1	1,07	7,01	0,12	1,730	0,554	2,284	0,24
22	0	0,839	1,08	-0,24	0,1	1,07	7,44	0,13	1,730	0,555	2,284	0,27

ната точки b , и, наконец, $\zeta_b = \operatorname{tg} \vartheta_b$, где ϑ_b — угол наклона контура слева от точки b .

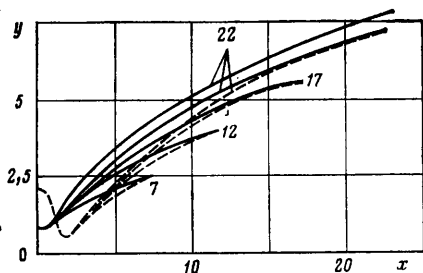
В таблице каждой длине X отвечают три сопла. Первое с $x_a=2$ — неоптимальное сопло с плавным входом. Для него ζ_{a+} положительно, т. е. сразу за изломом оно расширяется. Ординаты y_b таких сопел определялись вторым условием из (1.1) в предположении отсутствия ограничений на поперечный размер ($Y=\infty$). Для каждой длины X строилось по два оптимальных сопла: первое с Y , равным y_b неоптимального сопла той же длины, и второе, отвечающее $\Phi=0$, т. е. отсутствию ограничения на поперечные габариты. Во всех случаях y_b второго сопла больше, чем первого. Характерной особенностью профилируемых участков оптимальных сопел является то, что после излома в a их контуры сначала идут к оси x . При этом поток в минимальном сечении у стенки имеет весьма большую сверхзвуковую скорость (при дозвуковой скорости в том же сечении присоединительной части сопла).

В следующих столбцах таблицы приведены критический импульс I_* , интеграл сил давления χ , действующих на контур ab , и тяга R , которые определялись формулами

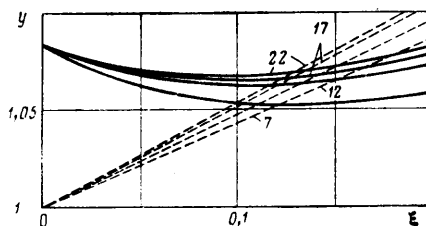
$$I_* = (1+\nu) \int_0^a (p + \rho u^2) y^* dy, \quad \chi = (1+\nu) \int_a^b y^* p dy, \quad R = I_* + \chi$$

Здесь u — x -компонента вектора скорости; интеграл от 0 до a вычисляется вдоль любой кривой, соединяющей эти точки (например, вдоль ЗЛ или предельной характеристики); интеграл от a до b берется вдоль образующей ab .

Сравнение характеристик сопел (μ , I_* , χ и R), полученных на разных сетках, а также другие способы контроля (включая проверку выполнения интегральных законов сохранения расхода и x -компоненты количества движения) показали следующее. Для неоптимальных сопел погрешности в определении μ , I_* , χ и R не превышают одну — две единицы четвертой цифры после запятой. Для сопел с внезапным сужением погрешности в μ , I_* и χ возрастают более чем на порядок (примерно до 0,2%), в то время как погрешность в R увеличивается до нескольких единиц той же (четвертой) цифры. Как будет видно из дальнейшего, достигнутый уровень точности (особенно в определении тяги R) обеспечивает достоверность сравнения сопел рассматриваемых типов. Это подтверждает последний столбец таблицы. В нем приведен относительный выигрыш (в процентах) ΔR . При определении ΔR разность тяг оптимального и неоптимального сопла относилась к тяге неоптимального сопла той же общей длины X . Хотя с ростом длины выигрыш, который обеспечивают оптимальные сопла,



Фиг. 2



Фиг. 3

убывает, он даже при $X=22$ на порядок превышает погрешности определения R .

