

УДК 532.536

К ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ В СИСТЕМАХ С ДИССИПАЦИЕЙ

ДЕМЕХИН Е. А., ШКАДОВ В. Я.

Волновые процессы в стекающих пленках жидкости, распространение концентрационных волн в химических реакциях, гидродинамическая неустойчивость ламинарного пламени, термокапиллярная конвекция в тонком слое в слабонелинейном приближении описываются уравнениями вида $h_t + 4hh_x + h_{xx} + h_{xxxx} = 0$. Особую роль в волновых процессах играют нелинейные локализованные сигналы — уединенные волны, или солитоны. В работе методами теории динамических систем проведено полное исследование решений типа стационарных уединенных волн для указанного уравнения.

Стационарные бегущие волны в стекающих пленках жидкости, гидродинамическая неустойчивость ламинарного пламени, стационарная термокапиллярная конвекция в тонком слое, распространение установившихся концентрационных волн в химических реакциях далеко от точки термодинамического равновесия в слабонелинейном приближении описываются уравнением вида [1–3]

$$H''' + H' - cH + 2H^2 = 0 \quad (1)$$

Здесь c характеризует скорость волны, $H(x)$ — отклонение от равновесного положения (толщины, температуры, концентрации и т. д.). Например, двумерные стационарные волны в стекающей жидкой пленке описываются уравнением для толщины слоя $h(y)$ [1]

$$h^3 h_{yyy} + \Delta [6(q-z)^2 - z^2 h^2] h_y' + h^3 - q - z(h-1) = 0 \quad (2)$$

Это уравнение записано в системе, перемещающейся со скоростью волны z , параметр Δ характеризует расход и физические свойства жидкости [4, 5]. При малых значениях Δ из (2) выводится предельное уравнение для слабонелинейных волн. Проведем в (2) замену переменных и параметров по формулам

$$h = 1 + \alpha^3 H, \quad z = 3 + \alpha^3 c, \quad \alpha y = x, \quad q = 1 + \alpha^6 Q, \quad \alpha = (15\Delta)^{1/2}$$

Тогда при $\alpha \rightarrow 0$ из (2) получаем уравнение для $H(x)$

$$H''' + H' - cH + 3H^2 = Q \quad (3)$$

которое простой перенормировкой сводится к (1).

Для локализованных нелинейных сигналов-солитонов уравнение (3) дополняется краевыми условиями: $H, H', H'' \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$).

В уравнении (3) первый член ответствен за диссипацию энергии, второй член — за подкачку энергии. Наличие нелинейного члена позволяет энергии переходить по спектру и обеспечивает возможность существования стационарных волн, в частности уединенных волн (солитонов). Уравнение (3) обладает решениями сложной структуры, демонстрирующими многообразие возможных волновых движений в средах с диссипацией. В [6, 7] даны численные решения для волновых решений сложной структуры уравнений (3), (2).

Для исследования удобно пользоваться понятиями теории динамических систем, рассматривая задачу как эволюционную, а не краевую,

и интерпретируя x как время

$$\frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = w, \quad \frac{dw}{dx} = -v + cu - 2u^2 \quad (4)$$

Динамическая система (4) обладает двумя стационарными точками: $O_1(0, 0, 0)$, $O_2(1/2c, 0, 0)$.

Характеристические уравнения, описывающие поведение малых решений $(u^*, v^*, w^*) \exp \sigma x$ вблизи первой и второй стационарных точек, есть $\sigma^3 + \sigma + c = 0$. Их решениями для точек O_1 и O_2 являются следующие значения:

$$\sigma_{1,1} = 2m > 0, \quad \sigma_{2,3} = -m \pm i\beta, \quad \beta = \sqrt{1 + 3m^2}; \quad \sigma_{1,2} = -2m < 0, \quad \sigma_{2,2} = m \pm i\beta$$

На основании этого заключаем, что первая стационарная точка имеет двумерное устойчивое многообразие W_1^s и одномерное неустойчивое W_1^u ; вторая стационарная точка — двумерное неустойчивое многообразие W_2^u и одномерное устойчивое W_2^s . Следовательно, обе стационарные точки являются седловыми.

