

УДК 532.525

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ ИСТОЧНИКА С ОБРАЗОВАНИЕМ ЗАСТОЙНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КОНСТАНТАХ БЕРНУЛЛИ

ЖУК А. Д., КУЗЬМИН С. В.

Рассматривается одна из схем обтекания точечного источника неограниченным потоком жидкости, когда соударение двух потоков с различными константами Бернулли происходит с образованием ограниченной области постоянного давления.

Теория и метод решения задач плоских струйных течений идеальной жидкости с различными константами Бернулли в струях развиты в [1]. Здесь в соответствии с [1] выводится нелинейная система уравнений, рассматривается вопрос построения численного решения с высокой точностью и приводятся некоторые результаты расчета для различных значений чисел Бернулли и кавитации, которые являются безразмерными параметрами данной задачи.

1. Схема рассматриваемого обтекания источника изображена на фиг. 1. Источник с объемным расходом Q расположен в точке O (начало координат).

Задача плоская. Течение установившееся и безвихревое. Жидкость идеальная, несжимаемая, невесомая. Принято, что плотность постоянна во всем течении и что константа Бернулли B_1 в набегающем неограниченном потоке меньше константы Бернулли B_2 жидкости, вытекающей из источника.

Рассмотрим верхнюю половину течения (фиг. 1). Пусть $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ — комплексные потенциалы верхних половин течений z_1 и z_2 , U_1 и U_2 — модули скорости, θ_1 и θ_2 — углы наклона вектора скорости с осью x .

Отобразим рассматриваемые области течений z_1 и z_2 соответственно на верхние полуплоскости параметрического переменного t_1 и t_2 , где в качестве функций, описывающих течения в этих областях, используем функции Жуковского

$$f_j(t_j) = \ln V_{j\infty} \left(\frac{dF_j}{dZ_j} \right)^{-1} = \ln \frac{U_{j\infty}}{U_j} + i\theta_j = u_j(t_j) + iv_j(t_j), \quad j=1, 2$$

Зададим соответствие точек B, C, A, E и $t_{1B} = \eta_B < -1, t_{1C} = -1, t_{1A} = 1, t_{1E} = \infty$; F, C, D, O и $t_{2F} = -1, t_{2C} = 1, t_{2D} = \eta_D > 1, t_{2O} = \infty$.

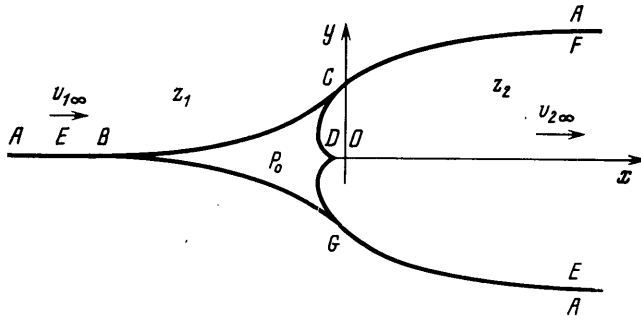
На полигональных участках границ AEB и DOF известны углы наклона вектора скорости

$$\begin{aligned} v_1(t_1) = \theta_1(t_1) = 0, \quad t_1 < \eta_B, \quad t_1 > 1 \\ v_2(t_2) = \theta_2(t_2) = \pi, \quad t_2 > \eta_D \\ v_2(t_2) = \theta_2(t_2) = 0, \quad t_2 < -1 \end{aligned}$$

На участках границ BC и CD постоянны модули скорости

$$\begin{aligned} u_1(t_1) = -1/2 \ln(1 + \sigma), \quad \eta_B < t_1 < -1 \\ u_2(t_2) = -1/2 \ln \left(1 + \frac{\sigma}{1 + \text{Be}} \right), \quad 1 < t_2 < \eta_D \end{aligned}$$

$$\text{Be} = 2(B_2 - B_1) / \rho U_{1\infty}^2, \quad \sigma = 2(P_{1\infty} - P_0) / \rho U_{1\infty}^2$$



Фиг. 1

Здесь Ve — число Бернулли, σ — число кавитации, $P_{1\infty}$ и $1/2\rho U_{1\infty}^2$ — статическое давление и скоростной напор на бесконечности в течении z_1 , P_0 — давление в застойной области $BGDC$.