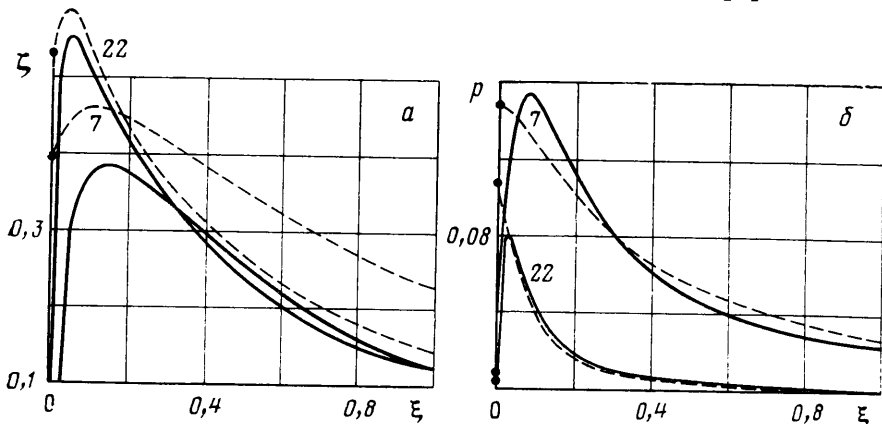
Таблица показывает, что преимущество оптимальных сопел обусловлено несколькими факторами. Во-первых, в согласии с выводами [10], рост «начальной» неравномерности потока в окрестности минимального сечения ведет к увеличению критического импульса (в [10] соответствующее утверждение доказано для удельного импульса $i_* = I_*/G$, однако при фиксированном расходе тот же вывод сохраняется и для I_* ; в [11] аналогичное утверждение доказано и для тяги сужающегося сопла). С другой стороны, специальные расчеты, выполненные для сопел с одинаковой длиной сверхзвуковой части $X^{sp} \geq 1$, показали что для таких X^{sp} начальная неравномерность при фиксированном расходе уменьшает χ больше, чем увеличивает I_* . Следовательно, вторым фактором является увеличение X^{sp} , которое при фиксированной общей длине для оптимального сопла достигается за счет ликвидации его сужающейся части. Важно подчеркнуть, что простого увеличения длины сверхзвуковой части здесь явно недостаточно. Нужно спрофилировать ее правильно. Этот момент иллюстрируют и уже обсуждавшиеся геометрические особенности контуров. Так, благодаря сужению на начальном участке сверхзвуковой части ab оптимальных сопел давление после падения в пучке волн разрежения до нескольких тысячных (при принятом способе обезразмеривания $p_* = 0,714$) повышается до величины порядка 0,1, причем, что особенно важно, в силу непрерывности параметров на hb без возникновения ударных волн слева от hb . Очевидно, что, если такой контур ab заменить расширяющимся контуром неоптимального сопла или сопла, построенного для равномерного потока в минимальном сечении, давление p_{a+} справа от излома упадет еще на несколько порядков, а последующее его повышение в общем случае будет сопровождаться скачками уплотнения.

Более того, из-за наличия вязкости в подобной ситуации безотрывное течение наверняка окажется невозможным. При этом в отрывной зоне, начинающейся за изломом, давление окажется близким к нулю, что в свою очередь приведет к существенному уменьшению χ , а вместе с χ — и R . Таким образом, профилируемую образующую ab сопел с внезапным сужением нельзя строить без учета неравномерности потока в трансзвуковой области, как, согласно [12, 13], можно делать для умеренных неравномерностей (в первую очередь по Φ), встречающихся в соплах с плавным сужением¹. Тем не менее и при правильном профилировании контура ab вопрос о предотвращении отрыва, как будет видно из дальнейшего, требует особого рассмотрения.

Дополнительную информацию о рассчитанных соплах дают фиг. 2—4. На фиг. 2 изображены контуры оптимальных (сплошные линии) и неоптимальных (штриховые) сопел, проходящих в одни и те же конечные точки, и одно оптимальное сопло (верхняя сплошная кривая), построенное без ограничений на поперечные габариты для $X=22$. Заметим, что при отсутствии ограничений на y оптимальные сопла во всех рассчитанных примерах имеют большую степень расширения (y_b), чем неоптимальные. Это коррелирует с большей длиной сверхзвуковых частей оптимальных сопел. Увеличение y_b дает дополнительный прирост R , который, однако, уменьшается (см. таблицу) от 0,72% для $X=7$ до 0,04% для $X=22$. На фиг. 3

¹ В [13] для упрощения расчета сопел с равномерным потоком в начальном сечении условие $M=1$ было заменено на $M=1,01$. Данная замена повлияла лишь на пятые значащие цифры в μ , I_* и i_* и не сказалась на выводе о слабом эффекте учета начальных неравномерностей и закрутки при профилировании расширяющихся частей сопел с плавным входом. В то же время на χ , R и R/μ переход от $M=1$ к $M=1,01$ сказался сильнее. В этой связи данные для R и R/μ 1, 3, 5 и 11-й строк таблицы из [13] следует заменить на 1,0716; 1,4248; 1,0694 и 1,1232.

