

УДК 532.526

**МЕТОД МЕРИДИОНАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ  
ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

ЛУНЕВ В. В., СЕНКЕВИЧ Е. А.

Общеизвестны трудности и громоздкость задач расчета распределения теплообмена по поверхности тела при трехмерном обтекании. Как показано ниже, эту задачу можно существенно упростить при малом влиянии трехмерности течения (учет которой важен в ряде приложений). В этом случае пространственную задачу можно свести к совокупности двумерных задач вдоль линий меридиональных сечений тела.

Это подробно показано на примере метода эффективной длины или локального подобия, который широко используется в инженерной практике и особенно оправдан при турбулентном законе теплообмена. Но в трехмерном случае он теряет элементарность ввиду необходимости расчета распределения линий тока по поверхности тела [1-4]. В случае малой несимметрии обтекания задачу можно существенно упростить в основном за счет доказанной возможности замены (с квадратичной точностью) линий тока линиями меридиональных сечений. Для точных уравнений пограничного слоя доказана в указанном приближении возможность независимого их решения вдоль каждой меридиональной плоскости (правило меридиональных сечений).

1. Согласно пространственной аналогии метода локального подобия, распределение тепловых потоков  $q$  по поверхности тела описывается теми же соотношениями, что и в осесимметричном случае, но с эквивалентным радиусом  $h$  вместо обычного расстояния  $r$  до оси симметрии

$$q = A_{L,t} P U h^{n/1-n} \xi^{-n}, \quad \xi = \int_0^s P U h^{1/1-n} dS \quad (1.1)$$

Здесь  $P$ ,  $U$  — давление и скорость газа;  $S$  — длина, отсчитываемая вдоль линии тока от критической точки;  $n=1/2$ ,  $1/5$  для ламинарного  $L$  и турбулентного  $t$  законов теплообмена;  $A_{L,t}$  — размерная величина, зависящая от условий обтекания и закона теплообмена. Отметим, что для переходной зоны обычно принимают

$$q = (1-\Gamma) q_L + \Gamma q_t$$

где  $\Gamma$  — коэффициент перемежаемости, равный нулю в начале и единице в конце переходной области [5].

Радиус эквивалентного осесимметричного тела  $h$ , характеризующий трехмерность растекания, пропорционален расстоянию между двумя близкими линиями тока на поверхности тела. Если  $\theta$  — угол между ними, то, вводя в точке на первой линии тока декартову систему координат  $S$ ,  $\eta$  с осями, направленными вдоль и по нормали к местной линии тока, и касательный к соседней линии тока единичный вектор  $e$  с составляющими  $e_s=1$ ,  $e_\eta=\theta$ , можно получить из геометрических соображений двумерный оператор дивергенции [6, 7] в виде

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dS} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial e_s}{\partial S} + \frac{\partial e_\eta}{\partial \eta} = \text{div } e \quad (1.2)$$

В дальнейшем будем использовать две системы координат с началом в точке торможения тупого тела: цилиндрическую  $(x, r, \varphi)$ , ось которой является примерной осью симметрии, и ортогональную криволинейную  $(\xi, \varphi)$  с координатой  $\xi$ , связанной с длиной линии меридионального сечения  $\varphi = \text{const}$  на поверхности тела. В последней системе уравнение (1.2) примет вид

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dS} = \text{div } \mathbf{e} = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 e_\xi) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_1 e_\varphi) \quad (1.3)$$

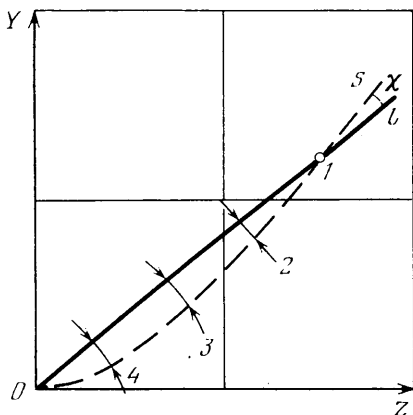
где  $h_1$  и  $h_2$  — коэффициенты Ламэ для координат  $\xi$  и  $\varphi$ .

