

УДК 532.529

КОЛЕБАНИЯ ПАРОГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

ХАБЕЕВ Н. С., ШАГАПОВ В. Ш.

Показано, что парогазовые пузырьки, совершающие малые радиально-симметричные колебания в акустическом поле, при больших паросодержаниях неустойчивы по амплитуде, что связано с совместным действием фазовых переходов и капиллярных эффектов. Определено критическое значение концентрации пара в пузырьке, разграничивающее области качественно различного поведения пузырька в акустическом поле. Получены выражения для декремента затухания радиальных колебаний парогазовых пузырьков и инкремента, характеризующего скорость роста амплитуды колебаний в области неустойчивости. Показано, что добавление незначительного количества газа в паровой пузырек приводит к заметному уменьшению инкремента.

Установлено, что в частном случае парового пузырька временной инкремент, характеризующий темп развития неустойчивости, имеет тот же порядок, что и вторая резонансная частота парового пузырька. Это обстоятельство может служить объяснением, почему установленное в ряде теоретических работ и широко обсуждаемое в литературе явление второго резонанса при колебаниях паровых пузырьков до сих пор не подтверждено экспериментально.

Постановка задачи о сферически-симметричных процессах около парогазовых пузырьков изложена в [1], а их малые колебания детально исследованы в [2-4].

Система уравнений, описывающих радиально-симметричные колебания пузырька, заполненного паром жидкости и нерастворимым в жидкости газом, в предположении однородности давления в пузырьке и с учетом взаимной диффузии компонент парогазовой смеси, приведена в [2]. Там же в рамках линейного представления получены аналитические решения задачи о свободных и вынужденных колебаниях пузырька. Воспользуемся этим решением для исследования устойчивости радиальных колебаний парогазового пузырька.

В случае малых свободных колебаний пузырька его радиус может быть описан действительной частью выражения $R=R_0[1+\delta \exp(ht)]$, где δ — комплексное число, отвечающее условию $|\delta| \ll 1$, а частота колебаний $f = \omega/2\pi = \text{Im}\{h\}/2\pi$.

Система основных уравнений линейризуется. Условие существования нетривиального решения системы линейных уравнений приводит к трансцендентному характеристическому уравнению относительно H [2], которое в квазиравновесном случае имеет вид

$$f(H) = \frac{H^2}{\Pi^2} - S - \frac{3\Gamma H}{\Phi - H} = 0 \quad (1)$$

$$H = \frac{hR_0^2}{D}, \quad S = \frac{2\sigma}{R_0 p_0}, \quad \Pi = \frac{R_0(p_0/\rho_l)^{1/2}}{D}$$

$$p_0 = p_\infty + \frac{2\sigma}{R_0}, \quad \Gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\Phi = 3 \text{Le} B_2 [\Gamma(M-1) + 1] + 3\Gamma \left[1 + k_2(1-k_0) + \text{Le} k_3(1-k_0) \frac{B_2/B_1 - 1}{1 - \text{Le}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Le} B_2 (1 - k_0) \frac{MB_g}{k_0 B_0 B_1} \left[(1 + H_1^{1/2}) M \frac{\lambda_l}{\lambda_0} + \right. \\
& + B_2 \left(M - 1 + \frac{1}{\Gamma} \right) \left. \left\{ k_3 (1 - k_0) \frac{1 - B_2/B_1}{1 - \text{Le}} - \frac{1}{\kappa \text{Le}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left[(1 + H_1^{1/2}) \frac{\lambda_l}{\lambda_0} + B_2 \right] (1 - k_0) \frac{MB_g}{k_0 B_0 B_1} \right\}^{-1} \right. \\
& \text{Le} = \frac{a_0}{D}, \quad M = \frac{B_v T_0}{l}, \quad \kappa = \frac{c_p T_0}{l} \\
& k_2 = \frac{B_v - B_g}{B_0 \Gamma}, \quad k_3 = \frac{B_v - B_g}{c_p}, \quad H_1 = \frac{HD}{a_l}, \quad H_2 = \frac{HD}{a_0} \\
& B_1 = H^{1/2} \text{cth} H^{1/2} - 1, \quad B_2 = H_2^{1/2} \text{cth} H_2^{1/2} - 1
\end{aligned}$$