в большем масштабе показаны начальные участки оптимальных и неоптимальных сопел, приходящих в одинаковые конечные точки. Цифры около кривых — значения X , для удобства сравнения по оси абсцисс отложено $\xi = x - x_a$. Для оптимальных сопел $x_a = 0$ и ξ совпадает с x . На фиг. 4, a и b для $X=7$ и 22 даны распределения вдоль ab величины $\zeta = \text{tg } \vartheta$ и давления. Как и ранее, сплошные (штриховые) кривые отвечают оптимальным (неоптимальным) соплам. Сравнимые сопла имели одинаковые точки b . Цифры около кривых — значения X . В отличие от фиг. 3 на фиг. 4 $\xi = (x - x_a) / X^{8p}$. В силу следующих из решения [9] особенностей течения в окрестности звукового излома и уже отмечавшейся непрерывности па-



Фиг. 4

раметров на hb можно показать, что $d\zeta/dx$ на ab при $x \rightarrow +0$ стремится к бесконечности (точнее, $\zeta = \zeta_{a+} + Ax^{7/2} + \dots$), а dp/dx — к конечной величине. Несмотря на это, для оптимальных сопел наблюдается очень большое «перерасширение» потока (на фиг. 4 точки дают значения p и ζ сразу за изломом), сопровождающееся затем весьма интенсивным ростом p . Для неоптимальных сопел, хотя $\zeta(\xi)$ ведет себя также немонотонным образом, давление вдоль ab непрерывно падает.

Рост давления на начальных участках сверхзвуковых частей сопел с внезапным сужением, впервые (для $\nu=0$) обнаруженный в [14] как следствие сильной начальной неоднородности потока в окрестности ЗЛ, требует специального обсуждения. Очевидно, что он может вызывать отрыв пограничного слоя. Возможность отрыва ведет к тому, что построенные в приближении идеального газа оптимальные конфигурации приходится рассматривать лишь как нереализуемый теоретический предел совершенства сопла. С другой стороны, уже в рамках такого приближения можно сформулировать условие недопустимости отрыва за изломом, потребовав, чтобы на контуре $a+b$ выполнялось неравенство

$$dp/dx \leq 0 \quad (2.1)$$

в котором dp/dx — полная производная от p вдоль образующей сопла. На самом деле (2.1) обеспечивает безотрывность течения с некоторым запасом, поскольку пограничный слой в состоянии преодолевать и умеренное возрастание давления. Постановка ограничения (2.1) в случаях, когда построенный в его отсутствие оптимальный контур не удовлетворяет указанному неравенству, ведет к двум существенным изменениям. Во-первых, теперь оптимальная образующая будет включать примыкающий к точке a_+ участок a_+d краевого экстремума, на котором $dp/dx=0$ или $p=p_{ad}$, с одновременным уменьшением начального излома, т. е. $|\vartheta_{a+}|$ или $|\zeta_{a+}|$. Из-за этого часть c^- -характеристик начального «пучка» волн разрежения будет выходить не из угловой точки, а с примыкающего к ней отрезка «свобод-

ной границы» $p = p_{ad}$. Во-вторых, из-за появления дополнительного условия, как всегда в задачах оптимального управления, произойдет уменьшение оптимизируемого функционала, т. е. R . Величина такого уменьшения, естественно, заранее неизвестна.

Полное решение задачи оптимального профилирования сверхзвуковой части сопла с учетом (2.1) требует дополнительного анализа, который может составить предмет специального исследования. Пока же для оценки возможного уменьшения R , связанного с условием (2.1), поступим следующим образом. Во всех рассчитанных выше примерах $p_{a+} \ll p_{**} \approx 0,047$, где p_{**} — «второе критическое» давление — значение p в изломе на c^- -характеристике, входящей в центр сопла. При введении условия (2.1) p вдоль $a_+ db$ не может возрастать. Поэтому давление p_{ad} , определяемое в процессе решения задачи, в согласии с фиг. 4, б должно быть порядка максимума кривых $p(\xi)$, т. е. $p_{ad} = (1,5-3)p_{**}$. В качестве промежуточного значения p_{ad} было взято $p_{ad} = p_{**}$, что примерно на порядок больше величины p_{a+} для сопел, характеристики которых собраны в таблице. Расчеты, выполненные для всех рассматривавшихся выше значений X , показали, что сопла с начальными участками постоянного давления $p_{ad} = p_{**}$ проигрывают оптимальным соплам, построенным без ограничения (2.1), не более 0,01%. Полученный результат позволяет надеяться, что и полный учет условия (2.1) при профилировании образующей ab не приведет к заметному уменьшению приведенных в таблице значений ΔR .

