

УДК 533.6.011

## **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СОПЛА ДЛЯ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ ГАЗА И ЧАСТИЦ**

**ПИРУМОВ У. Г., СУВОРОВА В. Н.**

В настоящей работе течения газа с моно- и полидисперсными частицами в плоских и осесимметричных соплах рассчитываются обратным методом [1, 2]. На оси симметрии сопла задается распределение скорости газа, а во входном сечении — параметры газа и частиц. В результате численного интегрирования системы уравнений, описывающих течение газа при наличии в нем частиц конденсата, определяются параметры газа и частиц, линии тока газа и траектории частиц с учетом взаимного влияния газа и частиц. Одна из линий тока газа принимается за контур сопла и находятся предельные траектории и зона чистого газа. Описан разностный метод, позволяющий по единому алгоритму рассчитывать до-, транс- и сверхзвуковую области течения, отмечены его особенности и приведены результаты расчета для монодисперсных смесей с диаметрами частиц 1 и 5 мкм и весовыми долями 0,3. Проведено сравнение с результатами расчетов другими методами.

Другие подходы к расчету двухфазных течений в соплах рассмотрены в [3—12]. В [13—15] приведены основные уравнения и дан детальный обзор исследований в этой области. Основные результаты к настоящему времени получены для течений газа с частицами в сверхзвуковой области сопла, где в силу гиперболичности уравнений используются различные варианты метода характеристик. Расчет в до- и трансзвуковой областях проводится либо путем решения уравнений движения и теплообмена частиц в заданном потоке газа [3, 6], либо методом установления [9—12]. Полученные таким образом данные в трансзвуковой области используются для расчета течения в сверхзвуковой области уже другим методом — как правило, методом характеристик.

**1. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия.** Рассматривается обратная задача теории сопла для двухфазной смеси. На оси сопла задается распределение скорости газа, а во входном сечении — параметры газа и частиц. Обратная задача состоит в определении течения в окрестности оси симметрии по заданным начальным данным и сводится к решению задачи Коши. В случае двухфазной смеси газа и частиц в отличие от случая чистого газа необходимо решать две задачи Коши: в поперечном направлении для определения некоторых газодинамических параметров и в продольном направлении для нахождения остальных газодинамических параметров и параметров частиц. В результате решения обратной задачи определяются линии тока газа и траектории частиц. Линия тока газа принимается за жесткую стенку сопла. В отличие от случая чистого газа форма контура сопла, соответствующая некоторому расходу газа, будет зависеть от параметров частиц, в частности от их размера. Обратную задачу удобно решать с использованием независимых переменных  $\psi$  и  $x$ , где  $\psi$  — функция тока, а  $x$  — продольная декартова координата.

Уравнения движения и энергии, описывающие течение газа при наличии в нем частиц конденсированной фазы, отличаются от обычных газодинамических уравнений тем, что в их правые части добавляются члены, учитывающие воздействие частиц на газ. К ним добавляются уравнения движения частиц и теплообмена между частицами и газом. В координатах  $\psi$ ,  $x$  эта система уравнений имеет вид [1]

$$\frac{\partial r^{1+\nu}}{\partial \psi} = \frac{1+\nu}{\rho u} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{v}{u} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \psi} = -\frac{\gamma}{r^\nu} \left[ \frac{1}{u} \sum_{i=1}^N \frac{\rho_{is}}{\rho} s_2 + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (1.3)$$

$$\gamma \frac{\partial W^2}{2 \partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \sum_{i=1}^N \left( q_1 + \frac{v}{u} q_2 \right) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{C_p}{R} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{u} \sum_{i=1}^N \left[ q_1 (u - u_{is}) + q_2 (v - v_{is}) - \frac{C_{ps}}{R} q_3 \right] \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u_{is} \rho_{is}}{\partial x} + r^{\nu-1} \left[ s_4 \frac{\partial \rho_{is}}{\partial \psi} + \rho r \rho_{is} \left( u \frac{\partial v_{is}}{\partial \psi} - v \frac{\partial u_{is}}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{\nu \rho_{is} v_{is}}{r} = 0 \quad (1.6)$$

$$u_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial x} + s_4 \frac{\partial u_{is}}{\partial \psi} = s_1 \quad (1.7)$$

$$u_{is} \frac{\partial v_{is}}{\partial x} + s_4 \frac{\partial v_{is}}{\partial \psi} = s_2 \quad (1.8)$$

$$u_{is} \frac{\partial T_{is}}{\partial x} + s_4 \frac{\partial T_{is}}{\partial \psi} = s_3 \quad (1.9)$$

$$P = \rho T \quad (1.10)$$

$$s_1 = St_{is} f_{is} (u - u_{is}), \quad s_2 = St_{is} f_{is} (v - v_{is})$$

$$s_3 = l_{is} g_{is} (T - T_{is}), \quad s_4 = \rho r (u v_{is} - v u_{is})$$

$$q_1 = \frac{\gamma \rho_{is}}{\rho} s_1, \quad q_2 = \frac{\gamma \rho_{is}}{\rho} s_2, \quad q_3 = \frac{\rho_{is}}{\rho} s_3$$