Здесь D — коэффициент диффузии, ρ — плотность, p — давление, T — температура, σ — коэффициент поверхностного натяжения, c_p и c_v — теплоемкость при постоянных давлении и объеме, $a = \lambda/\rho c$ — коэффициент температуропроводности, B — газовая постоянная, l — удельная теплота парообразования, k_0 — равновесное значение концентрации пара в пузырьке. Нижние индексы l, v, g отнесены соответственно к параметрам жидкости, пара и газа, индекс 0 — к параметрам парогазовой смеси, p_∞ — гидростатическое давление в жидкости.

Проанализируем условие существования у уравнения (1) действительного положительного корня, т. е. временного инкремента d , характеризующего темп развития неустойчивости.

Нетрудно видеть, что функция $f(H)$ на положительной полуоси $(0, \infty)$ непрерывна и

$$f(H) \rightarrow \infty, \quad H \rightarrow \infty \quad (2)$$

$$f_0 = \lim_{H \rightarrow 0} f(H) = 3 \left[1 + \frac{B_v k_0}{B_g (1 - k_0)} \right]^{-1} + \left(1 + \frac{p_\infty R_0}{2\sigma} \right)^{-1}$$

Из (2) видно, что $f_0 < 0$, если $k_0 > k_*$

$$k_* = \frac{\Phi}{1 + \Phi}, \quad \Phi = \frac{B_g}{B_v} \left(2 + \frac{3}{2} \frac{p_\infty R_0}{\sigma} \right) \quad (3)$$

Таким образом, если паросодержание в пузырьке больше некоторого критического k_* , то уравнение (1) имеет действительный положительный корень.

Отметим, что формула (3) для k_* совпадает с выражением для критического значения концентрации из [2], разделяющего области качественно различного поведения парогазовых пузырьков в акустическом поле. Причем вынужденные колебания пузырька в области $0 \leq k_0 < k_*$ подобны колебаниям газового пузырька, а в области $k_* < k_0 \leq 1$ — колебаниям парового пузырька.

Если условие (3) пересчитать к парциальному давлению пара в пузырьках $p_{v0} = p_s(T_0)$, то получим

$$p_s(T_0) > p_\infty + 4\sigma/3R_0$$

В достаточно широком диапазоне изменения параметров системы жидкость — парогазовый пузырек удовлетворяются условия

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda l}{\lambda_0} \gg 1, \quad \frac{a_l}{a_0} \ll 1, \quad \text{Le} \sim 1, \quad \kappa \sim 1 \\
|B_2| \ll |1 + H_1^{1/2}| \frac{\lambda_l}{\lambda_0} \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\left| k_3(1-k_0) \frac{1-B_2/B_1}{1-Le} \right| \ll \frac{1}{\kappa Le}$$

Анализ уравнения (1), а также численные расчеты показывают, что при этом для искомого положительного корня (инкремента d) справедливы оценки

$$d \leq \frac{D}{R_0^2}, \quad d \leq \frac{a_0}{R_0^2}, \quad d^2 \ll \frac{p_0 S}{\rho_l R_0^2} \quad (5)$$

Из (5) следует, что для B_1 и B_2 справедливо представление $B_1=H/3$, $B_2=H_2/3$. Тогда уравнение (1) можно привести к виду

$$3 \left[(1-k_0) \frac{B_g}{B_0} + k_0 \frac{y^2}{\beta(1+y)} \right] \left[1 + \frac{k_0 y^2}{\beta(1+y)} \right] - S = 0 \quad (6)$$

$$y = \left(\frac{d R_0^2}{a_l} \right)^{1/2}, \quad \beta = 3 \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \right) \kappa^2 \frac{B_0 \rho_l c_l}{B_0 \rho_0 c_p}$$

Решение уравнения (6) имеет вид

$$y = \frac{2}{\sqrt{1+4A}-1}, \quad A = \frac{k_0(1-S/3)}{\beta[S/3-(1-k_0)B_g/B_0]} \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия (3) $A > 0$ и, следовательно, $y > 0$.

