

УДК 532.522+532.62+532.135

## РАСПАД ЖИДКИХ ПЛЕНОК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕГО ГАЗА

ЕНТОВ В. М., СУЛТАНОВ Ф. М., ЯРИН А. Л.

Теоретически исследуется механизм распада тонкой свободной жидкой пленки, ускоряемой перепадом давления газа. Такая ситуация реализуется при падении волны давления на жидкую пленку, при быстром расширении кольцевого слоя жидкости под действием внутреннего давления газа в полости, наконец, при раздувом формования полимерных пленок. Во всех подобных случаях движения пленки по нормали к срединной поверхности представляют интерес условия устойчивости невозмущенного однородного движения. Они позволяют оценить время разрушения пленки, размер образующихся в результате ее распада жидких объемов и влияние на эти величины реологических свойств жидкости.

Механизм роста возмущений пленки под действием перепада давления окружающего газа состоит в следующем. Области пленки с уменьшенной из-за начальных возмущений толщиной обладают меньшей массой и быстрее разгоняются перепадом давления. В результате в этих областях пленка выгибается в сторону области с меньшим давлением газа. При этом возникает составляющая силы, обусловленная перепадом давления и направленная вдоль срединной поверхности невозмущенной пленки. Направление этой силы таково, что она заставляет жидкость растекаться из областей сужения пленки и стекаться к местам ее утолщения. Это обеспечивает дальнейший согласованный рост возмущений толщины пленки и изгибных возмущений ее срединной поверхности. Такова специфика проявления неустойчивости Рэлея — Тейлора в случае пленки, ускоряемой поперечным перепадом давления: из-за наличия двух свободных поверхностей согласованно растут возмущения толщины пленки и изгибные возмущения ее поверхности. Существенно, что указанный механизм «работает» уже на линейной стадии роста возмущений. На нелинейной стадии вступает в действие дополнительный механизм неустойчивости, связанный с утоньшением пленки из-за ее удлинения при изгибе. В вязких и упруговязких жидкостях этому нелинейному механизму противодействует другой нелинейный эффект — рост внутренних напряжений, обусловленных удлинением пленки при изгибе. Ниже рассматривается только линейная стадия процесса распада пленки.

1. Можно ожидать столь быстрого распада пленки, что нестационарность внешних условий не успеет проявиться (это подтверждается далее расчетом). Поэтому будем считать невозмущенные значения давления газа на поверхностях пленки не зависящими от времени. Для описания динамики жидкой пленки используем квазидвумерные уравнения [1, 2], осредняющие все величины по толщине пленки. Такой подход справедлив в случае возмущений с длинами волн, много большими, чем толщина невозмущенной пленки  $h_0$ . С другой стороны, будем считать, что длины волн возмущений много меньше значений радиусов кривизны срединной поверхности невозмущенной пленки, что позволяет считать невозмущенную пленку плоской. Выберем систему координат  $xuz$  с ортами  $i, j, k$  так, чтобы плоскость  $xu$  совпала с невозмущенным положением срединной поверхности пленки, а ось  $z$  — с направлением движения.

Уравнение невозмущенного движения имеет вид

$$A_0 = \frac{dV_0(t)}{dt} = \frac{P_+^{\circ} - P_-^{\circ}}{\rho h_0} \quad (1.1)$$

Здесь  $A_0, V_0$  — невозмущенные значения ускорения и скорости пленки;  $t$  — время;  $P_+^{\circ}$  и  $P_-^{\circ}$  — невозмущенные давления газа на поверхностях

пленки ( $P_+^0 > P_-^0$ );  $\rho$  — плотность жидкости, предполагаемой несжимаемой.

Для описания возмущенного движения потребуется параметризация возмущенной срединной, а также боковых поверхностей пленки. Будем считать возмущения двумерными, принадлежащими плоскости  $xz$ . Параметризуя возмущенную срединную поверхность пленки с помощью соотношений  $\theta^1 = x$  и  $\theta^2 = y$ , имеем следующее выражение для радиуса-вектора точки на срединной поверхности:

$$\mathbf{r}(\theta^1, \theta^2, t) = \mathbf{r}_0(\theta^1, \theta^2, t) + \delta(\theta^1, t) \mathbf{k} \quad (1.2)$$

где  $\delta(\theta^1, t)$  — малое возмущение.