В уравнениях движения газа (1.3), (1.4) и энергии (1.5) суммируются члены, учитывающие воздействие  $N$  фракций частиц на газ; (1.6)–(1.9) — уравнения неразрывности, движения и теплообмена для отдельных фракций ( $i=1, \dots, N$ );  $\nu=0$  или  $1$  для плоского и осесимметричного случаев соответственно.

Система (1.1)–(1.10) приведена к безразмерному виду путем отнесения линейных размеров к  $r_*$ , давления — к  $P_*$ , плотности  $\rho$  — к  $\rho_*$ , скоростей — к  $a_* = (\gamma P_*/\rho_*)^{1/2}$ , температуры  $T$  — к  $T_* = R P_*/\rho_*$ , функции тока — к  $\rho_* a_* r_*^{1+\nu}$ , коэффициента вязкости  $\mu$  — к  $\mu_*$ . В качестве параметров со звездочкой обычно принимаются критические параметры газа, вычисленные по соответствующим параметрам торможения и показателю адиабаты газа  $\gamma$ , а в качестве  $r_*$  — радиус минимального сечения сопла. Приняты также следующие обозначения:  $W$  — модуль скорости;  $u, v$  — проекции вектора скорости  $\mathbf{W}$  на оси цилиндрической системы координат  $x, r$ ;  $C_p, C_{ps}$  — удельные теплоемкости газа и частиц,  $R$  — газовая постоянная. Индекс  $is$  относится к частицам  $i$ -й фракции. Число Стокса  $St_{is}$  и параметр  $l_{is}$  — безразмерные величины, характеризующие степень динамической и тепловой неравновесности смеси

$$St_{is} = 18 \mu_* (a_* r_* \rho_* d_{is}^2)^{-1}, \quad l_{is} = \frac{2 C_p St_{is}}{3 C_{ps} Pr}$$

где  $d_{is}$  — диаметр частиц,  $Pr$  — число Прандтля.

Функции  $f_{is}$  и  $g_{is}$  представляют собой отношение коэффициента сопротивления сферы и числа Нуссельта к соответствующим значениям при стоксовом течении. Для определения их используются полуэмпирические формулы, учитывающие влияние инерционности и разреженности [8]. Ниже для этих коэффициентов используются формулы Рэнни, учитывающие отличие их от соответствующих коэффициентов в течении Стокса за счет разреженности

$$C_{xi} = (C_{xi})_{st} f_{is}, \quad Nu_i = (Nu_i)_{st} g_{is}$$

$$C_{xi} = C_{xi}^{\circ} (1 + 0,19 C_{xi}^{\circ} M_{is})^{-1}$$

$$Nu_i = Nu_i^{\circ} \left( 1 + 3,42 \frac{M_{is}}{Re_{is} Pr} Nu_i^{\circ} \right)^{-1}$$

где  $(C_{xi})_{st} = 24 Re_{is}^{-1}$ ,  $(Nu_i)_{st} = 2$  — коэффициент сопротивления и число Нуссельта в течении Стокса, а  $C_{xi}^{\circ}$  и  $Nu_i^{\circ}$  — коэффициент сопротивления и число Нуссельта с учетом инерционности частиц,  $Re_{is}$  и  $M_{is}$  — числа Рейнольдса и Маха частиц, подсчитанные по относительной скорости газа.

Используем для  $C_{xi}^{\circ}$  формулу Олевского, а для  $Nu_i^{\circ}$  — формулу Карлсона

$$C_{xi}^{\circ} = 24 Re_{is}^{-1} + 4,4 Re_{is}^{-1/2} + 0,42$$

$$Nu_i^{\circ} = 2 + 0,46 Re_{is}^{1/2} Pr^{1/4}$$

$$Re_{is} = \rho \Delta W_{is} d_{is} \mu^{-1}, \quad M_{is} = \Delta W_{is} a^{-1}$$

$$\Delta W_{is} = |\mathbf{W} - \mathbf{W}_{is}| = [(u - u_{is})^2 + (v - v_{is})^2]^{1/2}$$