Приведем систему (4) к каноническому виду вблизи точки O_1 с помощью замены

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2m\beta & -\beta \\ c & m^2 - \beta^2 & -m \\ c & 4m^2 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = -m\xi - \beta\eta + P(\xi, \eta, \zeta), \quad \frac{d\eta}{dx} = \beta\xi - m\eta + Q(\xi, \eta, \zeta), \quad \frac{d\zeta}{dx} = 2m\zeta + R(\xi, \eta, \zeta) \quad (5)$$

$$P = 2\beta g^2, \quad Q = 2mg^2, \quad R = -4mg^2$$

$$g = \left(2m\xi + 8m^2\beta\eta + \frac{1}{2} \frac{c\beta}{m} \zeta \right) / c\beta(9m^2 + \beta^2)$$

Вторая стационарная точка теперь будет иметь координаты $(0, 1/2c^2, 1/2c^2)$. Аналогичное рассмотрение особых точек проводилось в [8].

Поверхность W_1^s разделяет фазовое пространство (ξ, η, ζ) на два полупространства, которые назовем верхним и нижним. Касательной плоскостью к W_1^s в точке O_1 является $\zeta = 0$. Кривая W_1^u состоит из двух ветвей: одна идет вверх из O_1 , $\zeta > 0$, другая вниз, $\zeta < 0$. Касательной прямой к W_1^u является прямая, перпендикулярная к плоскости $O_1\xi\eta$. Точка фазового пространства, движущаяся вдоль нижней ветви W_1^u , никогда не попадает из нижнего полупространства в верхнее: действительно, при $\zeta < 0$ $d\xi/dx < 0$, что непосредственно вытекает из (5).

Уединенная волна представляет существенно нелинейное решение (3). Для исследования солитонов применимы численные методы, а также общие представления теории динамических систем о поведении траекторий решения в фазовом пространстве.

Уединенная волна с точки зрения теории динамических систем является гомоклинической траекторией, т.е. кривой в фазовом пространстве, двоякоасимптотической к O_1 . Солитон, будучи пересечением двумерного устойчивого и одномерного неустойчивого многообразий O_1 , $\Gamma = W_1^s \cap W_1^u$, структурно-неустойчив и может существовать только для некоторых особых значений c . Одно из таких значений найдено в [9].

Рассмотрим малую окрестность U_ε точки O_1 : $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < \varepsilon^2$. Возьмем в U_ε две плоскости: S_1 и S_0 , $\xi = d$ и $\eta = 0$. Ограничимся в U_ε линеаризованной системой (5), пренебрегая членами P, Q, R . Тогда в U_ε W_1^u — прямая $\xi = \eta = 0$, W_1^s — плоскость $\zeta = 0$. В конкретных расчетах бралось $d = 10^{-3} - 10^{-4}$. Зададим точку $N(0, 0, d) \in W_1^u$ в качестве начальных условий для численного интегрирования (5). При задании параметра c будет полностью определена траектория в фазовом пространстве, про-

ходящая через N . Цель — подобрать c таким образом, чтобы эта траектория вернулась в точку O_1 , т. е. попала на W_1^s . Однако в таком случае траектория попадает в U_ε и пересекает плоскость S_0 в некоторой точке $M(t, 0, 0)$. Если же параметр c близок к собственному значению, но не равен ему, то можно надеяться, что траектория попадет в U_ε , но пересечет S_0 либо выше, либо ниже W_1^s , т. е. точка M сместится в положение $M'(t, 0, \xi_0)$. Требуется подобрать c таким образом, чтобы $\xi_0(c) = 0$.

Введем расстояние от O_1 до точки траектории $\{\xi(x), \eta(x), \zeta(x)\}$, $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. При численном интегрировании $r(x)$ росло от нуля до некоторого максимума $r = r_{\max}$, затем начинало уменьшаться и достигало минимума $r = r_{\min}$. В случае такой траектории, когда r имело несколько максимумов и несколько минимумов, за r_{\max} выбиралось наибольшее значение среди максимумов, а за r_{\min} — наименьшее. В конечном итоге траектория всегда уходила в нижнее полупространство $\zeta < 0$.