Аналогично для радиусов-векторов точек на поверхностях пленки имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^+(\theta^1, \theta^2, t) &= \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2, t) - \frac{1}{2} h(\theta^1, t) \mathbf{a}_3(\theta^1, t) \\ \mathbf{r}^-(\theta^1, \theta^2, t) &= \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2, t) + \frac{1}{2} h(\theta^1, t) \mathbf{a}_3(\theta^1, t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{a}_3$  — единичный вектор нормали к срединной поверхности возмущенной пленки.

Здесь и далее индексами 1 и 2 отмечаются компоненты векторов и тензоров по направлениям осей  $\theta^1$  и  $\theta^2$ , индексом 3 — нормальные к поверхности пленки компоненты, индексом 0 — отмечены невозмущенные значения переменных, плюс и минус отмечают величины, относящиеся к боковым поверхностям пленки с повышенным и пониженным давлением газа.

Введем в рассмотрение малые возмущения

$$h = h_0 + \chi, \quad V = w, \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + \mathbf{n}, \quad \mathbf{F} = \Delta P_0 \mathbf{k} + \mathbf{f} \quad (1.4)$$

Здесь  $\chi$  — возмущение толщины пленки;  $w$  — составляющая скорости жидкости вдоль невозмущенной срединной поверхности;  $\mathbf{N}$  — плоский тензор внутренних напряжений ( $\mathbf{n}$  — его возмущение) [1, 2];  $\mathbf{F}$  — вектор сил давления газа, приложенных к элементу пленки ( $\mathbf{f}$  — его возмущение). Длина срединной линии этого элемента равна единице, а длины границ этого элемента на свободных поверхностях пленки равны  $1 \pm h_0 \delta_{xx} / 2$ , где знак плюс относится к поверхности с повышенным давлением газа, минус — с пониженным. Кроме того, введено обозначение  $\Delta P_0 = P_+^0 - P_-^0$ ; индексы  $x$  и  $t$  обозначают производные по  $x$  и  $t$ .

С учетом (1.1), (1.2) и (1.4) получаем из уравнений неразрывности и баланса количества движения в тонкой пленке [1, 2] следующую систему линеаризованных безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} \chi_t + w_x &= 0, & w_t - f^1 - n_x^{11} &= 0 \\ \delta_{it} + \chi - f^3 - N_0^{11} \delta_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь уравнение количества движения спроектировано на оси  $x$  и  $z$ ; в качестве масштаба для  $x$ ,  $\chi$  и  $\delta$  взята величина  $h_0$ , а для  $w$  —  $(h_0 A_0)^{1/2}$ ; внутренние продольные напряжения в пленке  $N_0^{11}$  и  $n^{11}$  отнесены к  $\rho h_0^2 A_0$ ; проекции силы  $\mathbf{f}$  — к  $\rho h_0 A_0$ ; время — к  $(h_0 / A_0)^{1/2}$ .

Для замыкания системы (1.5) нужно конкретизировать выражения  $N_0^{11}$ ,  $n^{11}$ ,  $f^1$  и  $f^3$ .

Пусть  $\sigma$  — трехмерный тензор внутренних напряжений в жидкости,  $\sigma = -p\mathbf{g} + \tau$ , где девиатор  $\tau$  определяется реологическим определяющим соотношением,  $\mathbf{g}$  — метрический тензор, а  $p$  — давление в жидкости. Усредняя  $p$  и  $\tau$  по толщине пленки и учитывая вклад сил поверхностного натяжения, для  $N^{11}$  имеем

$$N^{11} = \left( -\frac{P_+ + P_-}{2} + \tau^{11} \right) h + 2\alpha \quad (1.6)$$

где  $\alpha$  — поверхностное натяжение жидкости. Величины  $p_+$  и  $p_-$  — значения давления жидкости в точках, лежащих на поверхностях пленки, — определяются из граничных условий

$$-p_+ + \tau^{33} = -P_+ - P_\alpha^+, \quad -p_- + \tau^{33} = -P_- - P_\alpha^- \quad (1.7)$$

$$P_\alpha^+ = \alpha(\delta_{xx} - 1/2\chi_{xx}), \quad P_\alpha^- = -\alpha(\delta_{xx} + 1/2\chi_{xx}) \quad (1.8)$$

где  $P_\alpha^+$ ,  $P_\alpha^-$  — капиллярные давления.

