МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1986

УДК 532.546:541.182.45

СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПЕНУ

КАНН К. Б.

Рассматривается процесс фильтрации жидкости через деформируемую пористую среду со структурой газожидкостной пены. Дается обоснование модели течения жидкости через пену. Получены выражения для дифференциального закона стационарной фильтрации и интегральных законов фильтрации через вертикальный столб пены под действием объемных и поверхностных сил.

Газожидкостные пены используются в ряде технологических процессов в качестве «пористой» фильтрующей среды. Например, орошая пену раствором поверхностно-активных веществ (ПАВ) и затем разрушая ее, удается повысить концентрацию ПАВ в растворе (концентрирование ПАВ) или разделить различные ПАВ (фракционирование ПАВ) [1]. Для оценки фильтрующих свойств пен в [2] численно интегрировались безразмерные дифференциальные уравнения движения жидкости. В качестве модели пены как фильтрующей среды в [3] рассматривалась система вертикальных изогнутых каналов. Число независимых гидравлических каналов находилось по результатам измерения электросопротивления пены, что осложняло модель и делало ее гидродинамически неполной. Теория фильтрации жидкости через деформируемую пористую среду, каковой является пена, в настоящее время отсутствует.

1. Газожидкостная пена состоит из множества газовых пузырьков преимущественно неправильной полиэдрической формы, разделенных тонкими жидкими пленками. На стыке трех пленок образуются утолщения — так называемые каналы Плато — Гиббса с поперечным сечением в форме треугольника с вогнутыми внутрь сторонами (далее — треугольник Плато). Благодаря отрицательной кривизне стенок канала давление в нем P меньше давления в смежном пузырьке P_0 и определяется известным уравнением Лапласа

$$P=P_0-\sigma/r \tag{1.1}$$

где σ — поверхностное натяжение пенообразующего раствора, а r — главный радиус кривизны боковых поверхностей канала. Из простых геометрических соображений может быть получена связь между площадью поперечного сечения канала s и радиусом кривизны r

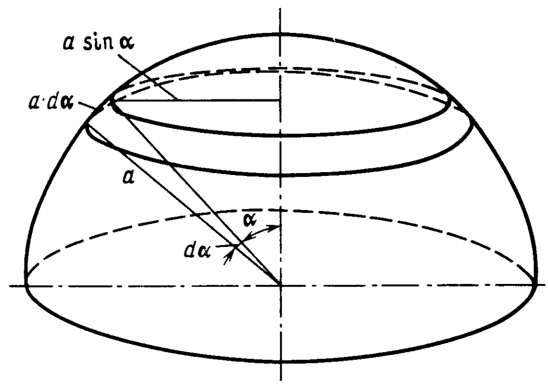
$$s=0{,}161r^2 \tag{1.2}$$

Основными параметрами, характеризующими структуру пены, являются кратность — отношение объема пены к объему содержащейся в ней жидкости, и дисперсность, которая задается средним диаметром пенных пузырьков. Величина, обратная кратности, называется объемной плотностью пены. Газожидкостная смесь приобретает полиэдрическую структуру, когда кратность превосходит некоторое минимальное значение (для монодисперсной пены $\sim$200). При меньших кратностях пена имеет структуру, которую называют ячеистой. Приведенное ниже рассмотрение пригодно лишь для полиэдрических пен.

В [4] показано, что течение жидкости в полиэдрических пенах происходит главным образом по каналам. Гидравлическое сопротивление пленок существенно больше сопротивления каналов, поэтому потоком жидкости по пленкам обычно пренебрегают. Таким образом, пену можно рассматривать как своеобразное пористое тело, представляющее собой систему беспорядочно ориентированных каналов с сечениями в форме треугольника Плато. Поскольку «поровое пространство» в пенах заполнено жидкостью, объемная плотность пен идентична понятию пористости для твердых тел.

Газожидкостные пены имеют ряд особенностей, существенно отличающих их от твердых пористых тел.

1. «Стенки» пенных каналов представляют собой легкодеформируемые адсорбционные слои. Любое изменение статического давления в канале приводит к изменению кривизны боковых поверхностей каналов (в соответствии с (1.1)) и соответственно сечений каналов (уравнение (1.2)). Это означает, что «пористость» пены зависит от статического давления в рассматриваемой области.



2. Жидкие «стенки» каналов нельзя считать неподвижными (в направлении течения), т. е. скорость на поверхности канала, строго говоря, отлична от нуля. Эта подвижность поверхностных слоев характеризуется поверхностной вязкостью (двухмерный аналог объемной вязкости), которая для некоторых ПАВ довольно низка.