На линиях тока CA и CF и соответствующих им отрезках $[-1, 1]$ действительные и мнимые части функций $f_1(t_1)$ и $f_2(t_2)$ неизвестны.

Чтобы упростить постановку и решение краевых задач для функций Жуковского, введем функции $f_{11}(t_1)$ и $f_{21}(t_2)$. Положим

$$f_j(t_j) = f_{j1}(t_j) + f_{j2}(t_j) = u_{j1}(t_j) + iv_{j1}(t_j) + u_{j2}(t_j) + iv_{j2}(t_j), \quad j=1, 2$$

Функции $f_{11}(t_1)$ и $f_{21}(t_2)$ выберем так, чтобы на отрезках действительных осей η_1 и η_2 при $\eta_1 < \eta_B$, $\eta_1 > 1$ и при $\eta_2 < -1$, $\eta_2 > \eta_D$ их мнимые части совпадали с известными мнимыми частями функций Жуковского

$$v_{11}(\eta_1) = v_1(\eta_1), \quad v_{21}(\eta_2) = v_2(\eta_2)$$

а на отрезках $[\eta_B, 1]$, $[-1, \eta_D]$ принимали значения

$$u_{11}(\eta_1) = u_1(\eta_1) = -1/2 \ln(1 + \sigma), \quad \eta_B < \eta_1 < -1$$

$$v_{11}(\eta_1) = \frac{\gamma}{4\pi} (1 - \eta_1)^2, \quad -1 < \eta_1 < 1$$

$$u_{21}(\eta_2) = 0, \quad -1 < \eta_2 < \eta_D$$

Здесь $0 < \gamma < \pi$ — некоторый угол наклона вектора скорости в точке C слияния двух потоков с различными константами Бернулли. Заметим, что заданная на $[-1, 1]$ функция $v_{11}(\eta_1)$ — простейшая функция, которая удовлетворяет рассмотренным ниже в § 2 условиям.

Смешанные краевые задачи Гильберта для функций $f_{11}(t_1)$ и $f_{21}(t_2)$ имеют аналитическое решение

$$f_{11}(t_1) = -\frac{1}{2} \ln(1 + \sigma) + \frac{\gamma}{4\pi} \sqrt{(t_1 - \eta_B)(t_1 + 1)} \left(\sqrt{2(1 - \eta_B)} + \right. \\ \left. + (\eta_B - 5 + 2t_1) \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \eta_B}}{\sqrt{-1 - \eta_B}} \right) - \frac{\gamma}{4\pi} (t_1 - 1)^2 \ln \frac{\sqrt{(t_1 + 1)(1 - \eta_B)} - \sqrt{2(t_1 - \eta_B)}}{(1 - t_1)(1 + \eta_B)}$$

$$f_{21}(t_2) = i\pi - 2 \ln \frac{\sqrt{t_2 + 1} + \sqrt{t_2 - \eta_D}}{\sqrt{1 + \eta_D}}$$

Используя функции $f_{11}(t_1)$ и $f_{21}(t_2)$ и выбирая на отрезках $[-1, 1]$ за известные функции $v_{12}(\eta_1)$ и $u_{22}(\eta_2)$, для функций $f_{12}(t_1)$ и $f_{22}(t_2)$ поставим смешанные краевые задачи Гильберта

$$f_{12}(t_1) = \begin{cases} v_{12}(\eta_1) = 0, & \eta_1 < \eta_B, \quad \eta_1 > 1 \\ u_{12}(\eta_1) = 0, & \eta_B < \eta_1 < -1 \\ v_{12}(\eta_1) \text{ — непрерывная функция на } [-1, 1] \end{cases}$$

$$f_{22}(t_2) = \begin{cases} v_{22}(\eta_2) = 0, & \eta_2 < -1, \quad \eta_2 > \eta_D \\ u_{22}(\eta_2) = -\frac{1}{2} \ln(1 + \sigma), & -1 < \eta_2 < \eta_D \\ u_{22}(\eta_2) - \text{непрерывная функция на } [-1, 1] \end{cases}$$