Из (1.6) — (1.8) окончательно получаем

$$N^{11} = [-1/2(P_+ + P_-) + \tau^{11} - \tau^{33} + 1/2\alpha\chi_{xx}]h + 2\alpha \quad (1.9)$$

С помощью (1.9) находим искомые безразмерные выражения для продольных напряжений в пленке

$$\begin{aligned} N_0^{11} &= -\Pi_0 + \tau_0^{11} - \tau_0^{33} + 2We^{-1} \\ n^{11} &= \chi(-\Pi_0 + \tau_0^{11} - \tau_0^{33}) - \Pi' + (\tau^{11} - \tau^{33})' + \chi_{xx}(2We)^{-1} \\ We &= \rho h_0^2 A_0 / \alpha, \quad \Pi = 1/2(P_+ + P_-) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь  $We$  — число Вебера; давление газа и девиаторные напряжения отнесены к  $\rho h_0 A_0$ ; штрихами отмечены возмущения.

Используя вычисленные ранее с помощью (1.3) длины образующих боковых поверхностей рассматриваемого элемента пленки, а также введем нормали к боковым поверхностям, получаем выражение

$$\mathbf{F} = (P_+ - P_- + h_0 \Pi_0 \delta_{xx}) \mathbf{k} + (-\Delta P_0 \delta_x + \Pi_0 \chi_x) \mathbf{i} \quad (1.11)$$

Из (1.11) находим искомые безразмерные выражения для возмущений составляющих внешней силы, обусловленной давлением газа

$$f^1 = -\delta_x + \Pi_0 \chi_x, \quad f^3 = \Pi_0 \delta_{xx} + \Delta P' \quad (1.12)$$

где  $\Delta P' = P_+' - P_-'$ , причем давление вновь отнесено к  $\rho h_0 A_0$ .

При вычислении возмущений давления газа будем пренебрегать его вязкостью, а также сжимаемостью. Последнее допустимо, если давление с каждой стороны пленки изменяется достаточно слабо в направлении внешней нормали к ней; при этом перепад давления газа на пленке  $\Delta P_0$  может быть велик. Возмущения потенциала скорости газа  $\varphi_\pm$  с разных сторон пленки определяются из решения задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi_\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\pm}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_\pm}{\partial z} \Big|_{z=\mp 1/2 h_0} = \delta_i \mp \frac{1}{2} \chi_i \quad (1.13)$$

Для гармонических возмущений ( $\delta$  и  $\chi \sim \exp(ikx)$ ;  $k$  — волновое число) находим

$$\varphi_\pm = \pm k^{-1} (\delta_i \mp 1/2 \chi_i) \exp[k(\pm z + 1/2 h_0)] \quad (1.14)$$

С помощью (1.14) и линеаризованного интеграла Лагранжа — Коши вычисляем возмущения давления газа на поверхностях пленки

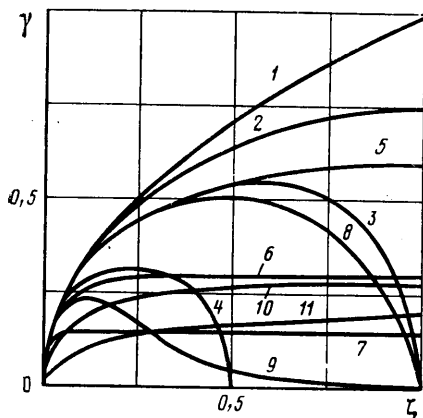
$$P_+' = -\rho_1^+ (\delta_{11} - 1/2 \chi_{11}) k^{-1}, \quad P_-' = \rho_1^- (\delta_{11} + 1/2 \chi_{11}) k^{-1} \quad (1.15)$$

где  $\rho_1$  — плотность газа.