При $r_{\min} < \varepsilon$ фазовая траектория попадает в U_ε и возможно построение итерационной процедуры нахождения собственного значения для обращения ξ_0 в нуль. Однако в большинстве расчетов траектория проходила мимо шара U_ε , достигая минимума r , и затем всегда уходила в нижнее полупространство. В этом случае каждому c можно поставить в соответствие число $f = r_{\min}/r_{\max}$ и таким образом определить функцию $f(c)$.

При подобном переборе значений c с последующим численным интегрированием выяснилась следующая картина поведения интегральных кривых.

В области определения $c \in (0, \infty)$ можно выделить счетное множество сегментов, вне которых солитонов нет: $C_1, C_2, \dots, C_n = [c_n', c_n]$, при $n \rightarrow \infty$ $c_n, c_n' \rightarrow 0$; значения c_n, c_n' приведены ниже:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
c_k	1,2162	0,7046	0,5413	0,4567	0,4031	0,3655	0,3370	0,3146
c_k'	1,1805	0,6853	0,5279	0,4462	0,3945	0,3579	0,3303	0,3085

Рассмотрим соображения, из которых выбирались сегменты. При $c > c_1$ траектория перед уходом в нижнее полупространство делает один виток около O_2 и $r(x)$ имеет один максимум и один минимум. При увеличении c от c_1 до ∞ функция $f(c)$ монотонно нарастает. При подходе к c_1 справа $f(c)$ уменьшается и траектория попадает в U_ε ; при $c \rightarrow c_1 + 0$ $\xi_0(c) \rightarrow -0$, $f(c) \rightarrow 0$.

При $c \in (c_{n+1}, c_n')$ фазовая траектория делает $n+1$ виток около O_2 ; $r(x)$ имеет $n+1$ максимум и $n+1$ минимум, причем наименьшим из минимумов является последний перед уходом в нижнее полупространство; функция $f(c)$ имеет один максимум. При приближении к c_{n+1} справа и к c_n' слева функция $f(c)$ уменьшается и траектория попадает в U_ε ; при $c \rightarrow c_n + 0$ и при $c \rightarrow c_n' - 0$ $\xi_0(c) \rightarrow -0$. Внутри сегментов C_n функция $f(c)$ имеет очень сложное поведение.

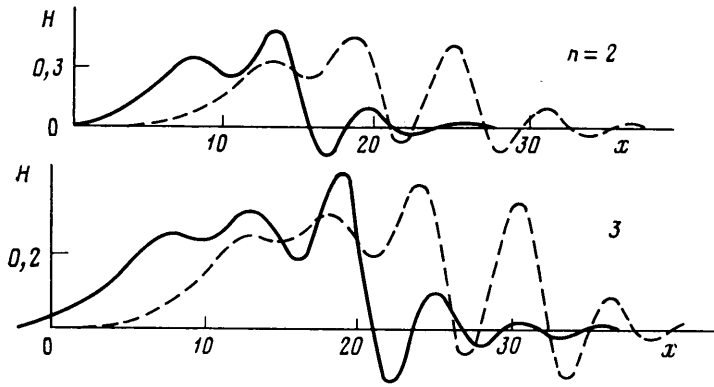
Можно утверждать, что солитоны существуют при счетном множестве значений c , точка $c=0$ является точкой сгущения; c_n соответствует гомоклинической кривой с $n-1$ малой петлей, постепенно раскручивающейся около O_2 и одной большой петлей с последующим возвращением в O_1 по спирали, $H(x)$ имеет при этом n горбов, различающихся по форме. При $c = c_n'$ гомоклиническая кривая имеет $n-1$ малый виток около O_2 и два больших, $H(x)$ имеет $n+1$ горб. Профили солитонов при $n=2, 3$ приведены на фиг. 1: сплошной линией изображен солитон $c=c_n$, штриховой — $c=c_n'$. (Вид уединенной волны для $n=1$ будет приведен ниже.) Амплитуда солитонов $H_{\max} - H_{\min}$ примерно пропорциональна c .

Каждый из сегментов имеет сложную внутреннюю структуру. Воспользовавшись малостью $(c_n - c_n')/c_1$, исследуем эту структуру качественно, применив методы [10].