Решение смешанных краевых задач для функций $f_{12}(t_1)$ и $f_{22}(t_2)$, согласно [2], определяются интегралами Келдыша – Седова

$$f_{21}(t_1) = \sqrt{(t_1 - \eta_B)(t_1 + 1)} \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{v_{21}(\mu_1)}{\sqrt{(\mu_1 - \eta_B)(\mu_1 + 1)}} \frac{d\mu_1}{\mu_1 - t_1} \quad (1.1)$$

$$f_{22}(t_2) = \sqrt{(t_2 + 1)(t_2 - \eta_D)} \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-1}^1 \frac{u_{22}(\mu_2)}{\sqrt{(\mu_2 + 1)(\mu_2 - \eta_D)}} \frac{d\mu_2}{\mu_2 - t_2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma}{1 + \text{Be}} \right) \int_1^{\eta_D} \frac{d\mu_2}{\sqrt{(\mu_2 + 1)(\mu_2 - \eta_D)(\mu_2 - t_2)}} \right) \quad (1.2)$$

Области изменения комплексных потенциалов $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ представляют собой соответственно верхнюю полуплоскость и полосу шириной $1/2 Q$ (Q – объемный расход источника). При $F_1(C) = F_2(C) = 0$ функции, отображающие верхние полуплоскости t_1 и t_2 на области изменения $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$, имеют вид

$$F_1(t_1) = F_E \frac{t_1 + 1}{t_1 - 1}, \quad F_2(t_2) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{2}{t_2 + 1}$$

Здесь $F_E < 0$ – значение $F_1(z_1)$ в некоторой произвольной точке E , лежащей на оси симметрии (см. фиг. 1).

Таким образом, для определения течений в областях z_1 и z_2 по формулам

$$\frac{dF_j}{dZ_j} = U_j \exp(-i\theta_j) = U_{j\infty} \exp(-f_j(t_j)),$$

$$Z_j = \frac{1}{U_{j\infty}} \int \exp(f_j(t_j)) \frac{dF_j}{dt_j} dt_j, \quad j=1, 2$$

необходимо в верхних полуплоскостях t_1 и t_2 построить функции Жуковского $f_1(t_1)$ и $f_2(t_2)$, действительные или мнимые части которых известны вне отрезков $[-1, 1]$, а на отрезках $[-1, 1]$ связываются с помощью динамического и кинематического (равенство статических давлений и углов наклона вектора скорости) условий склеивания двух течений с различными константами Бернулли. Условия склеивания должны выполняться на разделяющей два течения линии тока, т. е. линии тангенциального разрыва скорости.

Запишем теперь систему уравнений задачи для определения на отрезках $[-1, 1]$ неизвестных – функциональной связи переменных $\eta_2 = \eta_2(\eta_1)$, функций $u_{12}(\eta_1)$, $v_{12}(\eta_1)$, $u_{22}(\eta_2)$, $v_{22}(\eta_2)$ и величин свободных параметров η_B , η_D . Система уравнений состоит из: уравнения равенства длин дуг $S_1(\eta_1)$ и $S_2(\eta_2)$ линии тангенциального разрыва скорости

$$S_1(\eta_1) = -\frac{2F_E}{U_{1\infty}} \int_{-1}^{\eta_1} \exp(u_1(\mu_1)) \frac{d\mu_1}{(\mu_1 - 1)^2} = \frac{Q}{2\pi U_{2\infty}} \int_1^{\eta_2} \exp(u_2(\mu_2)) \frac{d\mu_2}{1 + \mu_2} = S_2(\eta_2) \quad (1.3)$$

уравнения равенства статических давлений $P_1(\eta_1) = P_2(\eta_2)$

$$u_{22}(\eta_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \text{Be}}{\text{Be} + \exp(-2(u_{11}(\eta_1) + u_{12}(\eta_1)))} \quad (1.4)$$