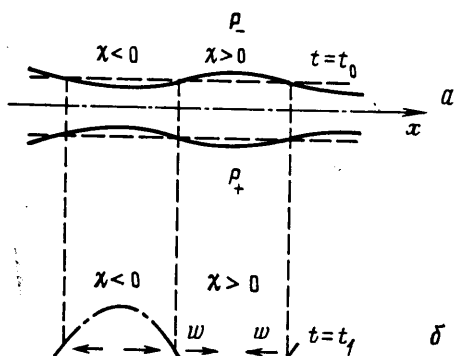
Переходя к безразмерным переменным, с помощью (1.15) находим

$$\begin{aligned} \Pi' &= (-2\beta_1 \delta_{11} + \beta_2 \chi_{11}) (2\zeta)^{-1} \\ \Delta P' &= (-2\beta_2 \delta_{11} + \beta_1 \chi_{11}) \zeta^{-1} \\ \beta_1 &= (\rho_1^+ - \rho_1^-) (2\rho)^{-1}, \quad \beta_2 = (\rho_1^+ + \rho_1^-) (2\rho)^{-1}, \quad \zeta = kh_0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Подставляя (1.10), (1.12) и (1.16) в уравнения неразрывности и количества движения (1.5), получим безразмерные уравнения задачи в



Фиг. 1



Фиг. 2

виде

$$\begin{aligned} \chi_t + w_x = 0 \\ w_t + \delta_x - \tau_0 \chi_x - (\tau^{11} - \tau^{33})'_x - \chi_{xxx} (2We)^{-1} + (-2\beta_1 \delta_{tt} + \beta_2 \chi_{tt}) (2\zeta)^{-1} = 0 \quad (1.17) \\ \delta_{tt} + \chi - \tau_0 \delta_{xx} - 2\delta_{xx} We^{-1} - (-2\beta_2 \delta_{tt} + \beta_1 \chi_{tt}) \zeta^{-1} = 0 \end{aligned}$$

где  $\tau_0 = \tau_0^{11} - \tau_0^{33}$ .

Остается конкретизировать реологическое определяющее уравнение жидкости. Ниже рассмотрено несколько характерных моделей. В случае идеальной жидкости

$$\tau_0^{11} = \tau_0^{33} = (\tau^{11})' = (\tau^{33})' = 0 \quad (1.18)$$

Для вязкой ньютоновской жидкости после перехода к безразмерным переменным имеем

$$\tau_0^{11} = \tau_0^{33} = 0, \quad (\tau^{11})' = \frac{2w_x}{Re}, \quad (\tau^{33})' = \frac{2\chi_t}{Re} \quad (1.19)$$

$$Re = \frac{\rho h_0^{3/2} A_0^{1/2}}{\mu}$$

где  $\mu$  — вязкость жидкости.

Для упругой «жидкости» (точнее, эластичного твердого тела) с реологическим уравнением состояния [3]

$$\tau = 2G(B - \alpha_1 B^{-1}) \quad (1.20)$$

безразмерные внутренние напряжения удовлетворяют соотношениям

$$\tau_0 = 2T(\lambda^2 - \lambda^{-2}), \quad (\tau^{11} - \tau^{33})' = -4T(\lambda^2 + \lambda^{-2})\chi, \quad T = G(1 + \alpha_1)(\rho h_0 A_0)^{-1} \quad (1.21)$$

где  $G$  — модуль упругости,  $B$  — тензор Грина, определяемый в базисе  $a_1, a_2, a_3$  выражением

$$B = \begin{vmatrix} \lambda^2(1 - 2\chi/h_0) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2}(1 + 2\chi/h_0) \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

Начальное удлинение вдоль оси  $Ox$ , равное отношению толщины пленки в ненапряженном состоянии  $H_0$  к  $h_0$ , обозначено  $\lambda$ ;  $\alpha_1$  — безразмерный реологический параметр модели (1.20).

В случае упруговязкой максвелловской жидкости с верхней конвективной производной имеем [4]

$$\frac{D\tau}{Dt} = \tau \cdot D + D \cdot \tau + \tau \cdot \Omega - \Omega \cdot \tau - \frac{\tau}{\theta} + \frac{2\mu}{\theta} D \quad (1.23)$$

так что безразмерные внутренние напряжения определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_0^{11}}{dt} + \frac{\tau_0^{11}}{\theta_*} = 0, \quad \frac{d\tau_0^{33}}{dt} + \frac{\tau_0^{33}}{\theta_*} = 0 \\ \frac{\partial(\tau^{11})'}{\partial t} + \frac{(\tau^{11})'}{\theta_*} = (2\tau_0^{11} + 2S)w_x, \quad \frac{\partial(\tau^{33})'}{\partial t} + \frac{(\tau^{33})'}{\theta_*} = (2\tau_0^{33} + 2S)\chi_t \end{aligned} \quad (1.24)$$

Здесь  $D/Dt$  — индивидуальная производная,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{\Omega}$  — тензоры скоростей деформации и вращения,  $\theta$  — время релаксации;  $\theta_* = \theta(A_0/h_0)^{1/2}$ ;  $S = (\text{Re } \theta_*)^{-1}$ .