Тогда

$$f_{is} = \frac{1 + A_{is} \Delta W_{is}^{1/2} + B_{is} \Delta W_{is}}{C_{is} + A_{is}^{(1)} \Delta W_{is}^{1/2} + B_{is}^{(1)} \Delta W_{is}}, \quad g_{is} = \frac{1 + D_{is} \Delta W_{is}^{1/2}}{E_{is} + D_{is}^{(1)} \Delta W_{is}^{1/2}}$$

$$A_{is} = 0,183 G^{1/2}, \quad B_{is} = 0,0175 G$$

$$A_{is}^{(1)} = 0,835 (a^2 G)^{-1/2}, \quad B_{is}^{(1)} = 0,08 a^{-1}$$

$$C_{is} = 1 + 4,45 (aG)^{-1}, \quad D_{is} = 0,23 G^{1/2} Pr^{1/4}$$

$$E_{is} = 1 + 6,84 (Pr aG)^{-1}, \quad D_{is}^{(1)} = 1,57 Pr^{-1/2} (a^2 G)^{-1/2}$$

$$Re_{*} = \frac{a \rho_{*} r_{*}}{\mu_{*}}, \quad G = Re_{*} \frac{\rho d_{is}}{\mu r_{*}}$$

Система уравнений (1.1)–(1.10) содержит  $6 + 4N$  неизвестных функций  $r$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $\rho$ ,  $u_{is}$ ,  $v_{is}$ ,  $\rho_{is}$ ,  $T_{is}$  и является замкнутой.

Для нахождения траекторий частиц и плотностей  $\rho_{is}$  удобно ввести функции тока для частиц  $\psi_{is}$  по формулам

$$\frac{\partial \psi_{is}}{\partial x} = \rho u r \left( \frac{v}{u} - \frac{v_{is}}{u_{is}} \right) \frac{\partial \psi_{is}}{\partial \psi} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \psi_{is}}{\partial r} = \rho_{is} u_{is} r \quad (1.12)$$

Соотношения (1.11) использовались для вычисления траекторий частиц  $\psi_{is} = \text{const}$ , а (1.12) — для определения плотностей  $\rho_{is}$  вместо уравнения (1.6).

Метод решения системы (1.1)–(1.10) в рамках обратной задачи аналогичен методу решения соответствующей системы уравнений в случае неравновесных течений [15] с той лишь разницей, что несколько иным способом определяются начальные данные на оси симметрии. В окрестности оси симметрии при двухфазном течении должно быть построено

асимптотическое разложение (как для плоского, так и для осесимметричного случаев), из которого на оси симметрии определяются все параметры течения, в том числе плотность частиц и производные  $(\partial v/\partial \psi)^{1/2}$ ,  $(\partial v_{is}/\partial \psi)^{1/2}$ .

Представляя в окрестности оси симметрии параметры  $u$ ,  $u_{is}$ ,  $P$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{is}$ ,  $T$ ,  $T_{is}$  в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \psi \quad (1.13)$$

а  $v$ ,  $v_{is}$ ,  $r$  в виде

$$\varphi = \varphi_0 \sqrt{\psi} \quad (1.14)$$

и подставляя эти соотношения в уравнения (1.1)–(1.10), получим следующие уравнения для определения функций  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{0is}$  и  $\varphi_1$ :

$$r_0^{1+\nu} = (1+\nu)/(\rho_0 u_0) \quad (1.15)$$

$$v_0 = u_0 \partial r_0 / \partial x \quad (1.16)$$

$$P_1 = \frac{-\gamma}{r_0^\nu} \left[ \frac{1}{u_0} \sum_{i=1}^N \frac{\rho_{0is}}{\rho_0} s_v + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = - \left[ \frac{\gamma \rho_0}{2} \frac{\partial u_0^2}{\partial x} + \sum_{i=1}^N \gamma \rho_{0is} s_u \right] \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{R}{C_p \rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{u_0} \sum_{i=1}^N \gamma \frac{R}{C_p} \frac{\rho_{0is}}{\rho_0} s_u (u - u_{0is}) - \frac{1}{u_0} \sum_{i=1}^N \frac{C_{p0} \rho_{0is}}{C_p \rho_0} s_T \quad (1.19)$$

$$u_{0is} \frac{\partial \ln \rho_{0is}}{\partial x} = - \frac{(1+\nu) v_{0is}}{r_0} - \frac{\partial u_{0is}}{\partial x} \quad (1.20)$$

$$u_{0is} \frac{\partial u_{0is}}{\partial x} = s_u \quad (1.21)$$

$$u_{0is} \frac{\partial v_{0is}}{\partial x} = s_v \quad (1.22)$$

$$u_{0is} \frac{\partial T_{0is}}{\partial x} = s_T \quad (1.23)$$

$$\rho_0 = P_0 / T_0 \quad (1.24)$$

$$s_u = \text{St}_{0is} f_{0is} (u_0 - u_{0is}), \quad s_v = \text{St}_{0is} g_{0is} (v_0 - v_{0is})$$