сингулярного интеграла, определяющего граничное значение интеграла (1.2)

$$v_{22}(\eta_2) = -\frac{\sqrt{(\eta_2+1)(\eta_D-\eta_2)}}{\pi} V.p. \int_{-1}^{+1} \frac{u_{22}(\mu_2)}{\sqrt{(\mu_2+1)(\eta_D-\mu_2)}} \frac{d\mu_2}{\mu_2-\eta_2} + \\ + \frac{1}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{\sigma}{1+\text{Be}} \right) \ln \frac{(\sqrt{(\eta_2+1)(\eta_D-1)} + \sqrt{2(\eta_D-\eta_2)})^2}{(1-\eta_2)(1+\eta_D)} \quad (1.5)$$

уравнения равенства углов наклона вектора скорости $\theta_1(\eta_1) = \theta_2(\eta_2)$

$$v_1(\eta_1) = v_2(\eta_2), \quad v_{12}(\eta_1) = v_{21}(\eta_2) + v_{22}(\eta_2) - v_{11}(\eta_1) \quad (1.6)$$

сингулярного интеграла, определяющего граничное значение интеграла (1.1)

$$u_{12}(\eta_1) = \frac{\sqrt{(\eta_1+1)(\eta_1-\eta_B)}}{\pi} V.p. \int_{-1}^1 \frac{v_{12}(\mu_1)}{\sqrt{(\mu_1+1)(\mu_1-\eta_B)}} \frac{d\mu_1}{\mu_1-\eta_1} \quad (1.7)$$

формулы для определения из краевого условия $u_1(1) = 0$ величины свободного параметра η_B

$$u_1(1) = u_{11}(1) + \lim_{\eta_1 \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(\eta_1+1)(\eta_1-\eta_B)}}{\pi} V.p. \int_{-1}^1 \frac{v_{12}(\mu_1)}{\sqrt{(\mu_1+1)(\mu_1-\eta_B)}} \frac{d\mu_1}{\mu_1-\eta_1} = 0 \quad (1.8)$$

формулы для определения из условия равенства ординат точки C относительно точек B и D величины свободного параметра η_D

$$-\frac{2F_E}{U_{1\infty}} (1+\sigma)^{-1/2} \int_{\eta_B}^1 \sin v_1(\mu_1) \frac{d\mu_1}{(\mu_1-1)^2} = \\ = \frac{Q}{2\pi U_{2\infty}} \left(1 + \frac{\sigma}{1+\text{Be}} \right)^{-1/2} \int_1^{\eta_D} \sin v_2(\mu_2) \frac{d\mu_2}{1+\mu_2} \quad (1.9)$$

Решение системы уравнений (1.3)–(1.9) рассматриваемой задачи обтекания источника (прямая задача) зависит от двух безразмерных параметров подобия – числа Бернулли $0 < \text{Be} < \infty$ и числа кавитации $-1 < \sigma < 0$. Однако если из системы (1.3)–(1.9) исключить (1.9), то в зависимости от величины свободного параметра η_D можно строить решение с различными уровнями линий AEB и DOF (параметрическая задача).

2. Линия тангенциального разрыва скорости является линией тока в течениях z_1 и z_2 . Следовательно, вне концов отрезков $[-1, 1]$ действительные и мнимые части функций Жуковского $f_1(\eta_1)$ и $f_2(\eta_2)$ гладкие.