3. В реальных пенах средний диаметр пенных пузырьков непрерывно растет. Соответственно меняются и фильтрующие свойства пены. Правда, скорость изменения дисперсности пен со временем убывает и в установившемся режиме средний размер пузырька можно считать постоянным.

Ниже рассматривается процесс течения жидкости через деформируемое пористое тело со структурой пены в предположении, что «стенки» каналов сохраняют неподвижность в направлении течения, а дисперсность пены не меняется.

2. Модель течения. Прежде всего покажем, что для определения фильтрационного расхода жидкости через вертикальный столб пены можно использовать модель, представляющую собой систему вертикальных каналов с поперечными сечениями в форме треугольника Плато.

Пусть λ — число каналов, содержащихся в горизонтальном пенном слое толщиной a, равной длине одного канала (для полидисперсных пен — средней длине канала). Если начала всех каналов совместить в одной точке, то в силу беспорядочности ориентации вторые концы каналов равномерно распределятся по поверхности полусферы радиуса a, причем на единицу поверхности будет «опираться» $\lambda/2\pi a^2$ каналов (плотность распределения). Каналы, составляющие угол α с вертикалью и лежащие в интервале $d\alpha$, «опираются» на сферическое кольцо, площадь которого, как видно из фигуры, равна $2\pi a^2 \sin \alpha d\alpha$. Число таких каналов в выделенном слое определится, очевидно, произведением плотности распределения на площадь кольца

$$(\lambda/2\pi a^2) 2\pi a^2 \sin \alpha d\alpha = \lambda \sin \alpha d\alpha$$

Если пенный столб пересечь произвольной горизонтальной плоскостью, то из этого числа каналов в сечение попадает лишь

$$dn_\alpha = \lambda \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \qquad (2.1)$$

каналов, так как вероятность пересечения одного канала равна $\cos \alpha$.

Полный фильтрационный расход через поперечное сечение пенного столба определится интегралом

$$Q=\int_0^{\pi/2} q_\alpha\, dn_\alpha \tag{2.2}$$

Расход через один канал с площадью поперечного сечения s, составляющий угол α с вертикалью, равен

$$q_\alpha=q\cos\alpha=vs\cos\alpha \tag{2.3}$$

где $q=vs$ — расход через вертикальный канал того же сечения, если средняя скорость в таком канале v. Подставляя (2.1) и (2.3) в (2.2) и замечая, что величины v и s в плоскости сечения (перпендикулярной направлению потока) постоянны, получаем

$$Q=vs\lambda\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha=\frac{vs\lambda}{3}=\frac{q\lambda}{3} \tag{2.4}$$

Таким образом, фильтрационный расход через произвольное сечение пенного столба можно получить, если реальную структуру из беспорядочно ориентированных каналов заменить системой вертикальных каналов, число которых втрое меньше истинного числа каналов в сечении, а площадь сечения каждого равна площади сечения реального канала. Так как это правило справедливо для любого сечения, то фильтрационный расход через весь пенный столб оказывается равным суммарному расходу через n вертикальных каналов с высотой, равной высоте столба, и сечением, изменяющимся по высоте столба так же, как сечения реальных каналов. При этом сохраняется распределение статического давления по высоте пенного столба, а число каналов n определяется из условия, что в них содержится $^1/_3$ всей жидкости.

3. Дифференциальный закон фильтрации. Формально скорость фильтрации жидкости через пену задается известным законом Дарси [5]

$$v_f=-k\,\mathrm{grad}\,h \tag{3.1}$$

где h — пьезометрический напор. В отличие от твердых пористых тел, для которых коэффициент фильтрации k — величина постоянная, проницаемость пен и соответственно коэффициент фильтрации изменяются с изменением статического давления в рассматриваемой области.

Скорость фильтрации определяется расходом жидкости через единичную площадку, перпендикулярную направлению потока фильтрации

$$v_f=Q/\omega \tag{3.2}$$

где ω — площадь поперечного сечения образца. Подставив в (3.2) расход Q из (2.4), получаем, что скорость фильтрации через столб пены выражается в виде

$$v_f=vs\lambda/3\omega \tag{3.3}$$

Для средней скорости течения в призматических каналах будем иметь

$$v=-(A_1s/\mu)\,\mathrm{grad}\,F=-(A_1s\gamma/\mu)\,\mathrm{grad}\,h \tag{3.4}$$

где $F=\gamma h$ — движущая сила, γ — плотность жидкости, μ — ее динамическая вязкость, а $A_1=\mathrm{const}$.