Результаты, аналогичные описанным выше, были получены и для плоских сопел. Не приводя столь же подробного их описания, заметим, что для тех же X и в плоском и в осесимметричном случаях по ΔR получаются близкие выигрыши. Например, при отсутствии ограничений на y и $p^+ = 0$ значения ΔR для плоских сопел с $X = 7, 12, 17$ и 22 оказались равными 2,1; 0,85; 0,47 и 0,3% соответственно. Как и ранее, эти цифры дают выигрыш по сравнению с неоптимальными плоскими соплами, длина плавного сужающегося участка которых $x_a = 2$. Не сильно отличаются от осесимметричных и такие геометрические характеристики плоских оптимальных сопел, как ζ_{a+} и y_b . В порядке возрастания X для тех же длин $\zeta_{a+} = -0,31; -0,25; -0,21$ и $-0,19$, а $y_b = 3,8; 5,8; 7,7$ и $9,4$. Сравнение данных значений с приведенными в таблице показывает, что у плоских сопел при лишь слегка меньших начальных изломах ордината точки b , напротив, оказывается больше, чем у осесимметричных сопел той же длины. Правда, несмотря на последнее обстоятельство, при фиксированной длине степень расширения по площади у осесимметричного сопла во всех рассчитанных примерах больше, чем у плоского.

Как уже отмечалось, одной из главных причин преимущества сопел с внезапным сужением является увеличение длины их сверхзвуковой части за счет ликвидации плавного сужающегося участка. При фиксированном x_a для сопла с плавным входом с ростом его общей длины X относительный вклад такого увеличения длины уменьшается. Чтобы, несмотря на это, понять причину преимущества длинных оптимальных сопел, сравним распределение чисел M по оси x при разгоне первоначально однородного потока и потока, прошедшего внезапное сужение. Для плоской щели такое сравнение, выполненное при одинаковых u_a в [14], показало, что с удалением от начального сечения из-за более быстрого разгона неравномерного потока разность $\Delta x = x^n(M) - x^u(M)$ с некоторого M становится отрицательной. Здесь x^u и x^n — абсциссы для однородного (с $M(0) \equiv 1$) и неоднородного потоков в сечении $x = 0$ как функции M . Как показали наши расчеты, та же закономерность наблюдается и при $v = 1$. При фиксированном расходе, а не u_a , разность Δx если и не меняет знака (расчеты велись до $M = 5$), то не превышает нескольких десятых, причем не исключено, что и для фиксированного расхода Δx при больших M также сменит знак. В любом случае малость Δx объясняет, почему увеличение X на несколько единиц за счет сокращения до нуля длины дозвуковой части ведет к росту R и при больших $X < X^u$. Здесь X^u — длина, при которой на выходе из сопла реализуется равномерный поток с $p = p^+$ и $\phi = 0$.

Итак, выполненное исследование подтвердило соображения [1] о возможных преимуществах внезапного сужения, несмотря на то, что построенные конфигурации получены отнюдь не в результате строгого решения соответствующей вариационной задачи. Более того, внезапное сужение является лишь весьма правдоподобным элементом оптимальной образующей при принципиальной допустимости углублений (пунктир на фиг. 1). Доказать их наличие или отсутствие можно с помощью общего метода

множителей Лагранжа [2], однако авторы не видят острой необходимости в этом. Дело в том, что в отсутствие дополнительных соображений об использовании объема углублений любые выемки в торцевой стенке при течении реального вязкого газа будут если не вредны (что более вероятно), то практически бесполезны. В таких условиях в постановке задачи для идеального газа естественно ограничение $2\phi \geq -\pi$, запрещающее подобные углубления. О влиянии вязкости следует помнить и в связи с ростом p за звуковым изломом, а также при приближении (со стороны цилиндрического канала) к a° . В общем случае это может вызвать отрыв и обусловленное им увеличение потерь, не учитываемых в приближении идеального газа. Поэтому на построенные конфигурации следует смотреть не как на рекомендацию к немедленному использованию, а как на теоретический предел совершенства сопла при заданных X, Y, G и p^+ .