$$s_T = l_{0is} g_{0is} (T_0 - T_{0is})$$

Система (1.15)–(1.24) решается следующим образом. Сначала, численно интегрируя по  $x$  при заданной на оси скорости систему (1.18)–(1.19), (1.21), (1.23) и (1.24) (которая эквивалентна системе соответствующих уравнений неравновесного двухфазного течения в одномерном приближении), определяем функции  $P_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $u_{0is}$ ,  $T_{0is}$ . Далее из (1.15), (1.16), (1.22) и (1.20) последовательно определяем  $r_0$ ,  $v_0$ ,  $v_{0is}$  и  $\rho_{0is}$ . Обычно предполагается, что при  $x=x_0$  течение равновесное, т. е.

$$u_{0is} = u_0, \quad T_{0is} = T_0, \quad v_{0is} = v_0, \quad \rho_{0is} = \rho_0 z_i / \left( 1 - \sum_{i=1}^N z_i \right)$$

где  $z_i$  – весовая доля  $i$ -й фракции частиц.

Для заданных  $u_0(x)$  и  $\gamma$  можно определить  $\rho_0$ ,  $T_0$  и  $P_0$  по газодинамическим функциям, а  $v_0$  – из формулы (1.16). Эти же начальные данные в сечении  $x=x_0$  используются и при решении полной задачи с учетом того, что  $v = \sqrt{\psi} v_0$ ,  $v_{is} = \sqrt{\psi} v_{0is}$ .

После определения всех параметров на оси симметрии по формулам (1.13) и (1.14) производится расчет параметров на ближайшей к оси линии тока газа, с ко-

торой и начинается затем численное интегрирование полной системы (1.1)–(1.10). Отметим, что в отличие от случая течения чистого газа с постоянным показателем адиабаты, для которого асимптотическое разложение типа (1.13), (1.14) используется лишь в осесимметричной задаче для «отхода» от оси (из-за особенности типа  $v/r$ , которая отсутствует в плоском течении), в двухфазном неравновесном течении это разложение необходимо как для плоского, так и для осесимметричного течений.

Расчеты двухфазных течений в соплах можно проводить двумя способами. Первый способ состоит в точном решении системы (1.1)–(1.10) методом, описанным ниже, в результате которого определяются все газодинамические параметры, параметры частиц, их траектории, зоны чистого газа с учетом взаимного влияния частиц на газ. При втором (приближенном) способе первоначально решается обратная задача для чистого газа с некоторым эффективным постоянным показателем адиабаты

$$\gamma^* = \gamma [1 - z(1 - C_{ps}/C_p)] [1 - z(1 - \gamma C_{ps}/C_p)]^{-1} \quad (1.25)$$

соответствующим равновесному течению смеси газа с частицами ( $W = W_{is}$ ,  $T = T_{is}$ ), и определяются все параметры течения в до- и сверхзвуковой областях [6]. При этом предполагается, что параметры газа, несмотря на запаздывание частиц, остаются такими же, как и в случае равновесного течения, при котором частицы оказывают на параметры газа наиболее «сильное» влияние. Найденные параметры газа используется далее для расчета траекторий и параметров частиц по формулам (1.6)–(1.9). Очевидно, что второй способ значительно более простой. Ниже представлены результаты расчетов по обоим описанным методам и дано их сравнение.

**2. Численный метод.** После определения всех параметров на близлежащей к оси линии тока начинается численное интегрирование полной системы (1.1)–(1.10). Для этого из (1.1), (1.2) и (1.3) последовательно определяются на  $(n+1)$ -м слое в первой итерации  $r$ ,  $v$  и  $P$ . Затем вдоль  $(n+1)$ -го слоя, начиная от плоскости  $x = x_0$ , производится численное интегрирование системы (1.4)–(1.10) и последовательно определяются функции  $W$ ,  $T$ ,  $u_{is}$ ,  $v_{is}$ ,  $T_{is}$ ,  $\rho_{is}$ . В сечении  $x = x_0$  течение принимается равновесным, т. е. параметры частиц полагаются равными параметрам газа. При интегрировании уравнений (1.7)–(1.9) используются неявные разностные схемы [15], поскольку эти уравнения имеют вблизи равновесия вид уравнений с малым параметром при старшей производной, особенно при малых размерах частиц. Далее, как обычно, итерации повторяются до сходимости с заданной точностью. После определения параметров течения выделяются траектории частиц каждого размера и находятся их предельные траектории, выше которых отсутствуют частицы этого размера. В области выше предельных траекторий расчеты для системы (1.1)–(1.10) повторяются, но уже без учета частицы этого сорта. Выше последней предельной траектории, соответствующей частицам минимального размера, рассчитывается зона чистого газа. В результате такого расчета уточняется форма линии тока, расположенной вниз по потоку от точки касания с предельной траекторией.

