

УДК 532.525.2

О НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ЗАКРУЧЕННОЙ СТРУИ

ЗУБЦОВ А. В.

В [1] получено решение уравнений Навье – Стокса для незакрученной струи, возникающей в безграничном пространстве, заполненном несжимаемой жидкостью, если туда поместить точечный источник потока импульса. При больших числах Рейнольдса эта же задача решена в рамках уравнений пограничного слоя [2]. Менее исследовано течение вязкой жидкости в закрученных струях, в которых существенную роль играет взаимодействие осевой и азимутальной составляющих скорости. Для больших чисел Рейнольдса асимптотические решения для закрученной струи построены в работах [3–5]. Эти решения описывают течение в струе на большом удалении от источника струи и получены при условии, что течение жидкости вне струи является безциркуляционным.

В настоящей работе рассматривается ламинарная струя, которая возникает в результате действия точечного источника, сообщаемого окружающей его несжимаемой жидкости конечный поток импульса I . Предполагается, что струя, генерируемая точечным источником, закручена так, что циркуляция азимутальной составляющей скорости на ее внешней границе является постоянной величиной Γ . Решение рассматриваемой задачи для слабой закрутки струи ($I = \text{const}$, $\Gamma \ll \sqrt{I}$) показывает [6], что в струе в результате вязкого взаимодействия осевой и азимутальной составляющих скорости индуцируется продольный положительный градиент давления, величина которого пропорциональна Γ^2/I . Из-за действия неблагоприятного градиента давления уменьшается значение скорости на оси слабо закрученной струи. Следует ожидать, что при достаточно сильной закрутке струи в окрестности ее оси возникают возвратные течения. В настоящей работе представлены результаты численного расчета и аналитического исследования, полученные для случая $\Gamma/\sqrt{I} \sim O(1)$.

Введем цилиндрическую систему координат x, r, θ . Через U, V, W обозначим осевую, радиальную и азимутальную составляющие скорости, P – статическое давление, ρ – плотность жидкости, ν – кинематический коэффициент вязкости. В начало системы координат поместим точечный источник, сообщаемый несжимаемой жидкости конечный поток импульса в направлении оси x

$$\int_0^{\infty} r \left(U^2 + \frac{P}{\rho} - \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right) dr = I, \quad x \rightarrow +0 \quad (1)$$

и генерирующий закрученную струю, в которой циркуляция азимутальной составляющей скорости равна Γ при $r \rightarrow \infty$. Будем считать, что течение установившееся и обладает осевой симметрией, тогда рассматриваемая задача имеет автомодельное решение. В автомодельных переменных уравнения Навье – Стокса имеют следующий вид:

$$(tu')' + \left[t^2 \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) \right]' - tvu' = -\frac{1}{\text{Re}^2} t(t^2u)''$$

$$t^2w'' + tw'(1+t^2u-tv) - w(1-t^2u+tv) = -\frac{t^2}{\text{Re}^2} (t^2w)''$$

$$tp' - w^2 = \frac{1}{\text{Re}^2} \left[(tv')' - \frac{v}{t} + tu(vt)' - tvv' - \frac{t}{\text{Re}^2} (t^2v)'' \right] \quad (2)$$

$$t(tu)' - (tv)' = 0$$

$$U = \frac{\Gamma^2}{\nu x} u, \quad W = \frac{\Gamma^2}{\nu x} w, \quad V = \frac{\Gamma}{x} v, \quad P = \frac{\rho \Gamma^4}{\nu^2 x^2} p, \quad (3)$$

$$\frac{r}{x} = \frac{t}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{\Gamma}{\nu}, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{\sqrt{I}}, \quad ()' = \frac{d}{dt} \quad (3)$$