Из соотношений (1.1) и (1.2) находим, что сечение пенных каналов связано со статическим давлением зависимостью

$$s=0{,}161\sigma^2/(P_0-P)^2 \tag{3.5}$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.3), получаем

$$v_f = -\frac{A}{(P_0-P)^4}\frac{\gamma\sigma^4}{\mu}\operatorname{grad} h \tag{3.6}$$

$$A = \frac{(0{,}161)^2 A_1 \lambda}{3\omega} = \text{const}$$

Выражение (3.6) можно рассматривать как дифференциальный закон фильтрации для пен. Сравнивая (3.6) с (3.1), видим, что коэффициент фильтрации в этом случае определяется соотношением

$$k = \frac{A}{(P_0-P)^4}\frac{\gamma\sigma^4}{\mu}$$

Первый сомножитель характеризует зависимость проницаемости пены от статического давления, а второй определяется свойствами пенообразующей жидкости.

Константа A_1 в выражении (3.4) определяется формой поперечного сечения канала. Для сечения в форме треугольника Плато $A_1=2{,}04\cdot10^{-2}$ [6]. Отношение λ/ω представляет собой суммарную длину каналов в единице объема пены и зависит от формы пенных пузырьков, их размеров и распределения по размерам. В идеальном случае пенные пузырьки должны иметь форму равновеликих пентагональных додекаэдров. Для такой пены $\lambda/\omega=7{,}81\cdot d^{-2}$ [2], где d — эффективный диаметр пенного пузырька. Подставляя эти значения в (3.6), находим, что для монодисперсной пены с ячейками в форме пентагональных додекаэдров $A=1{,}38\cdot10^{-3}\cdot d^{-2}$ и локальная скорость фильтрации дается формулой

$$v_f = -\frac{1{,}38\cdot10^{-3}}{d^2(P_0-P)^4}\frac{\gamma\sigma^4}{\mu}\operatorname{grad} h$$

В общем случае, когда фильтрация происходит под действием объемных (сила тяжести) и поверхностных (статическое давление) сил, пьезометрический напор $h=z+P/\gamma$ и дифференциальный закон (3.6) записывается в виде

$$v_f = -\frac{A}{(P_0-P)^4}\frac{\gamma\sigma^4}{\mu}\left(1+\frac{1}{\gamma}\frac{dP}{dz}\right) \tag{3.7}$$

где z — координата по высоте пенного столба.

4. **Интегральный закон фильтрации для объемных сил.** Интегральный закон дает зависимость скорости фильтрации (или фильтрационного расхода) от приложенной силы. Для твердых пористых образцов получение интегрального закона фильтрации по известному дифференциальному (зависимости (3.1)) не представляет труда. В общем случае фильтрационный расход через образец с поперечным сечением ω и высотой H выражается зависимостью

$$Q=v_f\omega=-k\omega\left(1+\frac{\Delta P}{\gamma H}\right)$$

Для пен задача получения интегрального закона фильтрации несколько осложняется.

Рассмотрим фильтрацию жидкости через вертикальный столб пены под действием силы тяжести, когда градиент статического давления отсутствует. Такое течение реализуется в том случае, когда пенный столб в нижней части контактирует с пенообразующим раствором, а в верхней части покрыт тонким сплошным слоем того же раствора. Весь столб пены находится под одним и тем же давлением, и дифференциальный закон фильтрации (3.7) записывается в виде

$$v_f = -\frac{A}{(P_0-P)^4}\frac{\gamma\sigma^4}{\mu}$$

Пенные каналы по всей высоте столба имеют одно и то же сечение. Фильтрация через пену подобна фильтрации через твердый пористый образец с той лишь разницей, что скорость фильтрации существенно зависит от внешнего давления. Фильтрационный расход при этом

$$Q=v_f\omega=-\frac{A\omega}{(P_0-P)^4}\frac{\gamma\sigma^4}{\mu}$$

не зависит от высоты пенного столба.

Необходимо отметить, что давление P должно быть меньше того давления, при котором получена пена. Если, например, пена была получена при атмосферном давлении P_a, то при $P=P_a$ воздушные пузырьки становятся шаровыми и пена превращается в газожидкостную эмульсию, для которой все выведенные выше зависимости неверны.

5. Интегральный закон фильтрации для поверхностных сил. Фильтрация в недеформируемых образцах не зависит от природы движущих сил. В частности, скорость фильтрации не изменится, если объемные силы заменить поверхностными с тем же градиентом. Для пен переход от объемных сил к поверхностным существенно меняет характер течения и вид интегральной зависимости.