Малые параметры в задаче появляются через малую несимметрию формы тела или несимметрию распределения давления, которые задаются в виде разложений

$$\begin{aligned} x &= F(r, \varphi) = F_0(r) + \varepsilon F_1(r, \varphi) + \dots \\ P &= P_0(\xi) + \varepsilon P_1(\xi, \varphi) + \dots = P_0(r) + \varepsilon P_1(r, \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вообще говоря, параметры  $\varepsilon$  в этих разложениях независимы и различны, но это можно учесть видом функций  $F_1$  и  $P_1$ .

В дальнейшем будем предполагать, что из малости величины асимметрии течения следует близость порядка  $\varepsilon$  поверхностных линий тока к линиям меридиональных сечений во всей области течения, что справедливо по крайней мере для достаточно коротких затупленных тел (кроме окрестности пространственной точки торможения, рассмотренной ниже)<sup>1</sup>.



Тогда, обозначая через  $(u, w)$  проекции скорости на оси координат  $(\xi, \varphi)$ , с квадратичной точностью будем иметь

$$u = U, \quad e_\xi = 1, \quad e_\varphi = \chi = w/u \sim \varepsilon$$

Проведем через произвольную точку  $I$ , в которой надо определить тепловой поток, меридиональную плоскость, пересекающую тело вдоль кривой  $l$  (см. фигуру). В формулу (1.1) для тепловых потоков входят местные параметры в точке  $I$  и, кроме того, через функционал  $\xi$  и уравнение (1.3) для  $h$  — параметры вдоль линии тока  $S$ .

Однако если угол  $\chi$  — угол наклона линии тока  $S$  к меридиональной кривой — имеет порядок  $\varepsilon$ , то длина дуг этих линий, заключенных между близкими сечениями 2—3 на фигуре, будет различаться на величину порядка  $\varepsilon^2$ , т. е.  $dS = dl = (1 + F_r^2)^{1/2} dr$ . Также с квадратичной точностью возможен и перенос параметров с линий тока на близкую линию  $l$ . Действительно, заменяя, например, в разложении (1.4) координату  $\varphi$  на  $\varphi + \Delta\varphi$ , где  $\Delta\varphi \sim \varepsilon$ , внесем ошибку в определении функции лишь порядка  $\varepsilon^2$ .

Отдельного анализа требует окрестность пространственной точки торможения, где распределение линий тока невязкого течения имеет особенность. Поместим в ней начало криволинейной системы координат  $(y, z)$ , оси которой совпадают с направлениями главных кривизн. Тогда вблизи начала координат соответствующие составляющие скорости равны  $u_y = \beta_1 y$ ,  $u_z = \beta_2 z$ , форма линий тока имеет вид  $z = \text{const } y^k$ , где  $k = \beta_2 / \beta_1$ , и величины

<sup>1</sup> Известно, что вблизи поверхности, например, конуса, обтекаемого под углом атаки, все линии тока собираются на подветренной стороне (с образованием вихревой особенности — точки Ферри [8]). Этот эффект может ограничивать пригодность дальнейших рассуждений для пограничного слоя, более тонкого, чем пространственный слой, в котором появляется эта особенность.

$\beta_1$  и  $\beta_2$  обычно пропорциональны величинам главных кривизн. Эти линии тока образуют узел и при  $k > 1$  изображены пунктиром на фигуре.

Плоскость, касательная к поверхности тела в точке торможения, наклонена к плоскости  $x = \text{const}$  на угол порядка  $\varepsilon$ , поэтому можно положить  $y = r \cos(\varphi - \varphi_0)$ ,  $z = r \sin(\varphi - \varphi_0)$ , где  $\varphi_0$  — угол между плоскостями  $xu$  и  $\varphi = 0$ . Тогда распределение скоростей и форму линий тока можно представить в виде

$$\begin{aligned} u &= r[\beta_1 \cos^2(\varphi - \varphi_0) + \beta_2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)] = r/\beta_0(1 + \kappa), \\ w_\varphi &= -r(\beta_2 - \beta_1) \cos 2(\varphi - \varphi_0) = -2r\beta_0\kappa \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \varphi_0) &= \text{const } r^{k-1} \cos^k(\varphi - \varphi_0), \quad \beta_0 = (\beta_1 + \beta_2)/2 \\ \kappa &= (\beta_2 - \beta_1)/(2\beta_0) \cos 2(\varphi - \varphi_0) \end{aligned}$$