Исследование задачи будет проводиться для случая больших чисел Рейнольдса. Тогда область сильных возмущений будет представлять собой тонкую струю $r/x \sim \text{Re}^{-1} \ll 1$. С точностью до членов порядка Re^{-2} искомое решение удовлетворяет следующим уравнениям и граничным условиям:

$$u' + t(p + u^2) - \nu u = 0$$

$$t^2 w'' + t(1 + t^2 u - tv)w' - (1 - t^2 u + tv)w = 0$$

$$tp' = w^2, \quad t(tu)' - (tv)' = 0 \quad (4)$$

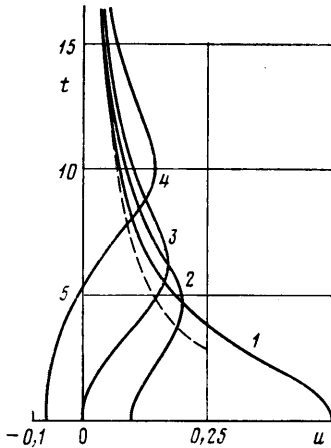
$$w = v = 0, \quad t = 0 \quad (5)$$

$$u \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 1/t, \quad p \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (6)$$

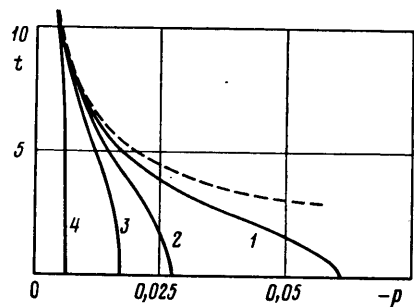
$$\int_0^\infty t(u^2 + p) dt = \gamma^{-2} \quad (7)$$

Соотношение (7) является следствием условия (1) и нормировки решения (3).

Математическая постановка задачи (4)–(7) содержит параметр γ , который, вообще говоря, может задаваться произвольно. Это означает, что уравнения (4)–(6) должны иметь однопараметрическое семейство реше-



Фиг. 1



Фиг. 2

ний. Убедиться в этом позволяют следующие рассуждения. Используя уравнения (4), нетрудно показать, что из требования ограниченности u при $t \rightarrow 0$ следует выполнение условия $v(0) = 0$. Поэтому условия (5) равносильны выполнению следующих условий:

$$w = 0, \quad u = u_0 < \infty, \quad t = 0 \quad (8)$$

Нетрудно также установить, что решение уравнений (4) имеет следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

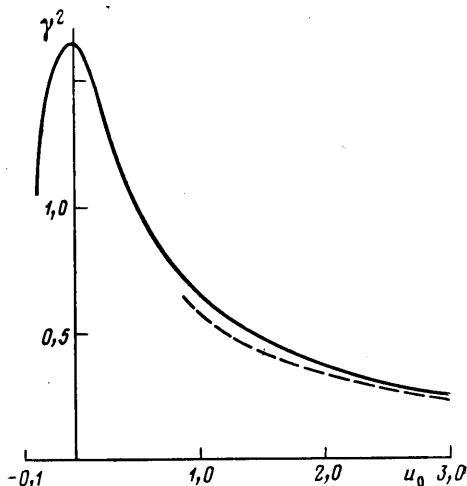
$$u \sim \frac{c_1}{\sqrt{2}t} + \frac{c_2}{t^3} + \dots, \quad v \sim -\frac{1}{t} + \frac{2c_3}{t^2} + \dots$$

$$w \sim \frac{c_1}{t} + O\left[\frac{c_2}{t} \exp\left(-\frac{c_1 t}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad p \sim -\frac{c_1^2}{2t^2} + O\left[\frac{c_2}{t^3} \exp\left(-\frac{c_1 t}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

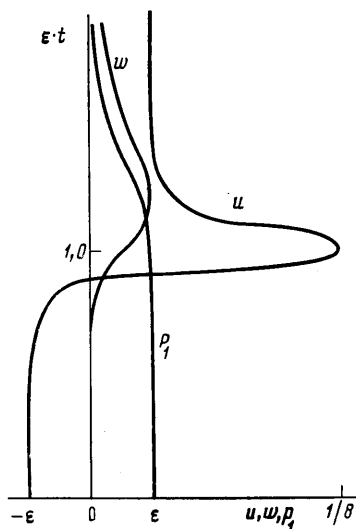
где c_1, c_2, c_3 — свободные константы.