Для предотвращения возможных отрывов пограничного слоя в постановку задачи в рамках идеального газа следует добавить дополнительные ограничения либо на dp/dx , либо на комбинацию параметров ξ — «критерий отрыва» пограничного слоя (известно [15], что ξ пропорционально dp/dx). Как уже отмечалось, справа от точки a такое ограничение можно записать в форме неравенства (2.1). С другой стороны, при подходе к точке a° вдоль образующей цилиндра торможение потока неизбежно. При этом, хотя dp/dx в самой точке a° обращается в нуль (будучи положительным слева от нее), одновременно здесь равна нулю и V . Скорость V входит в знаменатель выражения для ξ соответственно в первой и второй степенях для ламинарного и турбулентного случаев [15], а $dp/dx = -\rho V dV/dx$, причем левое предельное значение dV/dx в a° отрицательно. Поэтому, а также из-за роста толщины вытеснения, входящей в числитель выражения для ξ соответственно во второй и в первой степенях, ξ при приближении к a° увеличивается (для турбулентного пограничного слоя неограниченно). Так как отрыв происходит при превышении ξ некоторого критического значения $\xi^* > 0$, то в силу этого включение в идеальную постановку требования отсутствия отрыва ведет в общем случае к появлению в окрестности a° сглаживающего участка краевого экстремума. На нем либо $dV/d\tau$, либо $d \ln V/d\tau$, где τ — дуга, отсчитываемая вдоль контура, принимает заданное постоянное (предельно допустимое) отрицательное значение.

Решение задачи профилирования сопла с учетом всех описанных выше ограничений пока отсутствует. Однако уже упоминавшиеся расчеты, выполненные в рамках упрощенной схемы, в которой суммарный рост p за изломом был уменьшен почти вдвое, позволяют ожидать, что по крайней мере исключение всего участка повышения p на ab почти не уменьшит полученные значения ΔR . Тем не менее и в таком случае, даже пренебрегая возможным отрывом в окрестности точки a° , результаты данной работы не следует воспринимать как призыв к обязательной ликвидации плавных дозвуковых частей сопел при одновременном увеличении на соответствующую величину их сверхзвуковых образующих. Дело в том, что, как правило, имеются дополнительные соображения, отличные от газодинамических, в силу которых внезапное сужение оказывается нежелательным или недопустимым. Поэтому основной итог выполненного исследования можно сформулировать как отсутствие (при правильном профилировании удлиненной сверхзвуковой части) требований именно газодинамического характера к плавности сужающейся части сопла и к равномерности потока на входе в его сверхзвуковую часть. Благодаря этому при профилировании сопла появляются дополнительные возможности, однако проблема их использования выходит за рамки газовой динамики.

Авторы признательны В. А. Востреповой за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики, постановки, методы решения, соотношение точных и приближенных подходов.— В кн.: Проблемы современной механики. Ч. 1 М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 90—100.
2. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
3. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики.— Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6, с. 68—77.
4. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
5. *Тилляева Н. И.* Обобщение модифицированной схемы С. К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки.— Уч. зап. ЦАГИ, 1986, т. 17, № 2, с. 25—33.
6. *Щербаков С. А.* Расчет по модифицированной схеме С. К. Годунова невязкого течения в соплах и струях.— Тр. ЦИАМ, 1985, № 1155, с. 1—4.
7. *Фалькович С. В.* К теории сопла Лавала.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 4, с. 503—512.
8. *Рыжов О. С.* О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лавала.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 4, с. 433—443.
9. *Vaglio-Laurin R.* Transonic rotational flow over a convex corner.— J. Fluid Mech., 1960, v. 9, № 1, p. 81—103.
10. *Крайко А. Н., Соколов В. Е.* Об удельном импульсе потока в минимальном сечении сопла Лавала и в выходном сечении сужающегося сопла.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1, с. 186—188.
11. *Щербаков С. А.* О тяге сужающегося сопла.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 6, с. 181—183.
12. *Тилляева Н. И.* О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопел для неравномерных и закрученных течений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3, с. 124—131.
13. *Крайко А. Н., Тилляева Н. И.* Об учете неравномерности потока в минимальном сечении при оптимальном профилировании расширяющейся части сопла.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 184—186.
14. *Камзолов В. Н., Пирумов У. Г.* Расчетное исследование сверхзвуковой струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками.— ПМТФ, 1967, № 2, с. 117—122.
15. *Бам-Зеликович Г. М.* Расчет отрыва пограничного слоя.— Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 12, с. 68—85.

Москва

Поступила в редакцию
18.VII.1985