Так как  $(\beta_2 - \beta_1)/2\beta_0 \sim \varepsilon$ , то можно положить  $u = U$  всюду, а угол  $\chi = w/U$  будет малым. Однако для каждой линии тока, проходящей через точку  $I$ , существует область ( $0 - 4$  на фигуре), где отклонения выбранных линий тока от меридиональной линии будет большим, что в принципе может привести к погрешности при замене в процессе интегрирования линий тока линиями меридиональных сечений. Для оценки этой погрешности перепишем последнее уравнение (1.5) в виде

$$\left( \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \right)^k \left( \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \right) = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{k-1} = 1 - (k-1) \ln \frac{r_2}{r_1} + \dots$$

Отсюда при  $(k-1) \sim \varepsilon$  следует, что  $\varphi_2 - \varphi_1 \sim \varepsilon$  почти всюду, кроме пренебрежимо малой области  $(r_2/r_1) \sim e^{-1/\varepsilon}$ .

Таким образом, с точностью порядка  $\varepsilon^2$  вычисление всех величин, входящих в формулу (1.1) для тепловых потоков, можно проводить вдоль линий меридиональных сечений тела вместо линий тока (в исходном методе), что делает излишним определение последних.

2. Для практической реализации метода нужны коэффициенты Ламэ. Для их определения зададим семейство координат  $(\zeta, \varphi)$  в параметрическом виде

$$r = R(\zeta, \varphi), \quad x = F(R(\zeta, \varphi), \varphi) \quad (2.1)$$

Касательные векторы к линиям  $\zeta = \text{const}$  и  $\varphi = \text{const}$  имеют соответственно в системе координат  $(x, r, \varphi)$  составляющие  $(F_r R_\zeta + F_\varphi, R_\zeta, 1)$ ,  $(F_r R_\zeta, R_\zeta, 0)$  [6, 7] и условие их ортогональности приводит к уравнению

$$(\partial R / \partial \varphi) \zeta = -F_\varphi F_r (1 + F_r^2)^{-1} \quad (2.2)$$

Тогда коэффициенты Ламэ легко определить, вычисляя длины  $h_1 d\zeta$  и  $h_2 d\varphi$  малых отрезков вдоль направлений  $\varphi = \text{const}$  и  $\zeta = \text{const}$

$$h_1 = (1 + F_r^2)^{1/2} R_\zeta, \quad h_2 = [r^2 + F_\varphi^2 (1 + F_r^2)^{-1}]^{1/2} \quad (2.3)$$

Функции  $R(\zeta, \varphi)$  и  $F(r, \varphi)$  зависят от разных аргументов, поэтому при вычислении производных нужно учесть вспомогательные соотношения

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)_\varphi &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_\varphi \left( \frac{\partial r}{\partial \zeta} \right)_\varphi = h_1 (1 + F_r^2)^{-1/2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_\varphi, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_\zeta &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_\varphi R_\varphi + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_r \end{aligned} \quad (2.4)$$

С учетом этого из (2.3) после преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\ln h_1) = F_\varphi \frac{\partial}{\partial l} (1 + F_r^2)^{-1} \quad (2.5)$$

Для определения функции  $h_1(r, \varphi)$  из уравнений (2.2) и (2.5) следует задать распределение  $h_1 = h_{10}(l)$  или  $\zeta(l)$  в каком-либо сечении  $\varphi = \varphi_0$ , ниже примем  $\zeta = l$  (при  $\varphi = 0$ ).