Вблизи точек $\eta_1 \leq -1$ и $\eta_2 \geq 1$, соответствующих бесконечно удаленным точкам A и F , первые члены разложения действительных частей функций $f_1(\eta_1)$ и $f_2(\eta_2)$, согласно [3], имеют вид

$$u_1(\eta_1) = -\frac{QU_{1\infty}d_0}{2\pi U_{2\infty}F_E}(\eta_1-1) + \dots, \quad u_2(\eta_2) = \frac{d_0}{(1+\text{Be})\ln(1+\eta_2)} + \dots \quad (2.1)$$

Здесь d_0 — удвоенная ордината точки A относительно точки B , деленная на $d_\infty = Q/U_{2\infty}$ — ширину струи на бесконечности в точке F

$$d_0 = -\frac{4F_E}{U_{1\infty}d_\infty} \int_{\eta_B}^1 e^{u_1(\mu_1)} \sin v_1(\mu_1) \frac{d\mu_1}{(\mu_1-1)^2} < \infty \quad (2.2)$$

Из ограниченности интеграла (2.2) следует, что вблизи точки $\eta_1 \leq 1$ функция $v_1(\eta_1)$ гладкая.

При постоянной константе Бернулли во всем течении ($Be=0$) рассматриваемая задача имеет аналитическое решение

$$f(t) = \ln \frac{-t + \sqrt{t^2 - 1}}{\sqrt{1 + \sigma}}, \quad F(t) = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{t - \eta_C}{t - \eta_A} + \ln \frac{\eta_C - \eta_A}{t - \eta_A} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{Q}{2\pi U_\infty} (1 + \sigma)^{-1/2} \int_{-1}^1 \sin(\arccos(-\mu)) \frac{(\eta_C - \mu) d\mu}{(\mu - \eta_A)^2} = 0$$

Отметим, что при $Be=0$ все течение описывается одной аналитической функцией Жуковского $f(t)$ и что аналитическое решение задачи (2.3) построено для верхней половины течения при

$$\eta_{A,P} = \eta_A = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \sigma} + \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma}} \right), \quad \eta_B = -1, \quad |\eta_C| < 1, \quad \eta_D = 1, \quad \eta_0 = \infty$$

Из (2.3) имеем, что вблизи точек $\eta_1 \geq -1$ и $\eta_2 \leq 1$, соответствующих точке слияния двух потоков C , функции Жуковского $f_1(t_1)$ и $f_2(t_2)$ представляются в виде

$$f_1(\eta_1) = a_1(1 + \eta_1)^{1/2} + ib_1(1 + \eta_1) + \dots, \quad f_2(\eta_2) = a_2(1 - \eta_2)^{1/2} + ib_2(1 - \eta_2) + \dots \quad (2.4)$$

Можно показать, что при числах $Be \neq 0$ выражения (2.4) не противоречат точным уравнениям, т. е. являются возможным локальным решением задачи.

Введем на отрезке $[-1, 1]$ действительной оси η_2 замену переменных

$$\eta_2 = -1 + 2 \exp\{I(\xi)\}, \quad I(\xi) = (\xi - 1)/(\xi + 1), \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (2.5)$$

Если (2.4) справедливо при $Be \neq 0$, то, согласно (2.1), (2.4), (2.5), действительные и мнимые части функций Жуковского $f_1(\eta_1)$ и $f_2(\eta_2)$ — гладкие функции всюду на отрезках $[-1, 1]$, за исключением точек $\eta_1 = -1$ и $\xi = 1$, вблизи которых функции $u_1(\eta_1)$ и $u_2(\xi)$ удовлетворяют условию Гельдера.

3. Численное решение системы уравнений (1.3)–(1.9) рассматриваемой задачи обтекания источника строилось методом последовательных приближений (см. [1]). При этом численное интегрирование уравнений (1.3) осуществлялось по формуле