Пусть при $c = \lambda_0$ существует гомоклиническая кривая Γ_0 . Рассмотрим малую окрестность Λ_0 собственного значения λ_0 : $|c - \lambda_0| < \delta$.

Точечное отображение T_0 плоскости S_0 в S_1 имеет вид [10]

$$\xi_1 = \xi_0 \left(\frac{\xi_0}{d} \right)^{1/2} \cos \left[-\frac{\beta}{2m} \ln \left(\frac{\xi_0}{d} \right) \right], \quad \eta_1 = \xi_0 \left(\frac{\xi_0}{d} \right)^{1/2} \sin \left[-\frac{\beta}{2m} \ln \left(\frac{\xi_0}{d} \right) \right] \quad (6)$$



Фиг. 1

Кривая Γ_0 пересекает S_1 в точке $N(0, 0, d)$, а S_0 — в счетном множестве точек, сходящихся к O_1 . Выберем из этих точек $M(t, 0, 0) \in U_2$. Теперь рассмотрим отображение T_1 плоскости S_1 в S_0 , переводящее точку N в M . В малой окрестности N при $c \in \Lambda_0$ T_1 имеет вид

$$\xi_0 = t + a_{11}\xi_1 + a_{12}\eta_1 + b_1(c - \lambda_0) + \dots, \quad \zeta_0 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\eta_1 + b_2(c - \lambda_0) + \dots \quad (7)$$

Считается, что $\det \|a_{ij}\| \neq 0$, $b_2 \neq 0$ (для определенности $b_2 < 0$).

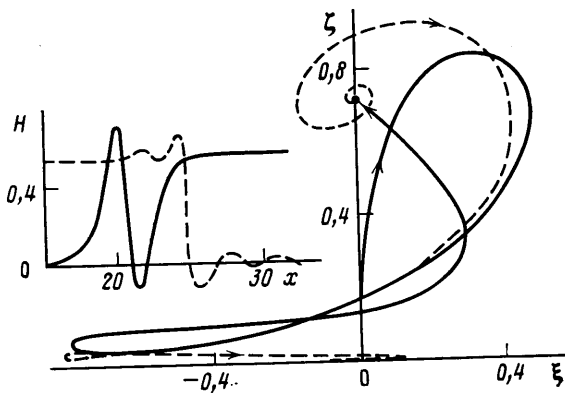
При любом $c \in W_1^u$ пересекает S_1 в точке N , а N отображением T_1 при варьировании c переводится в линию

$$\xi_0 = t + b_1(c - \lambda_0) + \dots, \quad \zeta_0 = b_2(c - \lambda_0) + \dots \quad (8)$$

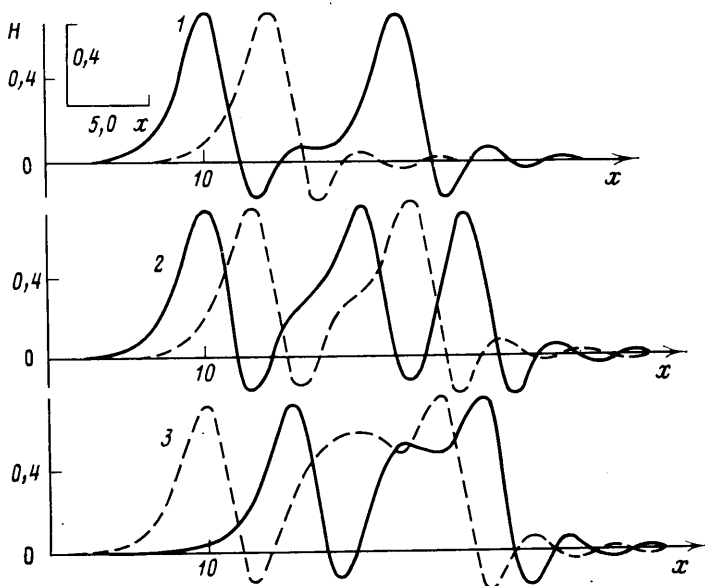
Пересечение этой линии с $\zeta_0 = 0$ происходит при значении $c = \lambda_0$, дающем гомоклиналную кривую Γ_0 . Нижняя часть линии (8) $\zeta_0 < 0$ для значений $c > \lambda_0$ будет соответствовать точкам фазового пространства, всегда покидающим верхнее полупространство $\zeta > 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Часть прямой $c > \lambda_1$ удаляется из рассмотрения. Верхняя часть линии (8) $\zeta_0 > 0$ для значений $c < \lambda_0$ переведется отображением T_0 в спираль с центром в N . В свою очередь T_1 в силу линейности и невырожденности переведет эту спираль снова в спираль на плоскости S_0 с центром в M . Последняя спираль в счетном числе точек M_1, M_2, \dots при $c = \lambda_1, \lambda_2, \dots \in \Lambda_0$ пересечет $\zeta = 0$. Таким образом, при этих значениях c имеют место гомоклинические кривые $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, делающие в фазовом пространстве две петли перед тем как вернуться в O_1 .