Для эллиптического параболоида

$$x = c^2 r^2 (1 + a \sin 2\varphi) / 2 \quad (2.6)$$

с учетом  $F_\varphi = 1/2 r F_{r\varphi}$  уравнение (2.2) имеет интеграл  $r(F_r^2 + 1)^{1/2} = c(\xi)$ . Если  $K_1$  и  $K_2$  — главные кривизны тупого тела в точке торможения при  $r=0$ , то уравнение (2.6) является локальной аппроксимацией формы этого тела при  $c^2 = K_1 + K_2$ ,  $a = (K_1 - K_2)/c^2$ . Для этой окрестности справедливы следующие разложения:

$$\begin{aligned} l &= r + 1/6 c^2 r^3 (1 + a \sin 2\varphi)^2, \quad l(\xi) = \xi^{-1/2} c^2 \xi^3 + \dots - 1 + h_1 = \\ &= 1/2 c^2 r^2 (1 + a \sin 2\varphi)^2 = 1/2 c^2 \xi^2 (1 + a \sin 2\varphi)^2 \\ h_2 &= r(1 + 1/2 c a^2 r^2 \cos 2\varphi) \end{aligned}$$

Как видно, процедура определения  $h_1$  далеко не тривиальна, но в линейном приближении можно положить  $h_2 = r(1 + O(\varepsilon^2)) \approx r$  всюду, а  $h_1$  определять по формуле (2.5).

3. Теперь нетрудно получить явные выражения для эквивалентного осесимметричного тела. Опуская в уравнении (1.3) некоторые члены порядка  $\varepsilon^2$ , получим его решение с точностью до несущественного постоянного множителя  $K = K(\varphi)$  в виде

$$J = \int_{l_0}^l \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{w}{U} \right)_{\xi} dl, \quad l_0 \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

$$h = h_2 \exp J$$

Параметр  $l_0$  введен для корректного описания интеграла  $J$  в точке  $l=0$ , поскольку подынтегральное выражение, согласно (1.5), возрастает как  $1/l$  или  $(1/r)$ , но  $h$  стремится к нулю по закону  $l^{1-2\kappa}$  или  $r^{1-2\kappa}$

$$U = r\beta_0(1 + \kappa), \quad w_\varphi = -2\kappa\beta_0 r, \quad J = -2\kappa \ln r, \quad h = r^{1-2\kappa}$$

Скорость  $w$  при заданном распределении давления определяется из уравнения

$$\frac{1}{h_1} u \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{w}{h_2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + uwk_2 - u^2 k_1 = -\frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \quad (3.2)$$

$$k_1 = \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial \ln h_1}{\partial \varphi} \right)_{\xi}, \quad k_2 = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial \ln h_2}{\partial \xi} \right)_{\varphi} = \left( \frac{\partial \ln h_2}{\partial l} \right)_{\varphi} \quad (3.3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $k_1$  и  $k_2$  — геодезические кривизны. В линейном приближении  $k_2 = (1 + F_r^2)^{-1} r^{-1}$ , а  $k_1$  определяется формулой (2.5). Уравнение (3.2), опуская в нем некоторые квадратичные по  $\varepsilon$  члены, можно проинтегрировать

$$w = \frac{1}{h_2} \int_0^l \left[ \frac{1}{\rho U} \left( \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)_{\xi} - U \frac{\partial}{\partial \varphi} (\ln h_1)_{\xi} \right] dl$$

Часто предпочтительней задавать распределение давления по поверхности тела в виде  $P = P(r, \varphi)$ . Для этого случая, используя второе отношение (2.4) и полагая в нем  $\partial P / \partial l = -\rho U \partial U / \partial l$ , получим следующую формулу для  $J$ :

$$J = - \int_0^l \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \int_0^l \left( \frac{1}{\rho U} \left( \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)_r + F_\varphi \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{U F_r}{1 + F_r^2} \right) \right) dl \right] \frac{dl}{h_2^2 U} \quad (3.4)$$

Можно показать также, что с квадратичной точностью составляющая скорости  $w$  равна окружной составляющей скорости  $w'$  в исходной цилиндрической системе координат, причем в том же приближении  $(\partial w / \partial \varphi)_{\xi} = (\partial w' / \partial \varphi)_r$ , поэтому формула (3.1) сохраняет вид при переходе от координат  $(\xi, \varphi)$  к  $(x, r, \varphi)$ .