Если $A \ll 1$, то $y = A^{-1}$ или $d = a_l/R_0^2 A^2$, если $A \gg 1$, то $y = A^{-1/2}$ или $d = a_l/R_0^2 A$.

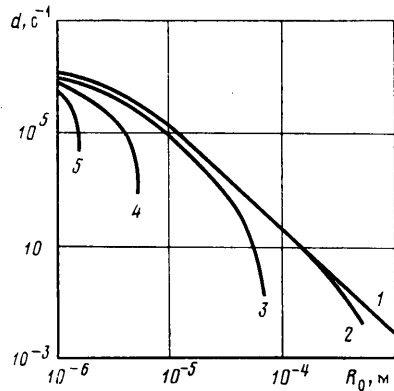
На фигуре приведена зависимость инкремента d от радиуса R_0 для системы вода — паровоздушный пузырек при атмосферном давлении. Кривые 1–5 соответствуют значениям паросодержания $k_0 = 1; 0,999; 0,99; 0,9; 0,8$. Добавление незначительного количества газа в паровой пузырек может заметно снизить инкремент.

Аналогично тому, как это сделано в [5], можно показать, что уравнение (1) в правой комплексной полуплоскости других решений не имеет. В случае паровых пузырьков выражение для A упрощается и имеет вид $A = (3/S - 1)/\beta$.

Если $S \ll 1$, то при $A \gg 1$ и $A \ll 1$ выражения для инкремента имеют соответственно вид

$$d = F R_0^{-3}, \quad F = 2\sigma \lambda_l T_0 (l \rho_v)^{-2} \quad (8)$$

$$d = F^2 a_l^{-1} R_0^{-4} \quad (9)$$



В линейных системах при колебаниях под действием внешней силы общее решение складывается из собственных (которые обычно затухают) и вынужденных колебаний. При исследовании установившихся вынужденных колебаний парового пузырька в акустическом поле обнаружено интересное явление второго резонанса, вызванное частотной дисперсией [6–12], так как сжимаемость паровых пузырьков в отличие от газовых существенно зависит от частоты колебаний. На низких частотах, когда успевают происходить фазовые переходы, изменение объема пузырька сопровождается изменением давления в нем лишь за счет капиллярных эффектов.

Сравнение (9) с выражением для второй резонансной частоты ω_R парового пузырька, полученным впервые в [9], показывает, что $d = 2\omega_R$.

Таким образом, инкремент, характеризующий скорость роста амплитуды колебаний пузырька вследствие неустойчивости, имеет тот же порядок, что и вторая резонансная частота парового пузырька. Это обстоятельство (наряду с малой добротностью второго резонанса) может служить объяснением, почему установленное в ряде теоретических работ [6–12] и широко обсуждаемое в литературе явление второго резонанса при колебаниях паровых пузырьков до сих пор не подтверждено экспериментально. В свете изложенного выше экспериментальное обнаружение второго резонанса паровых пузырьков представляется проблематичным.

Найдем корень уравнения (1), соответствующий затухающим колебаниям. В случае достаточно крупных парогазовых пузырьков, когда влияние процесса тепломассообмена на их динамику мало, можно пренебречь капиллярными эффектами и решение будем искать в том же виде как и в [13], переписав уравнение (1) в форме

$$H + \frac{3\Gamma\Pi^2}{H} - \Phi = 0 \quad (10)$$

$$H = \sqrt{3\Gamma} \Pi (\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad \sin \alpha \approx 1, \quad \cos \alpha < 0, \quad |\cos \alpha| \ll 1 \quad (11)$$

Используя представление (11), из действительной части уравнения (10) получим

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}\{\Phi\}}{2\sqrt{3\Gamma}\Pi} \quad (12)$$