Итак, в случаях идеальной, вязкой ньютоновской, «упругой» и упруго-вязкой максвелловской жидкостей уравнения (1.17) замыкаются реологическими соотношениями (1.18), (1.19), (1.21) и (1.24) соответственно.

2. При исследовании устойчивости возьмем малые возмущения в виде  $\text{const exp}(\gamma_1 t + ikx)$ , где  $\gamma_1$  — инкремент. Для идеальной жидкости в пренебрежении возмущениями давления окружающего газа, что справедливо в случае  $\rho_1^+, \rho_1^- \ll \rho$ , находим с помощью (1.17) и (1.18) характеристическое уравнение в виде

$$\begin{aligned} \gamma = \{ -\zeta^2(1 + 1/4\zeta^2) \text{We}^{-1} + \zeta [\zeta^2(1 - 1/4\zeta^2)^2 \text{We}^{-2} + 1]^{1/2} \}^{1/2} \\ \gamma = \gamma_1 (A_0/h_0)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Зависимость (2.1) представлена на фиг. 1 кривыми 1–4. Им соответствуют значения числа Вебера  $\text{We} = \infty; 2,5; 1; 0,25$ . Граница области неустойчивости отвечает волновому числу  $\zeta = \zeta_1 = \text{We}^{1/2}$ : коротковолновые возмущения стабилизируются поверхностным натяжением, а длинноволновые нарастают. Из вида дисперсионных кривых можно заключить, что распад пленки происходит с характерным временем, определяемым значением  $\gamma_*^{-1}$ , а размер кусков определяется волновым числом  $\zeta_*$ . Величина  $\gamma_*$  обозначает максимальное значение инкремента,  $\zeta_*$  — соответствующее значение волнового числа. Распад пленки происходит монотонно (без осцилляций), поскольку мнимая часть  $\gamma(\zeta)$  равна нулю.

Проиллюстрируем механизм, ведущий к росту возмущений, на простейшем примере идеальной жидкости в отсутствие поверхностного натяжения и влияния возмущений давления окружающего газа. Пусть в начальный момент  $t = t_0$  срединная поверхность пленки не возмущена и представляет собой плоскость, однако имеются возмущения толщины (см. фиг. 2, а). В областях сужений пленки ее инерция меньше, чем в областях вздутый, поэтому под действием перепада давления срединная поверхность в областях сужений выгнется в сторону области с пониженным давлением газа (фиг. 2, б) (в соответствии с третьим уравнением (1.17)  $\delta_{tt} = -\chi$ ). После того как срединная поверхность пленки изогнулась ( $t = t_1$ ), на жидкость начинают действовать силы, обусловленные перепадом давления газа и направленные вдоль оси  $Ox$ . Эти силы заставляют жидкость растекаться из областей сужений и притекать в области вздутый пленки. Направления продольных скоростей в пленке указаны на фиг. 2, б, а ускорение определяется вторым уравнением (1.17):  $w_t = -\delta_x$ . Наличие продольных течений в пленке приводит в силу первого уравнения (1.17) — уравнения неразрывности — к прогрессированию возмущений толщины, причем  $\chi_t = -w_x$  и, следовательно,  $-\delta_{ttt} = -w_x$ ,  $\delta_{ttt} = w_{tx} = -\delta_{xxx}$ . Таким образом, получаем

$$\frac{\partial^4 \delta}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \chi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2)$$

Спектр (2.2)  $\gamma = \zeta^{1/2}$  совпадает с асимптотикой спектра (2.1) при  $\text{We} \rightarrow \infty$ .

Отметим, что случай пленки идеальной жидкости исследовался ранее с использованием трехмерных уравнений гидродинамики [5]. Оказывается, что полученный здесь в рамках приближения тонкой пленки результат  $\gamma = \zeta^{1/2}$  совпадает с точным результатом трехмерной теории, справедли-

вым не только для длинных, но и для коротких волн возмущений. Это служит косвенным подтверждением возможности использования асимптотического приближения тонкой пленки для анализа задач с более сложной реологией жидкости, не допускающих строгого рассмотрения.