Заметим, что все интегралы (1.1), (3.1) или (3.4) берутся от задаваемых в обычной цилиндрической системе координат функций по длине меридионального сечения и построения специальных ортогональных координатных сеток в конечном результате уже не требуется.

Структура формулы (3.1) такова, что величины  $h$  оказываются различными для различных  $\varphi$  в окрестности точки торможения.

Это, однако, не приводит к неоднозначности при определении тепловых потоков. Действительно, распределения давления, скорости, величины  $h$  при малых  $r$  имеют вид

$$F = \beta_0(1+\kappa)r^2/2 + \beta_3(\varphi)r^3/3 + \dots, P = P_0 - \rho\beta_0^2(1+2\kappa)r^2 - 2\rho r^3\beta_0\beta_3 + \dots \quad (3.5)$$

$$U = \beta_0(1+\kappa)r(1 - \beta_3/\beta_0 r) + \dots, w_\varphi = -2\kappa\beta_0 r - 2\beta_3\varphi\varphi/3r^2 + \dots$$

$$h = r^{1-2\kappa}(1 - 2\beta_{3\varphi\varphi}/3\beta_0) + \dots, \beta_3 \sim \varepsilon \cos(2k+1)\varphi, k=0, 1, \dots$$

Член  $\beta_3$  учитывает несимметрию функции  $F$  при старших членах разложения в ряд.

Подставляя разложения (3.5) в формулу (1.1), получим следующее выражение для тепловых потоков:

$$q = A_L \beta_0(1+\kappa)r^{2-2\kappa} \left(1 - (3\beta_3 + 2\beta_{3\varphi\varphi})/3\beta_0 r\right) \times \\ \times r^{-2+2\kappa} [\beta_0/4(1+2\kappa)]^{-1/2} [1 - 2/5(3\beta_3 + 4\beta_{3\varphi\varphi})\beta_0 r] \\ q_0 = A_L \beta_0^{1/2} + O(r^2), \quad q_1 = (9\beta_3 + 2\beta_{3\varphi\varphi})r/3\beta_0 + O(r^2)$$

Таким образом, при  $r \rightarrow 0$  имеем  $q_1 \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow q_0 \rightarrow A_L \beta_0^{1/2}$ , как и для метода локального подобия [1-3]. При  $\beta_3 \neq 0$   $q_r(r=0) \neq 0$ , т. е. максимум  $q$  не совпадает с точкой торможения.

Отметим, что вообще для разложений (3.5) при  $r \rightarrow 0$  функционалы  $J$  и  $h$  представимы в виде

$$J = -2\kappa \ln r + J^*(r, \varphi), \quad h = r^{1-2\kappa} h^*, \quad h^* = \exp(J^*(r, \varphi))$$

где  $h^*$  и  $J^*$  — регулярные функции  $r$ . Подставляя в формулы (1.1), получим, что функция  $q(r, \varphi)$  также регулярна при  $r \rightarrow 0$ , т. е. особенность ее устранима.

При практическом применении предлагаемого метода не предполагается обязательно линеаризировать соотношение (1.1), можно использовать его в точном виде вместе с формулой (3.4) для  $h$ . Однако в теоретическом плане в ряде задач линеаризация формул (1.1) может потребоваться. Это возможно, так как тепловой поток разлагается в ряд по  $\varepsilon$  всюду, а особенность  $h$  при  $r \rightarrow 0$  компенсируется особенностью  $\xi$ . Определим производную  $\partial q/\partial \varepsilon$ , предварительно прологарифмировав выражение (1.1) и используя разложения (1.4). После преобразований получим

$$\frac{1}{q_0} \frac{\partial q_1}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{(PU)_0} \frac{\partial (PU)_1}{\partial \varepsilon} + \frac{n}{1-n} \frac{\partial (h/r)}{\partial \varepsilon} - n \frac{1}{\xi_0} \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} = \\ = \left( \frac{1}{PU} \right)_0 \frac{\partial (PU)_1}{\partial \varepsilon} + \frac{n}{1-n} \frac{1}{\xi_0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^l \xi^* \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h}{r} \right) dl \quad (3.6) \\ \xi^* = PU r^{1/(1-n)}$$