При интегрировании уравнений (1.18)–(1.20) используется явная разностная схема. Например, уравнение (1.18) аппроксимируется разностным уравнением

$$\frac{P_0^{(m+1, k+1)} - P_0^{(m)}}{\Delta x} = \frac{1}{2} (\Pi^{(m)} + \Pi^{(m+1, k)})$$

где  $\Pi$  – правая часть уравнения (1.18), индекс  $m$  соответствует изменению  $x$ ,  $k$  – номер итерации,  $\Delta x$  – шаг разностной схемы.

При интегрировании релаксационных уравнений (1.21)–(1.23) используется неявная разностная схема. Например, разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение (1.22), имеет вид (параметр  $\sigma < 0,5$ )

$$\frac{v_{ois}^{(m+1, k+1)} - v_{ois}^{(m)}}{\Delta x} = \sigma F_v + (1 - \sigma) F^{(m+1, k)} (v_0 - v_{ois})^{(m+1, k+1)}$$

$$F = \frac{St_{ois} f_{ois}}{u_{ois}}, \quad F_v = F^{(m)} (v_0 - v_{ois})^{(m)}$$

Тогда

$$v_{ois}^{(m+1, k+1)} = \frac{v_{ois}^{(m)} + \Delta x [\sigma F_v + (1 - \sigma) F^{(m+1, k)} v_0^{(m+1, k+1)}]}{1 + (1 - \sigma) \Delta x F^{(m+1, k)}}$$

Аналогично записываются выражения для  $u_{ois}^{(m+1, k+1)}$  и  $T_{ois}^{(m+1, k+1)}$ . После определения параметров вблизи оси сопла далее из асимптотического разложения проводится расчет параметров на следующем слое  $\psi_{n+1} = \text{const}$  итерационным методом. Из первых трех уравнений (1.1)–(1.3)  $r$ ,  $v$ ,  $P$  определяются в первом приближении

по формулам

$$r_{m,n+1}^{(k+1)} = \left\{ r_{m,n}^{1+v} + \frac{\Delta\psi}{2} \left[ \left( \frac{1+v}{\rho u} \right)_{m,n} + \left( \frac{1+v}{\rho u} \right)_{m,n+1}^{(k)} \right] \right\}^{1/(1+v)}$$

$$v_{m,n+1}^{(k+1)} = \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{m,n+1}^{(k+1)} u_{m,n+1}^{(k)}$$

$$P_{m,n+1}^{(k+1)} = P_{m,n} - \frac{\Delta\psi\gamma}{2} \left\{ \frac{\Pi_{m,n}}{r_{m,n}^v} + \frac{\Pi_{m,n+1}^{(k)}}{(r_{m,n+1}^{(k)})^v} \right\}$$

$$\Pi = \frac{1}{\rho u} \sum_{i=1}^N \rho_{is} St_{is} f_{is} (v - v_{is}) + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Здесь  $\Delta\psi$  — шаг разностной схемы, индексы  $m$  и  $n$  соответствуют изменениям  $x$  и  $\psi$ . В первом приближении все функции на  $(n+1)$ -м слое полагаются равными соответствующим функциям на  $n$ -м слое. Далее, с использованием уже вычисленных значений  $r$ ,  $v$ ,  $P$  на  $(n+1)$ -м слое, система уравнений (1.4)–(1.10) интегрируется вдоль  $(n+1)$ -го слоя, начиная от начального сечения  $x=x_0$ . При этом для аппроксимации уравнений (1.4)–(1.6) используется разностная схема

$$f_{m+1,n+1}^{(k,l)} = f_{m,n+1}^{(k)} + \frac{\Delta x}{2} \{ \Pi_{m,n+1}^{(k)} + \Pi_{m+1,n+1}^{(k,l)} \}$$

где  $l$  — номер итерации при переходе от  $x_m$  к  $x_{m+1}$ ;  $\Pi$  — правая часть соответствующего дифференциального уравнения. В первой итерации все функции с верхним индексом  $l+1$  полагаются равными соответствующим значениям в сечении  $x_m$ .