Характеристическое уравнение, найденное с помощью (1.17) и (1.19) для случая вязкой ньютоновской жидкости в пренебрежении возмущениями давления окружающего газа, имеет вид

$$\gamma^4 + \frac{4\xi^2\gamma^3}{\text{Re}} + \xi^2 \left( 2 + \frac{\xi^2}{2} \right) \frac{\gamma^2}{\text{We}} + \frac{8\xi^4\gamma}{\text{Re We}} + \frac{\xi^6}{\text{We}^2} - \xi^2 = 0 \quad (2.3)$$

Соответствующие зависимости  $\gamma(\xi)$  представлены на фиг. 1 кривыми 5–9 ( $\text{We} = \infty$ : 5 –  $\text{Re}=1$ , 6 –  $\text{Re}=0,1$ , 7 –  $\text{Re}=0,01$ ;  $\text{We}=1$ : 8 –  $\text{Re}=10$ , 9 –  $\text{Re}=0,1$ ). Граница области неустойчивости по-прежнему соответствует волновому числу  $\xi = \xi_1 = \text{We}^{1/2}$ . В отсутствие поверхностного натяжения функция  $\gamma(\xi)$  быстро приближается к асимптотическому значению  $\gamma_* = (\text{Re}/4)^{1/2}$ . Таким образом, вязкость жидкости увеличивает характерное время распада пленки:  $t_* \sim \mu^{1/2}$ . Из графиков зависимости  $\gamma(\xi)$  при  $\text{Re} \leq 1$  и  $\text{We} = \infty$  видно, что характерное время роста возмущений с различными волновыми числами  $\xi$  приблизительно одинаково. Отсюда заключаем, что при распаде пленки в отсутствие поверхностного натяжения образуются куски, имеющие широкое распределение по размерам.

Характеристическое уравнение для случая вязкой ньютоновской жидкости с учетом возмущений давления окружающего газа при  $\text{We} \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\left[ 1 + \beta \left( \frac{2}{\xi} + \frac{\xi}{2} \right) \right] \gamma^4 + 4 \left( 1 + \frac{2\beta}{\xi} \right) \frac{\xi^2\gamma^3}{\text{Re}} + 2\beta\xi\gamma^2 - \xi^2 = 0 \quad (2.4)$$

где считается, что  $\rho_1^+ \gg \rho_1^-$ , и поэтому  $\beta = \beta_1 \approx \beta_2 \approx \rho_1^+ / (2\rho)$ . Соответствующие зависимости представлены на фиг. 1 кривыми 10–11 ( $\text{We} = \infty$ ,  $\text{Re} = 0,1$ : 10 –  $\beta = 0,1$ , 11 –  $\beta = 1$ ). Из анализа результатов следует, что влияние возмущений окружающей среды начинает сказываться при  $\beta \geq 0,1$ ; оно проявляется в замедлении распада пленки.

Для упругой «жидкости» в пренебрежении поверхностным натяжением с помощью (1.17) и (1.21) находим характеристическое уравнение в виде

$$\gamma^4 \left[ 1 + \beta \left( \frac{2}{\xi} + \frac{\xi}{2} \right) \right] + \gamma^2 \left\{ 4T\xi^2(\lambda^2 + \lambda^{-2}) + 2\beta\xi + 2\beta T\xi^2 \left[ \frac{1}{2} \xi(\lambda^2 - \lambda^{-2}) + \frac{2}{\xi}(\lambda^2 + 3\lambda^{-2}) \right] \right\} - \xi^2 + 4\xi^4 T^2 (\lambda^2 + 3\lambda^{-2}) (\lambda^2 - \lambda^{-2}) = 0 \quad (2.5)$$