Из граничных условий (6) следует, что $c_1=1$. Значение постоянной c_2 определяется условием $w(0)=0$. Свобода в выборе постоянной c_3 эквивалентна свободе в задании u при $t=0$. Таким образом, решение системы (4)–(6) представляет собой однопараметрическое семейство решений, зависящее от параметра u_0 . Интегрируя систему уравнений (4), (6), (8) при заданном значении u_0 и подставляя найденное решение в соотношение (7), получим соответствующее значение исходного параметра γ .

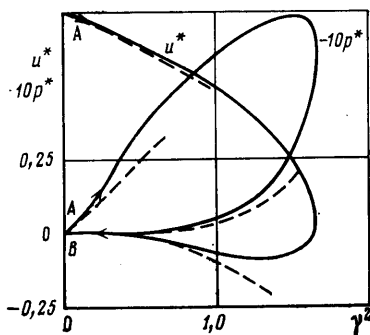
Интегрирование уравнений (4), (6), (8) проводилось с использованием численного метода [7], развитого для решения уравнения типа пограничного слоя. На фиг. 1, 2 представлено поведение функций $u(t), p(t)$ при различных значениях $u_0=u(0)$, штриховые кривые — асимптотика соот-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ветствующих функций при $t \gg 1$, кривые 1–4 соответствуют $u_0=0,5; 0,1; 0; -0,07$. На фиг. 3 построена зависимость $\gamma^2(u_0)$, сплошная кривая — результаты численного расчета, штриховая соответствует решению задачи для слабой закрутки струи ($I=\text{const}, \Gamma \rightarrow 0$) [6].

Решение уравнений (4), (6), (8) удалось получить для $-0,0712 \leq u_0 < \infty$. Значение $u_0 \approx -0,0712$ оказалось особым для процедуры численного интегрирования. Если при $-0,05 \leq u_0 \leq 5$ для обеспечения заданной точности искомого решения ($\Delta = 10^{-6}$) потребовалось 10 итераций ($N=10$), то при $u_0 = -0,0712$ соответствующее число итераций возросло на порядок ($N=100$). При $u_0 = -0,07121$ итерационный процесс не сошелся и при $N=400$, что дает основание предполагать отсутствие решения задачи при $u_0 < u_0^* \approx -0,07121$. Вместе с тем характер поведения функции $\gamma^2(u_0)$ (фиг. 3) указывает на то, что при $-0,0712 \leq u_0 \leq 0$ помимо найденного решения существует еще одно решение уравнений (4), (6), (8), которому при заданном значении u_0 соответствует меньшее значение величины $\gamma^2(u_0)$.

Для доказательства этого утверждения проведем дополнительное исследование уравнений (4), (6), (8). Из результатов проведенных расчетов следует, что изменение статического давления поперек струи становится малой величиной по мере уменьшения параметра u_0 (фиг. 2). Поэтому можно попытаться построить асимптотическое решение уравнений (4)–(6) в предположении, что в основной части струи функция $p(t)$ является постоянной величиной, близкой к нулю

$$p(t) = \text{const} = p_0, \quad |p_0| \ll 1, \quad 0 \leq t < t_0 \gg 1 \quad (9)$$

Условие (9) позволяет существенно упростить исходную систему уравнений. Уравнения (4), (6), (8) распадаются на две системы уравнений, решение которых выписывается в явном виде

$$u = \frac{1}{2(1+f)^2} [f + 2\varepsilon(f^2 + 2yf - 1)], \quad v = \frac{t}{2(1+f)^2} [f + \varepsilon(f^2 + 4yf - 1)],$$

$$w = \frac{f - f_0}{t(1+f)}, \quad p = -\frac{1}{2t^2(1+f)^2} [(f - f_0)^2 + \varepsilon^2 t^2 (1 + 2f)], \quad (10)$$

$$f = \exp y, \quad f_0 = f(-1/4\varepsilon), \quad t^2 = (1 + 4\varepsilon y) / \varepsilon^2, \quad \varepsilon = \sqrt{-2p_0}$$