Части спирали $\zeta_0 < 0$, как указывалось выше, должны быть исключены из рассмотрения. Пусть $\zeta_0 < 0$ соответствует значениям $c \in (\lambda_1, \lambda_2) \cup (\lambda_3, \lambda_4) \dots$. Тогда для дальнейшего рассмотрения остались сегменты $c \in [\lambda_2, \lambda_3] \cup [\lambda_4, \lambda_5] \dots$, в которых могут существовать солитоны. Отображение T_0 переведет окрестность спирали $\zeta_0 > 0$ для каждого $\lambda_i, i = 1, 2, \dots$, в новую спираль с центром в N , затем T_1 — в спираль на плоскости S_0 с центром в точке M_i , лежащим на $\zeta_0 = 0$. Последняя спираль имеет счетное множество пересечений с прямой $\zeta_0 = 0$ в точках $M_{ij}, j = 1, 2, \dots$. Эти пересечения соответствуют $c = \lambda_{ij}$, при которых имеют место гомоклинические кривые Γ_{ij} , делающие в фазовом пространстве три близко лежащие друг от друга петли перед возвратом в O_1 . Каждая из Γ_{ij} при варьировании c опять породит счетное множество гомоклинических кривых Γ_{ijk} и т.д. Из области Λ_0 при этом последовательно удаляются открытые промежутки, что в пределе дает для собственных значений c множество типа канторова.

Если исходный солитон Γ_0 одnogорбый, то порождаемые решения $H(x)$ представляют собой n -горбые солитоны, второй и последующие горбы которых практически повторяют первый горб. Солитоны различаются числом горбов и расстоянием между ними, но не формой горбов.



Фиг. 2



Фиг. 3

Численное исследование показало, что ситуация несколько сложнее, чем описано выше.

Каждый из сегментов имеет внутреннюю структуру, которую подробно рассмотрим на примере S_1 . Перечислим предварительные замечания.

1. При $c = \mu_1 = c_1 \approx 1,2162$ имеет место гомоклиническая кривая с одной петлей в фазовом пространстве.

2. При $c = \mu_3 \approx 1,20140$ существует гомоклинический контур, приведенный на фиг. 2. Он состоит из двух гетероклинических кривых. Одна из кривых, изображенная сплошной линией, является негрубой, т. е. неустойчивой к малому возмущению c . Эта кривая идет из O_1 в O_2 и может быть описана аналитически [3]

$$H = \frac{15}{19} \kappa \left(1 - \frac{9}{2} \text{th } \kappa x + \frac{11}{2} \text{th}^3 \kappa x \right), \quad \kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}$$

Другая кривая — грубая кривая, выходящая из O_2 в O_1 (штриховая линия). Вторая гетероклиническая кривая существует при $c \in (0, \infty)$, она находилась численно.

3. При $c \in (1,791; 0,449)$ существуют периодические траектории γ_1 и γ_2 седлового типа [6] и грубая гетероклиническая траектория $\gamma_{12}(\gamma_{21})$, асимптотическая к $\gamma_1(\gamma_2)$ при $x \rightarrow -\infty$ и к $\gamma_2(\gamma_1)$ при $x \rightarrow +\infty$.