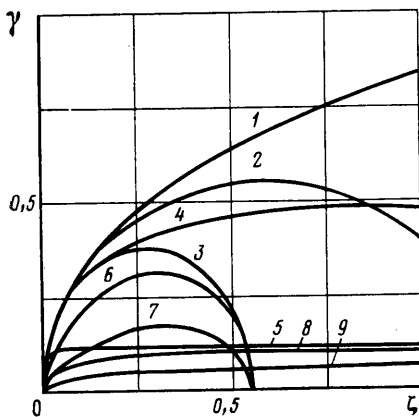
Соответствующие зависимости представлены на фиг. 3 ( $T=0,1$ ,  $\beta=0$ : 1 –  $\lambda=1$ , 2 –  $\lambda=2$ , 3 –  $\lambda=3$ ;  $\lambda=1$ ,  $\beta=0$ : 4 –  $T=0,5$ , 5 –  $T=10$ ;  $T=0,1$ ,  $\lambda=3$ : 6 –  $\beta=0,1$ , 7 –  $\beta=1$ ;  $T=10$ ,  $\lambda=1$ : 8 –  $\beta=0,1$ , 9 –  $\beta=1$ ). Начальное натяжение пленки, равно как и поверхностное, стабилизирует коротковолновые возмущения. Граница области неустойчивости  $\xi_1$  определяется выражением

$$\xi_1 = (2T)^{-1} [(\lambda^2 - \lambda^{-2})(\lambda^2 + 3\lambda^{-2})]^{-1/2} \quad (2.6)$$

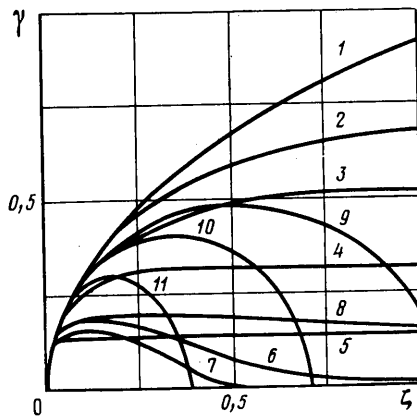
и не зависит от возмущений давления окружающего газа. В отсутствие начального натяжения пленки ( $\lambda=1$ ) функция  $\gamma(\xi)$  с ростом  $\xi$  быстро приближается к асимптотическому значению  $\gamma_* = 1/(8T)^{1/2}$ . Таким образом, время распада в этом случае увеличивается с увеличением модуля упругости,  $t_* \sim G^{1/2}$ , и не зависит от возмущений давления окружающего газа.

При  $\beta \rightarrow 0$  из (2.5) находим

$$\begin{aligned} \gamma &= \{ -2T\xi^2(\lambda^2 + \lambda^{-2}) + [16T^2\xi^4\lambda^{-4} + \xi^2]^{1/2} \}^{1/2} \\ \gamma_* &= \lambda(4\sqrt{T})^{-1} [\lambda^4 + 1 - (\lambda^8 + 2\lambda^4 - 3)^{1/2}]^{1/2} \\ \xi_* &= \lambda^2 (\sqrt{32T})^{-1} [-1 + (\lambda^4 + 1)(\lambda^8 + 2\lambda^4 - 3)^{-1/2}]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.7)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Роль возмущений давления окружающего газа иллюстрируется на фиг. 3 кривыми 6–9. Влияние возмущений давления окружающего газа становится заметным при  $\beta \geq 0,1$ . Видим, что с увеличением  $\beta$  увеличивается время распада пленки и несколько уменьшается характерный размер кусков.

Рассмотрим теперь пленку упруговязкой жидкости. Из (1.24) в случае невозмущенного движения пленки упруговязкой жидкости получаем

$$\tau_0^{11} = \tau_1 \exp\left(-\frac{t}{\theta_*}\right), \quad \tau_0^{33} = \tau_3 \exp\left(-\frac{t}{\theta_*}\right) \quad (2.8)$$

Будем рассматривать два предельных случая. Первый — когда начальные напряжения в пленке отсутствуют

$$\tau_0^{11} = \tau_0^{33} = \tau_1 = \tau_3 = 0 \quad (2.9)$$

и второй — когда время релаксации достаточно велико в сравнении с характерным временем роста возмущений. Следовательно, во втором случае можно считать  $\tau_0^{11} \approx \tau_1 = \text{const}$ ,  $\tau_0^{33} \approx \tau_3 = \text{const}$ . С помощью (1.17), (1.24) и (2.9) получаем характеристическое уравнение в виде