Интеграл

$$\xi = \int_0^l PU r^{1/(1-n)} \left( \frac{h}{r} \right)^{1/(1-n)} dl$$

здесь взят по частям. Выражение (3.2) конечно и производная представима в виде

$$\partial q/\partial \varepsilon = q_0 \Phi(\varepsilon, r)$$

где  $\Phi(\varepsilon, r)$  — регулярная функция.

Вычисление старших производных аналогично. Из этого следует, что  $q$  разлагается в ряде по  $\epsilon$ .

Следует отметить, что особенность при  $r \rightarrow 0$  порождена не механизмом теплообмена в окрестности критической точки, а конкретной реализацией метода локального подобия, которая связана с линиями тока. В точных уравнениях пограничного слоя эта особенность отсутствует (см. п. 4).

Вообще говоря,  $J \sim \epsilon$  так что формально  $h=r(1+J)$ . Однако использование именно формулы (3.4) позволяет, как показывает опыт расчетов, экстраполировать область применимости метода меридиональных сечений за пределы его обоснованности.

4. Покажем, что правило меридиональных сечений, т. е. возможность независимого получения решения для отдельных меридиональных плоскостей, справедливо и для точных уравнений ламинарного пограничного слоя. Для этого выпишем их в ортогональной системе координат  $(\zeta, \eta, \varphi)$ , где координаты  $(\zeta, \varphi)$  и скорости  $u, w$  те же, что и в п. 1, а координата  $\eta$  и составляющая скорости  $v$  направлены по нормали к телу

$$\begin{aligned} \frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{w}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + k_1 u w - k_2 w^2 &= -\frac{1}{\rho h_1} \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{u}{h_1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + v \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{w}{h_2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - k_1 u^2 + k_2 w u &= -\frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho u}{\partial \zeta} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \rho w}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho v}{\partial \eta} + k_2 \rho u &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{u}{h_1} \frac{\partial J}{\partial \zeta} + v \frac{\partial J}{\partial \eta} + \frac{w}{h_2} \frac{\partial J}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \lambda \frac{\partial J}{\partial \eta} + \frac{u}{\rho h_1} \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{w}{\rho h_2} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right]$$

Коэффициенты  $h_1, h_2$  и  $k_1, k_2$  определены формулами (2.3) и (3.3),  $J$  — энтальпия,  $\mu$  — вязкость,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. Отбросив, как и раньше, квадратичные члены и продифференцировав второе уравнение по  $\varphi$ , приведем эту систему к виду

$$\begin{aligned} \frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho h_1} \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{u}{h_1} \frac{\partial g}{\partial \zeta} + v \frac{\partial g}{\partial \eta} - k_1 u^2 + k_2 u g &= -\frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \frac{\partial g}{\partial \eta} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho u}{\partial \zeta} + \frac{\partial \rho v}{\partial \eta} + \frac{\rho}{h_2} g + k_2 \rho u &= 0 \\ \frac{u}{h_1} \frac{\partial J}{\partial \zeta} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial J}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \lambda \frac{\partial J}{\partial \eta} + \frac{u}{\rho h_1} \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь  $g = \partial w / \partial \varphi$ .

Уравнения (4.2) должны быть решены при обычных граничных условиях

$$u, v, g = 0, \quad J = J_w, \quad \eta = 0, \quad u \rightarrow u_\delta, \quad g \rightarrow g_\delta \rightarrow \frac{\partial w_\delta}{\partial \varphi}, \quad J \rightarrow J_\delta, \quad \eta \rightarrow \eta_\delta \quad (4.3)$$

где индекс  $\delta$  относится к внешней границе пограничного слоя,  $w$  — к стенке.