Характер поведения полученного решения представлен на фиг. 4, где через p_1 обозначена величина $-2p/\varepsilon$. Очевидно, что при $p_0 \rightarrow 0$ в закрученной струе возникают две характерные области течения (Ω_1, Ω_2), в каждой из которых решение задачи представляется в первом приближении в следующем виде:

$$u \sim -\varepsilon, \quad v \sim -\frac{\varepsilon t}{2}, \quad w = 0, \quad p \sim -\frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 0 \leq t < t_0 = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$u \sim \frac{e^y}{2(1+e^y)^2}, \quad v \sim \frac{2}{\varepsilon} u, \quad w \sim \frac{\varepsilon e^y}{1+e^y}, \quad p \sim -\frac{\varepsilon^2}{2}, \quad |y| < \infty$$

При $p_0 \rightarrow 0$ происходит сильное увеличение поперечных масштабов закрученной струи. Это расширение обусловлено возникновением развитой зоны возвратных течений, прилегающей к оси струи ($0 \leq t < t_0$). Поток продольного импульса и влияние вязкости сосредоточены в основном в области $\Omega_2 (t - t_0 \sim O(1))$, которая отстоит от оси струи на расстоянии, равном $1/\varepsilon$. Область Ω_2 представляет собой относительно узкий слой, который отделяет закрученный поток жидкости от зоны Ω_1 , где азимутальная составляющая скорости равна нулю. В самой области Ω_2 азимутальная составляющая скорости является величиной порядка ε , а $u \sim O(1)$, поэтому взаимодействие осевого и азимутального движения в этой области слабое. Над областью Ω_2 находится область $\Omega_3 (\varepsilon t \sim O(1))$, где составляющие скорости u, w сравниваются по порядку величины. В области Ω_3 решение (10) не справедливо, так как оно не учитывает влияния поперечного градиента давления.

Решение уравнений (4), (6), (8) в области Ω_3 представим в виде асимптотического ряда по малому параметру ε и ограничимся первыми его членами

$$u \sim \varepsilon u_3(\eta), \quad v \sim v_3(\eta), \quad w \sim \varepsilon w_3(\eta), \quad p \sim -\frac{\varepsilon^2}{2} p_3(\eta), \quad \eta = \varepsilon t, \quad 1 \leq \eta < \infty$$

$$\eta(u_3^2 - p_3/2) - u_3 v_3 = 0, \quad \eta(\eta u_3)' - (\eta v_3)' = 0 \quad (11)$$

$$\eta w_3' - w_3 = 0, \quad \eta p_3' + 2w_3^2 = 0, \quad ()' \equiv \frac{d}{d\eta}$$

Решение уравнений (11), удовлетворяющее условию асимптотического сращивания с решением (10), имеет вид

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2\eta^2 - 1}}, \quad v_3 = \frac{1}{2\eta\sqrt{2\eta^2 - 1}}, \quad w_3 = \frac{1}{\eta}$$

$$p_3 = \frac{1}{\eta^2}, \quad 1 \leq \eta < \infty \quad (12)$$

Решение (12) удовлетворяет граничным условиям задачи при $t \rightarrow \infty$ и обеспечивает сходимость интеграла (7). Подставляя полученное решение в интегральное соотношение (7), получим связь между параметрами u_0 , p_0 , γ при $\gamma \rightarrow 0$: $u_0 \sim -\gamma^2/12$, $p_0 \sim -\gamma^4/288$.

При $p_0 \rightarrow 0$ относительная толщина струи r/x пропорциональна $(\varepsilon \text{Re})^{-1}$. Для того чтобы струя оставалась тонкой, необходимо потребовать: $\gamma^2 \text{Re} \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow 0$ и $\text{Re} \rightarrow \infty$. В противном случае ($\gamma^2 \text{Re} \sim O(1)$) левая и правая части уравнения (2) становятся однопорядковыми величинами.

Асимптотическое решение задачи, соответствующее предельному случаю $\gamma \rightarrow 0$, $u_0 \rightarrow -0$, было использовано при численном интегрировании уравнений (4), (6), (8) в следующем диапазоне изменения параметров задачи: $-0,0712 < u_0 < 0$, $\gamma < 1,1$. В качестве начального приближения для искомого решения принималось решение (10), (12), а за верхнюю границу участка интегрирования по координате t бралась величина, пропорциональная $t_0 = 1/u_0$. На фиг. 5 представлена зависимость $u^*(0, \gamma) = (\nu x/I)U(0)$, $p^*(0, \gamma) = (\nu^2 x^2/\rho I^2)P(0)$ (сплошные кривые — результаты численного расчета, штриховые — асимптотика соответствующих функций при $\gamma \rightarrow 0$).