4. При $c = \mu_2 \approx 1,20795$ (и при $c = \mu_4 \approx 1,18203$) имеется гомоклинический контур, состоящий из двух гетероклинических кривых. Первая негрубая кривая стремится к O_1 при $x \rightarrow -\infty$ и к периодическому решению $\gamma_1(\gamma_2)$ при $x \rightarrow +\infty$. Вторая грубая кривая стремится к O_1 при $x \rightarrow +\infty$ и к $\gamma_1(\gamma_2)$ при $x \rightarrow -\infty$.

Учитывая сказанное в пунктах 2—4 о наличии в C^1 гомоклинических контуров, отображение плоскости S_1 в S_0 только в узкой окрестности $c = \mu_1$ можно описывать разложением (7), так как теперь малые изменения c могут привести к конечным результатам. Это связано с возможностью попадания траекторий в окрестности гомоклинических контуров [11]. Понятие о поведении интегральных кривых во всем C_1 можно получить, если представить отображение T_1 в виде произведения отображений в окрестности: седловых периодических движений γ_1, γ_2 , седловой точки O_2 (как это было сделано для O_1) и глобальных кусков траекторий [12].

Образующиеся при варьировании параметра c солитоны должны быть близки к исходным гомоклиническим контурам, соответствующим $c = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, и образованы разрушением контуров вблизи седловых точек $O_{1,2}$ и седловых циклов. Поэтому, несмотря на сложную картину поведения гомоклинических кривых, она является комбинацией всего четырех элементов.

Численный анализ полностью подтвердил эти качественные заключения. Оказалось, что внутри C_1 имеют место новые сегменты $\mu_1 \in C_{11} = [c_{11}, c_{11}']$, $\mu_2 \in C_{12} = [c_{12}', c_{12}]$, $\mu_3 \in C_{13} = [c_{13}, c_{13}']$, $\mu_4 \in C_{14} = [c_{14}, c_{14}']$, вне которых солитонов нет. Значения c_{ij}, c_{ij}' приведены ниже:

k	1	2	3	4
c_{1k}	1,21615	1,20815	1,20233	1,18207
c_{1k}'	1,21532	1,20773	1,11988	1,18052

На фиг. 3 солитон c_{ij} изображен штриховой линией, c_{ij}' — сплошной; цифры на фигуре соответствуют индексу j . Сегмент C_{11} начинается одногорбым солитоном и заканчивается двугорбым, второй горб которого приблизительно повторяет первый; $c_{12}(c_{14}')$ соответствует двугорбому солитону, второй виток которого в фазовом пространстве делается вблизи $\gamma_2(\gamma_1)$, c_{12}' — трехгорбому, со вторым витком около γ_2 и третьим около γ_1 , c_{14} — трехгорбому солитону с двумя витками около γ_1 .

При $c = c_{13}, c_{13}'$ имеет место солитон, образованный разрушением гомоклинического контура вблизи седловой точки O_2 .

Каждый из сегментов C_{ij} имеет внутреннюю структуру: при растяжении сегментов C_{ij} опять происходило разбиение на новые сегменты C_{ijk} , вне которых не существовало гомоклинических кривых. Граничными точками сегментов снова были солитоны, построенные как комбинация указанных выше четырех элементов. Дальнейшее численное исследование сильно затруднялось.

Строение C_2, C_3, \dots оказалось идентичным строению C_1 . Отличие состояло в отсутствии гомоклинического контура, описанного в замечании 2, и как следствие, гомоклинические кривые теперь являлись комбинацией трех, а не четырех элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1, с. 43—51.
2. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 28—34.
3. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. — Prog. Theor. Phys., 1976, v. 55, № 2, p. 356—369.

4. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1, с. 63–66.
5. Демехин Е. А. Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 5, с. 36–44.
6. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое.— ПММ, 1984, т. 48, № 4, с. 691–696.
7. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Бифуркации уединенных волн в стекающем слое жидкости.— Вестн. МГУ. Математика, механика, 1986, № 2.
8. Семенова И. П., Якубенко А. Е. Стационарные волновые режимы в стекающей пленке вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 3, с. 16–22.
9. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 142–146.
10. Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений.— Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 3, с. 558–561.
11. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976, 384 с.
12. Гаврилов Н. К. О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур.— Мат. заметки, 1973, т. 14, № 5, с. 687–696.

Краснодар,
Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1985