Система (4.2) замкнута относительно неизвестных функций  $u, v, g, J$  и не содержит производных по  $\varphi$ , что и доказывает правило местных ме-

ридиональных сечений. Иными словами, трехмерная задача пограничного слоя при малой асимметрии обтекания сводится к совокупности двумерных задач, отличающихся от осесимметричных членом  $g(\xi, \varphi)$  и уравнением для него. Решение же таких задач можно проводить вдоль отдельных меридиональных сечений независимо.

В окрестности критической точки тупого тела распределение давления и поле внешних скоростей, согласно (1.5), имеют вид

$$P = P_0^{-1/2} \beta_0^2 (1 + \varepsilon \cos 2\varphi) r^2, \quad \xi = r \quad (4.4)$$

$$u_0 = r\beta_0(1 + \varepsilon \cos 2\varphi), \quad g_0 = -2r\varepsilon\beta_0 \cos 2\varphi$$

В этой окрестности  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$ ,  $k_1 \sim r$  и  $k_2 = r^{-1}$ . Представив решение в виде

$$u = r\beta_0 [f_0(\eta) + \varepsilon \cos 2\varphi f_1(\eta, \varphi)], \quad g = -2\varepsilon r\beta_0 \cos 2\varphi f_2(\eta, \varphi), \\ v = v(\eta, \varphi)$$

из (4.2) получим

$$vf_0' - \frac{1}{\rho} (\mu f_0')' = \beta_0 \left( \frac{\rho_0}{\rho} - f_0'^2 \right) \quad (4.5)$$

$$vf_i' - \frac{1}{\rho} (\mu f_i')' = 2\beta_0 \left( \frac{\rho_0}{\rho} - f_0 f_i \right), \quad i=1, 2$$

$$vJ' = (\lambda J')', \quad (\rho v)' + 2\beta_0 f_0 \rho = 2\varepsilon \beta_0 \rho (f_2 - f_1) \cos 2\varphi \quad (4.6)$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по  $\eta$ ,  $f_i = 1$  при  $\eta \rightarrow \eta_0$  и  $f_i = 0$  при  $\eta = 0$  согласно (4.3).

Из (4.6) следует, что  $f_1 = f_2$ ,  $f_1$  не зависит от  $\varphi$ , при этом профили радиальной скорости  $u/u_0 \sim f_0 + \varepsilon (f_1 \cos 2\varphi)$  зависят от  $\varphi$ , а составляющая  $\rho v$  и тепловой поток  $J$  на стенке, будут такими же, как и при осесимметричном течении с градиентом скорости  $\beta_0$ . Таким образом, этот результат, полученный с помощью пространственного метода локального подобия, в рамках линейной теории оказывается точным.

Исчезновение при  $r \rightarrow 0$  в уравнении неразрывности членов, зависящих от  $\varphi$ , является, естественно, общим результатом, так как производная  $\partial \rho v / \partial \eta$  в этом уравнении равна с обратным знаком дивергенции компоненты вектора  $\rho \mathbf{V}$ , лежащей в касательной к телу плоскости, а потому является функцией точки и не зависит от системы координат. Это обстоятельство следует иметь в виду при практической реализации метода меридиональных сечений за пределами его обоснования (что вполне возможно на практике), так как при разделенном численном решении системы (4.2) вследствие погрешностей можно получить и несколько различные предельные при  $r \rightarrow 0$  значения  $v$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lees L. Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds.— Jet Propulsion, 1956, v. 26, № 4, p. 259–269.
2. Авдуческий В. С., Галицейский Б. М., Глебов Г. А. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М.: Машиностроение, 1975, гл. XI, XII, XV, 623 с.
3. Rakich J. V., Mateer G. G. Calculation of metric coefficients for streamline coordinates.— AIAA Journal, 1972, v. 10, № 11, p. 1538–1540.
4. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 32 с.
5. Сафиуллин Р. А. Теплообмен в области перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 6, с. 92–96.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1951. 544 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.
8. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. М.: Гостехиздат. 1953. 464.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию  
11.IV.1985