Рассмотрим процесс фильтрации жидкости через пену под действием приложенного к пенному столбу перепада давления $\Delta P=P_1-P_2$, когда объемные силы отсутствуют. В этом случае дифференциальный закон фильтрации имеет вид

$$v_f=-\frac{A}{(P_0-P)^4}\frac{\sigma^4}{\mu}\frac{dP}{dz} \tag{5.1}$$

Учитывая, что в установившемся режиме скорость фильтрации постоянна, найдем функцию распределения статического давления по высоте пенного столба $P(z)$. Для этого проинтегрируем выражение (5.1)[1]

$$\int\frac{dP}{(P_0-P)^4}=-\frac{\mu v_f}{A\sigma^4}\int dz$$

откуда получим

$$P_0-P=(C-av_fz)^{-1/3},\quad a=3\mu/A\sigma^4=\text{const} \tag{5.2}$$

Постоянную интегрирования C найдем из граничного условия $P(0)=P_1$

$$C=(P_0-P_1)^{-3},\qquad (P_0-P)^3=\frac{1}{(P_0-P_1)^{-3}-av_fz} \tag{5.3}$$

Неизвестную скорость фильтрации v_f найдем из (5.3), используя второе граничное условие $P(H)=P_2$

$$(P_0-P_2)^3=\frac{1}{(P_0-P_1)^{-3}-av_fH}$$

$$v_f=\frac{1}{aH}\left[\frac{1}{(P_0-P_1)^3}-\frac{1}{(P_0-P_2)^3}\right] \tag{5.4}$$

Эта зависимость выражает интегральный закон фильтрации жидкости через полиэдрическую пену под действием поверхностных сил.

6. Интегральный закон для общего случая фильтрации. В общем случае, когда столб пены находится в поле объемных сил и к нему приложен перепад давления, дифференциальный закон фильтрации выражается зависимостью (3.7). Разделение переменных в этом выражении дает

$$\partial P\left[\frac{\mu v_f}{A\sigma^4}(P_0-P)^4+\gamma\right]^{-1}=-dz \tag{6.1}$$

Интегрирование (6.1) приводит к трансцендентному алгебраическому уравнению, численным решением которого с учетом граничных условий могут быть получены значение скорости фильтрации и функция распределения статического давления по высоте пенного столба. Получить явные зависимости для $P(z)$ и v_f, подобные зависимостям (5.2) и (5.4), в этом случае не удается.

7. О расчетах нестационарной фильтрации. В [7] (см. также [8]) было получено полное (нестационарное) уравнение внутренней гидродинамики пен, представляющее собой дифференциальную зависимость объемной плотности пены от координаты z и времени τ. Относительно функции распределения статического давления

[1] Для полиэдрических пен давление в пузырьках P_0 практически не зависит от статического давления и его можно считать постоянным во всем объеме пены.

$P(z, \tau)$ эта зависимость выглядит так

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{k\sigma^2}{\mu(P_0-P)} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{4}{P_0-P} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 - \frac{4\gamma}{P_0-P} \frac{\partial P}{\partial z} \right] \quad (7.1)$$

При соответствующих граничных условиях это уравнение описывает также фильтрацию жидкости через пену. В частности, выражение (3.7), полученное выше, является первым интегралом уравнения (7.1) в случае установившегося течения ($\partial P/\partial \tau = 0$). В общем случае это уравнение, по-видимому, не интегрируется в явном виде, поэтому для решения сложных задач нестационарной фильтрации жидкости через пену его необходимо интегрировать численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rubin E., Gaden E. L.* Foam separation.— In: New Chemical Engineering Separation Techniques/Ed. Shoen H. M. Chap. 5. New York: Interscience publ., 1962, p. 319–385.
2. *Leonard R. A., Lemlich R.* A study of interstitial liquid flow in foam.— A. I. Ch. E. Journal, 1965, v. 11, № 1, p. 18–19.
3. *Кузнецова Л. Л., Кругляков П. М.* Исследование закономерностей течения растворов ПАВ по каналам Плато – Гиббса пены.— Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 4, с. 928–932.
4. *Bikerman J. J.* Foams. Berlin: Springer-Verlag, 1973, 337 p.
5. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953, 616 с.
6. *Leonard R. A., Lemlich R.* Laminar longitudinal flow between close – packed cylinders.— Chem. Eng. Sci., 1965, v. 20, № 8, p. 790–791.
7. *Канн К. Б., Дружинин С. А.* О влиянии различных факторов на устойчивость пен по вытеканию.— Тез. докл. 2-й Всесоюз. конф. «Пены, их получение и применение». Шебекино, 1979, с. 18.
8. *Кротов В. В.* К теории синерезиса пен.— Тез. докл. 2-й Всесоюзн. конф. «Пены, их получение и применение». Шебекино, 1979, с. 17.

Новосибирск

Поступила в редакцию
6.XII.1982