При интегрировании уравнений (1.7)–(1.9) использовались неявные разностные схемы, упомянутые выше. Приведем разностную форму уравнения (1.7)

$$\frac{(u_{is})_{m+1,n+1}^{(l+1)} - (u_{is})_{m,n+1}}{\Delta x} = \sigma \left[ K_{m,n+1} \frac{(u_{is})_{m,n+1} - (u_{is})_{m,n}}{\Delta\psi} + Q_{m,n+1} \right] +$$

$$+ (1-\sigma) \left[ K_{m+1,n+1}^{(l+1)} \frac{(u_{is})_{m+1,n+1} - (u_{is})_{m+1,n}}{\Delta\psi} + Q_{m+1,n+1}^{(l+1)} \right]$$

$$K = - \frac{\rho r}{u_{is}} (uv_{is} - vu_{is}), \quad Q = \frac{St_{is} f_{is}}{u_{is}} (u - u_{is})$$

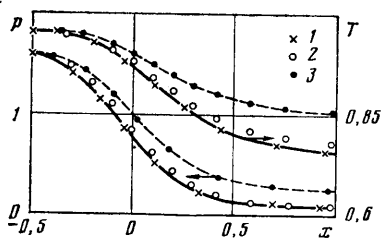
**3. Результаты расчетов.** Описанный метод был использован для расчета монодисперсных смесей с диаметрами частиц  $d_{is}=1$  и  $5$  мкм при  $z_i=0,3$ . При этом на оси сопла задавалось распределение скорости

$$u = 1 + \left( \frac{e^{x/b}}{\lambda_{\infty}^* - 1} + \frac{1}{1 - \lambda_{\infty}} \right)^{-1} (e^{x/b} - 1) \quad (3.1)$$

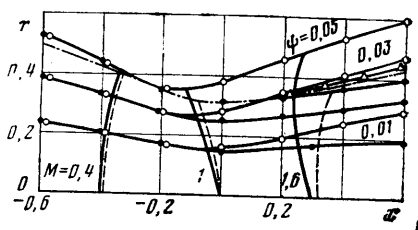
где  $b=0,21$ ,  $\lambda_{\infty}=0,2$ ,  $\lambda_{\infty}^*=1,8$ . Остальные параметры в начальном сечении  $x=x_0$  брались из газодинамических таблиц при  $\gamma=1,16$ .

На каждом слое  $\psi=\text{const}$  расчет параметров проводился на переменной сетке по  $x$ , описанной в [1], причем при интегрировании уравнений (1.4)–(1.10) вдоль слоя  $\psi=\text{const}$  шаг по  $x$  уменьшался в 10 раз. Все производные по  $\psi$ , входящие в уравнения (1.6)–(1.10), считались по значениям функций на  $n$ -м и  $(n+1)$ -м слоях; в точках, лежащих между узлами исходной сетки, их значения находились с помощью квадратичной интерполяции, что неизбежно приводило к дополнительным ошибкам при счете.

Результаты расчетов представлены на фиг. 1–5. На фиг. 1 показано изменение давления и температуры газа вдоль оси сопла. Здесь и далее введены следующие обозначения: 1 и 2 — результаты расчетов, проведенных с учетом взаимного влияния частиц и газа соответственно для  $d_{is}=1$  и  $5$  мкм; 3 — соответствует случаю, когда влияние частиц на газ учитывается через эффективный показатель адиабаты с  $\gamma=\gamma^0=1,13$ , т. е. принимается, что частицы и газ находятся в равновесии. Важно отметить, что в этом случае из уравнений движения и энергии газа (1.3)–(1.5) исклю-



Фиг. 1



Фиг. 2

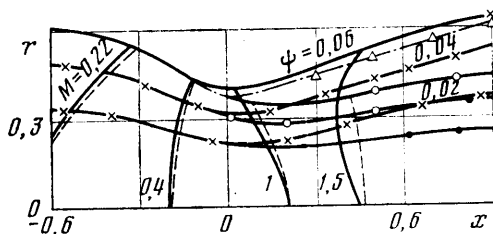
чаются члены, содержащие параметры частиц. Такое двухфазное течение в газе с эффективным показателем адиабаты  $\gamma^\circ$  есть частный случай более общего течения, в котором полностью учитывается влияние частиц на газ. И те и другие результаты получены при одинаковом распределении безразмерной скорости на оси. Имеет место заметное различие между двумя рассмотренными случаями, особенно в сверхзвуковой области.

На фиг. 2, 3 представлены линии тока газа для различных  $\psi$ , а также линии постоянного числа Маха ( $M = \text{const}$ ). Пунктиром показаны результаты расчетов в газе с  $\gamma = \gamma^\circ$ . Как видно, заметное различие результатов, полученных двумя методами, наблюдается в транс- и сверхзвуковой областях сопла. Отсюда следует, что при расчете сверхзвуковой области методом характеристик необходимо использовать начальные данные, полученные с учетом взаимного влияния частиц и газа в точной постановке. Начальные данные, полученные из расчетов в газе с эффективным показателем адиабаты  $\gamma = \gamma^\circ$ , как видно, могут привести к заметным ошибкам.