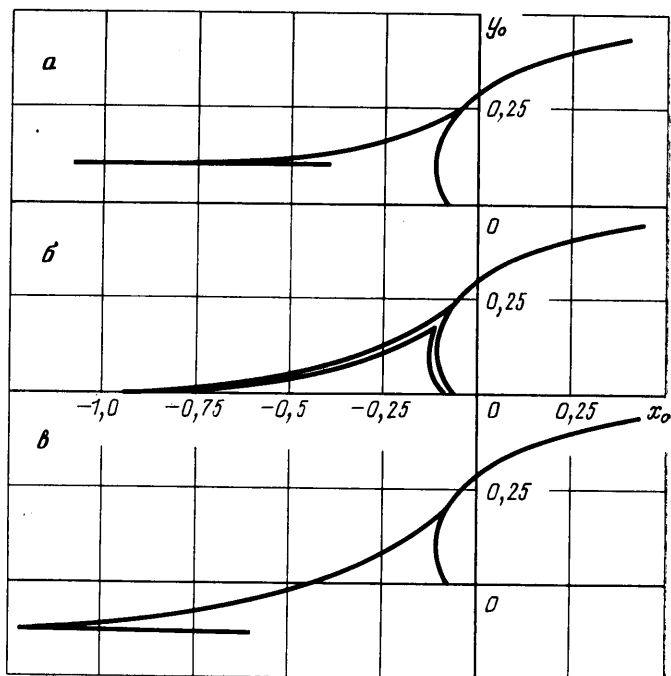
$$-\frac{2}{k} \int_{-1}^{\eta_1} \sqrt{\frac{1 + Be e^{2u_1(\mu_1)}}{1 + Be}} \frac{d\mu_1}{(\mu_1 - 1)^2} = \int_1^{\eta_2} \frac{d\mu_2}{\mu_2 + 1} = \ln \frac{1 + \eta_2}{2} = I(\xi)$$

которую нетрудно получить, продифференцировав обе части (1.3) и воспользовавшись (1.4).

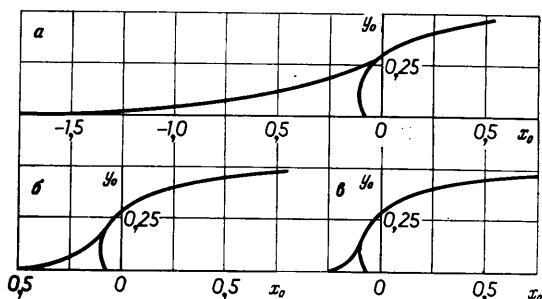
Решение сингулярных интегралов (1.5), (1.7) после несложных преобразований сводилось к решению интегралов вида

$$\int_{-1}^1 G(\mu, \eta) \frac{K(\mu, \eta) d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad G(\mu, \eta) = \frac{\varphi(\mu) - \varphi(\eta)}{\mu - \eta}$$

где функция $G(\mu, \eta)$ непрерывная, если (2.4) корректно применимо при $Be \neq 0$, а функция $K(\mu, \eta)$ аналитическая по обоим переменным всюду на $[-1, 1]$, включая концы отрезков.



Фиг. 2



Фиг. 3

Некоторые результаты расчета задачи обтекания точечного источника с образованием застойной области при различных константах Бернулли в набегающем неограниченном потоке и жидкости, вытекающей из источника, приведены на фиг. 2, 3 ($x_0 = x/d_\infty$, $y_0 = y/d_\infty$, источник расположен в начале координат). На фиг. 2, 3 показаны границы зоны кавитации и линии тангенциального разрыва скорости, полученные для $Be=10$ и различных чисел кавитации σ : $-0,5$, $-0,3$, $-0,7$, $-0,9$ (фиг. 2, 3, а, б, в соответственно).

На фиг. 2 даны решения прямой и параметрической задач. Причем на фиг. 2, б показаны границы зоны кавитации при $Be=0$ (аналитическое решение), которые располагаются внутри зоны кавитации при $Be=10$. Как следует из фиг. 2, б, 3, размеры зоны кавитации уменьшаются при $\sigma \rightarrow -1$. Численное решение задачи обтекания источника без зоны кавитации ($\sigma = -1$) получено в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шурыгин В. М. Аэродинамика тел со струями. М.: Машиностроение, 1977. 199 с.
2. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. — Докл. АН СССР, 1937, т. 16, № 1, с. 7–10.
3. Шурыгин В. М. О некоторых свойствах плоских течений при обтекании тел со струями. — Уч. зап. ЦАГИ, 1984, т. 15, № 6, с. 19–26.
4. Кузьмин С. В. Обтекание источника неограниченным потоком жидкости при различных числах Бернулли. — Уч. зап. ЦАГИ, 1984, т. 15, № 4, с. 103–109.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1985