Предположим, что $\Pi \gg 1$. Тогда из (11) и оценок (4) следует, что $|H| \gg 1$, $|H_1| \gg 1$, $|H_2| \gg 1$ и для B_1 и B_2 справедливо представление

$$B_1 = \sqrt{H}, \quad B_2 = \sqrt{H_2} \quad (13)$$

Вычисляя $\operatorname{Re}\{\Phi\}$ с учетом (4), (12), (13), получим следующее выражение для логарифмического декремента затухания колебаний крупных парогазовых пузырьков:

$$\Lambda = -2\pi \cos \alpha = \frac{3\pi\Psi}{\sqrt{\operatorname{Re}}}, \quad \operatorname{Re} = \frac{2R_0}{a_0} \sqrt{\frac{3\Gamma p_0}{\rho_l}} \quad (14)$$

$$\Psi = \Gamma - 1 + k_0 \left[\frac{k_0 B_0 \lambda_0}{(\Gamma - 1) B_0 \lambda_l \kappa^2} \sqrt{\frac{a_l}{a_0}} + \frac{(1 - k_0) B_g}{\Gamma B_0} \sqrt{\frac{a_0}{D}} \right]^{-1}$$

где Re — число Пекле, в котором в качестве скорости выбрана характерная радиальная скорость малых свободных колебаний адиабатического пузырька [13].

Формула (14) справедлива для пузырьков, размер которых удовлетворяет неравенствам

$$\Pi \gg 1, \quad \sqrt{\operatorname{Re}} \gg \Psi$$

$$R \gg D \sqrt{\rho_l / p_0}, \quad \sqrt{R_0} \gg \sqrt{R_*} = \Psi \sqrt{\rho_l a_0^2 / 12 \Gamma p_0}$$

При $p_0 = 0,1$ МПа для системы вода — паровоздушный пузырек при переходе от газовых к паровым пузырькам R_* меняется от 10^{-7} до $6 \cdot 10^{-5}$ м.

В частных случаях $k_0 = 0$ и $D = 0$, формула (14) совпадает с выражением для декремента теплового затухания колебаний газовых пузырьков без фазовых переходов, а при $k_0 = 1$ — с соответствующим выражением для паровых пузырьков [13].

Авторы благодарят Р. И. Нигматулина за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Нагиев Ф. Б., Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях парогазовых пузырьков.— Акуст. журн., 1979, т. 25, № 2, с. 271–279.
3. Fanelli M., Prosperetti A., Reali M. Radial oscillations of gas-vapor bubbles in liquids. Part I: Mathematical formulation.— Acustica, 1981, v. 47, № 4, p. 253–265.
4. Fanelli M., Prosperetti A., Reali M. Radial oscillations of gas-vapor bubbles in liquids. Part II: Numerical examples.— Acustica, 1981, v. 49, № 2, p. 98–109.
5. Айдагулов Р. Р., Хабеев Н. С., Шаганов В. Ш. Структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена.— ПМТФ, 1977, № 3, с. 67–74.
6. Finch R. D., Neppiras E. A. Vapor bubble dynamics.— J. Acoust. Soc. Amer., 1973, v. 53, № 5, p. 1402–1410.
7. Wang T. Effects of evaporation and diffusion on an oscillating bubble.— Phys. Fluids, 1974, v. 17, № 6, p. 1121–1126.
8. Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков.— Акуст. журн., 1975, т. 21, № 5, с. 815–821.
9. Хабеев Н. С. Резонансные свойства паровых пузырьков.— В сб.: IX Всесоюз. акуст. конф., 1977, секц. Б. М., 1977, с. 95–98.
10. Marston P. L. Evaporation-condensation resonance frequency of oscillating vapor bubbles.— J. Acoust. Soc. Amer., 1979, v. 66, № 5, p. 1516–1521.
11. Алексеев В. Н., Юшин В. П. Особенности поведения паровых пузырьков в поле звуковой волны.— В сб.: Вопросы судостроения, сер. Акустика. Вып. 12. М., 1979, с. 59–68.
12. Хабеев Н. С. Резонансные свойства паровых пузырьков.— ПММ, 1981, т. 45, № 4, с. 696–703.
13. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 6, с. 80–87.

Москва
Уфа

Поступила в редакцию
13.III.1985