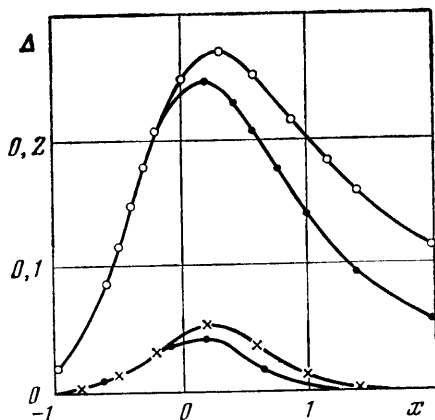
Этот вывод подтверждается результатами расчета величины  $\Delta = (u - u_{is})/u$  вдоль оси симметрии для больших и маленьких частиц двумя методами (фиг. 4). Представленные кривые имеют максимум в трансзвуковой области, где градиенты газодинамических параметров максимальны, причем  $\Delta$  увеличивается с увеличением диаметра частиц. Несмотря на идентичное качественное поведение этих кривых, наблюдается заметное количественное их различие при расчетах двумя методами; при этом разница возрастает с увеличением  $d_{is}$ . Так, различие в  $\Delta$  увеличивается при  $x=0$  от 0,005 при  $d_{is}=1$  мкм до 0,01 при  $d_{is}=5$  мкм. Этот результат представляется весьма важным. Известно [6, 8], что при одинаковых начальных данных в трансзвуковой области за минимальным сечением траектории частиц, подсчитанные по методам [6] и [4, 5, 8] в сверхзвуковой области, близки между собой. Однако результаты, представленные на фиг. 4, показывают, что принимать начальные данные одинаковыми при расчетах различными методами нельзя. Необходимо точно учитывать воздействие частиц на газ, начиная с дозвуковой области. Различие в начальных данных может привести к различию траекторий в сверхзвуковой области и к соответствующему расхождению в точках выпадения частиц на сверхзвуковую часть контура.

Результаты расчетов сопоставлялись с данными [6]. В [6] сначала решается обратная задача для чистого газа с эффективным показателем адиабаты  $\gamma^\circ$  и определяются все параметры течения. Определенные таким образом параметры газа используются при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений движения и энергии частиц. Показано, что в этом частном случае результаты расчетов параметров и траекторий частиц двумя методами полностью совпадают в до-, транс- и сверхзвуковых областях.

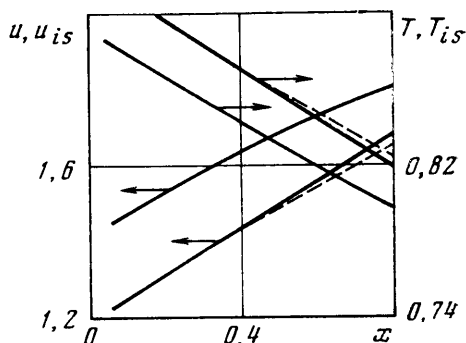
Для сопоставления с результатами [8] определялся контур сопла и параметры в некотором сечении  $x = x_n$ , расположенном в его сверхзвуковой области. С использованием этих данных в сверхзвуковой области методом характеристик решалась прямая задача [8]. В результате определялась предельная траектория, выделялась зона чистого газа и находились пара-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

метры на контуре. Результаты такого расчета вниз по потоку от сечения  $x=x_H=0,06$  сравнивались с решением обратной задачи методом п. 2. Результаты сравнения представлены на фиг. 5, где использованы те же обозначения, что и на фиг. 1—4. Здесь представлены распределения температуры и составляющей скорости  $u$  на контуре сопла, а также скорость частиц  $u_{is}$  и их температура  $T_{is}$  вдоль предельной траектории для  $d_{is}=1$  мкм. Сплошными линиями показаны результаты расчета, а штриховыми — результаты [8]. На фиг. 2, 3 штрихпунктирными линиями показаны предельные траектории, полученные методом п. 2, а треугольниками — предельная траектория по данным [8]. Результаты расчетов обоими методами достаточно хорошо совпадают и в сверхзвуковой области: максимальная погрешность при  $x_H \leq x \leq 0,75$  для  $d_{is}=1$  мкм не превышает 0,2% (см. фиг. 5). При больших  $x$  отличие увеличивается, что, вероятно, связано с различным характером накопления ошибок в сравниваемых методах. Подчеркнем, однако, что в данном случае не ставилось целью проведение расчетов для сверхзвуковой области с высокой точностью, а основное внимание уделялось расчету трансзвуковой части, поскольку для сверхзвуковой области более предпочтительным является метод характеристик [4, 5, 8].