Математическая постановка рассматриваемой задачи содержит один безразмерный параметр $\gamma = \Gamma/\sqrt{I}$. Проведенное исследование показало, что автомодельное решение задачи существует при $0 \leq \gamma \leq \gamma_0 \approx 1,3$. Это означает, что в задаче о закрученной струе поток импульса I и циркуляция азимутальной составляющей скорости Γ должны удовлетворять соотношению $\Gamma \leq 1,3\sqrt{I}$. Как следует из результатов, представленных на фиг. 5, каждому допустимому значению параметра γ соответствуют два режима течения. Характерной особенностью первого режима течения является знакопостоянство составляющей скорости u по всей толщине струи. Для второго режима характерно существование в окрестности оси струи возвратных течений. Возвратные течения в струе возникают из-за действия неблагоприятного градиента давления, который индуцируется в результате вязкого взаимодействия осевой и азимутальной составляющих скорости.

Проведенное исследование не дает ответа на вопрос, какое из двух решений реализуется при заданном значении параметра γ . Однако рассуждения качественного плана дают некоторую информацию о физических условиях, которым соответствует то или иное из полученных решений. Рассмотрим предельный случай $\gamma \rightarrow 0$. При $\gamma \rightarrow 0$ имеются два решения, которым на фиг. 5 отвечают точки A и B . Точка A соответствует решению задачи о незакрученной струе ($I = \text{const}$, $\Gamma = 0$, при этом отноше-

ние правых частей уравнений (2) к соответствующим левым частям есть величина, пропорциональная v^2/I . Отход от точки A в область малых значений γ определяется решением задачи о слабо закрученной струе [6] ($u^* \sim 0,75 - 0,3\gamma^2$, $p^* \sim -3\gamma^2/64$). Из работы [6] следует, что увеличение циркуляции Γ при фиксированном значении потока импульса I приводит к уменьшению значения скорости на оси струи. Численные расчеты, проведенные в настоящей работе, показали, что при $\Gamma \approx 1,3\sqrt{I}$ скорость на оси струи обращается в нуль. Естественно ожидать, что дальнейшее увеличение циркуляции Γ должно привести к появлению в окрестности оси струи области возвратных течений. Результаты, полученные в работе, с одной стороны, подтверждают этот вывод, а с другой — указывают на то, что увеличение циркуляции, приводящее к появлению возвратных течений, возможно лишь при соответствующем увеличении потока импульса, поскольку $\gamma = \Gamma/\sqrt{I} < 1,3$. Таким образом, решение в точке B ($u^* \sim -\gamma^4/12$, $p^* \sim -\gamma^8/288$) можно рассматривать как результат предельного перехода $\Gamma \rightarrow \infty$, $I \rightarrow \infty$, $\gamma = \Gamma/\sqrt{I} \rightarrow 0$.

Для ответа на вопрос, какое из двух полученных решений реализуется при заданных значениях циркуляции Γ и потока импульса I , требуется дополнительное исследование задачи в области, линейные масштабы которой сравнимы с собственными размерами источника струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Об одном новом точном решении уравнений Навье — Стокса: Докл. АН СССР, 1944, т. 43, № 7, с. 299—301.
2. Schlichting H. Laminare Strahlausbreitung.— Z. angew. Mech., 1933, В. 13, № 4, S. 260—263.
3. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— ПММ. 1953, т. 17, № 1, с. 3—16.
4. Дубов В. С. Распространение свободной закрученной струи в затопленном пространстве.— В кн.: Энергомашиностроение. Л.: Машгиз, 1955, с. 137—145 (Тр. Ленинград. политехн. ин-та, № 176).
5. Фалькович С. В. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— ПММ, 1967, т. 31, № 2, с. 282—288.
6. Зубцов А. В. Об одном автомодельном решении для слабо закрученной струи.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4, с. 45—50.
7. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое.— В сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304—325.

Москва

Поступила в редакцию
23.X.1984