В заключение остановимся на использованных внутренних способах контроля точности помимо представленных выше сравнений с результатами других авторов. Для этого были проведены расчеты при различных значениях шага  $\Delta\psi$  ( $2 \cdot 10^{-3}$ ,  $10^{-3}$ ,  $0,5 \cdot 10^{-3}$ ) с  $d_{is}=1$  мкм; при этом значения  $\Delta = (u - u_{is})/u$  для шагов  $10^{-3}$ ,  $0,5 \cdot 10^{-3}$  различались не более чем на 0,5%. Выполнение закона сохранения количества движения контролировалось путем сравнения разницы в потоках импульса в сечении  $x_H$  и выходном сечении сопла с интегралом сил давления по контуру сопла. Для шага  $\Delta\psi=10^{-3}$  ошибка составляла не более 0,5%, а для шага  $\Delta\psi=0,5 \cdot 10^{-3}$  — не более 0,25%. В силу того что в качестве независимой переменной была выбрана функция тока газа, уравнение неразрывности для газа удовлетворялось точно.

Отметим, что точность расчета параметров удалось заметно улучшить за счет уменьшения шагов по  $x$  по сравнению с принятым в обратном методе традиционным расположением узлов разностной сетки [1]. Уменьшение шага по  $x$  на порядок



привело к значительному улучшению совпадения результатов с расчетами [8] (см. фиг. 5), где шаг по  $x$  определялся из условия Куранта.

Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6. Время счета одного варианта до линии тока  $\psi=0,06$  при шаге  $\Delta\psi=0,001$  с тремя итерациями на слое равно 30 мин.

Авторы выражают благодарность Н. Б. Пономареву и Г. Е. Думнову за полезные обсуждения и помощь при проведении расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Пирумов У. Г.* Обратная задача теории сопла и численное решение внутренних задач газовой динамики.— В сб.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 6. М.: Изд-во МГУ, 1974, с. 99—110.
2. *Пирумов У. Г., Суворова В. Н.* Расчет двухфазных течений газа в соплах обратным методом.— В сб.: Численные методы в аэродинамике. Вып. 5. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 63—75.
3. *Kliegel J. R., Nickerson G. R.* Flow of gas-particle mixtures in axially symmetric nozzles.— In: Detonation and two-phase flow.— N. Y.— London: Acad. Press, 1962, p. 173—194. (Рус. перев.: Клигель Дж., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле — В сб.: Детонация и двухфазное течение. М.: Мир, 1966, с. 183—201.)
4. *Дригов Г. В., Тишин А. П.* Расчет неравновесного течения газа с частицами конденсата в сопле Лавалья.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 5, с. 36—42.
5. *Верещака Л. П., Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* Сеточно-характеристический метод расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых двухфазных течений.— В сб.: Лопаточные машины и струйные аппараты. М.: Машиностроение, 1972, № 6, с. 163—178.
6. *Камзолов В. Н., Маслов Б. Н., Пирумов У. Г.* Исследование траекторий частиц в соплах Лавалья.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 5, с. 136—143.
7. *Bailey W. S., Nilson E. N., Serra R. A., Zupnik T. F.* Gas-particle flow in an axisymmetric nozzle.— ARS Journal, 1961, v. 31, № 6, p. 793—799. (Рус. перев.: Течение газа с твердыми частицами в осесимметричном сопле.— Ракетная техника, 1961, № 6, с. 793—799.)
8. *Аверенкова Г. И., Егорова Н. И., Пирумов У. Г.* Движение полидисперсной смеси газа и частиц в сверхзвуковом сопле.— В сб.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 30. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 94—108.
9. *Васенин И. М., Рычков А. Д.* Численное решение задачи о течении смеси газа и частиц в осесимметричном сопле Лавалья.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 5, с. 178—181.
10. *Глазунов А. А., Рычков А. Д.* Исследование неравновесных двухфазных течений в осесимметричных соплах Лавалья — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6, с. 86—91.
11. *Копченов В. И.* Численное решение задачи о течении смеси газа и инородных частиц в сопле Лавалья при большом относительном расходе частиц.— В сб.: Вопросы газотермодинамики энергоустановок. Вып. 2. Харьков, 1975, с. 3—7.
12. *Копченов В. И., Крайко А. Н.* Решение в рамках двухжидкостной модели прямой задачи о двухфазном течении в сопле Лавалья — В сб. Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1974, № 32, с. 96—108.
13. *Стернин Л. Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
14. *Стернин Л. Е., Маслов Б. Н., Шрайбер А. А., Подвысоцкий А. М.* Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 175 с.
15. *Пирумов У. Г., Росляков Г. С.* Течения газа в соплах. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 245—289.

Москва

Поступила в редакцию  
11.VII.1984