$$\begin{aligned} \gamma^5 + \frac{\gamma^4}{\theta_*} + \xi^2 \left( 4S + \frac{2}{We} + \frac{\xi^2}{2We} \right) \gamma^3 + \frac{\xi^2}{\theta_*} \left( 2 + \frac{\xi^2}{2} \right) \frac{\gamma^2}{We} + \\ + \xi^2 \left( \frac{8S\xi^2}{We} + \frac{\xi^4}{We^2} - 1 \right) \gamma + \frac{\xi^2}{\theta_*} \left( \frac{\xi^4}{We^2} - 1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Возмущениями давления окружающего газа здесь вновь пренебрегаем. Соответствующие результаты расчетов представлены на фиг. 4 кривыми 1–8 ( $We = \infty$ ,  $S = 1$ : 1 —  $\theta_* = 0,1$ , 2 —  $\theta_* = 1$ , 3 —  $\theta_* = 10$ ;  $We = \infty$ ,  $\theta_* = 1$ : 4 —  $S = 10$ , 5 —  $S = 100$ ;  $We = 10$ ,  $S = 10$ : 6 —  $\theta_* = 10$ , 7 —  $\theta_* = 100$ ; 8 —  $We = 100$ ,  $\theta_* = 10$ ,  $S = 10$ ). Сравнение кривых 3 и 4, которым отвечает  $Re = 0,1$ , с соответствующей кривой 6 (фиг. 1) для ньютоновской жидкости ( $\theta_* = 0$ ) иллюстрирует дестабилизирующее влияние релаксационных эффектов ( $\theta_* > 0$ ): чем больше время релаксации, тем меньше характерное время распада пленки упруговязкой жидкости в сравнении с распадом пленки ньютоновской жидкости с той же вязкостью. Этот результат объясняется тем, что усиление релаксационных эффектов при фиксированной вязкости эквивалентно уменьшению модуля упругости жидкости, т. е. увеличению ее «податливости» и ускорению роста возмущений.

Сравнение с распадом пленки упругой «жидкости» ( $\theta_* = \infty$ ) при  $S = 2T$  показывает (см. кривые 1–3 на фиг. 4 и кривую 4 на фиг. 3), что усиление релаксационных эффектов при фиксированном модуле упругости жидкости ведет к замедлению роста возмущений. В этом случае чем больше время релаксации, тем больше характерное время распада.

В отсутствие поверхностного натяжения функция  $\gamma(\zeta)$  быстро приближается с увеличением  $\zeta$  к асимптотическому значению  $\gamma_*$ , которое яв-

ляется положительным корнем следующего кубического уравнения:

$$\theta_*^{-1} + \gamma_* - 4S\gamma_*^3 = 0 \quad (2.11)$$

Легко видеть, что при  $\theta_* \rightarrow 0$   $\gamma_* \rightarrow (4S\theta_*)^{-1/2} = (Re/4)^{1/2}$ , а при  $\theta_* \rightarrow \infty$   $\gamma_* \rightarrow S^{-1/2}/2$ . Полученные асимптотические значения  $\gamma_*$  совпадают с соответствующими результатами для ньютоновской жидкости и упругой среды (с тем же модулем упругости:  $S=2T$ ).

Поверхностное натяжение, естественно, стабилизирует коротковолновые возмущения пленок упруговязких жидкостей. Граница области устойчивости  $\zeta_1$  по-прежнему определяется формулой  $\zeta_1 = We^{1/2}$ , однако при больших значениях  $\theta_*$  (см. кривую 7 на фиг. 4) область неустойчивости значительно сужается со стороны коротких волн, поскольку функция  $\gamma(\zeta)$  в этой области быстро стремится к нулю.

Рассмотрим теперь пленку упруговязкой жидкости, начальные напряжения в которой созданы в результате длительного растяжения пленки при  $t \leq 0$  с постоянной скоростью деформации. В соответствии с реологическим уравнением состояния имеем

$$\tau_0^{33} = -S \left( 2 + \frac{S}{\tau_0^{11}} \right)^{-1} \quad (2.12)$$

где напряжения отнесены к  $\rho h_0 A_0$ .

Начальные напряжения должны релаксировать со временем. Ограничимся случаем «быстрой» неустойчивости ( $\gamma_1 \theta \gg 1$ ), когда можно пренебречь релаксацией начальных напряжений при исследовании роста возмущений и считать  $\tau_0^{11}$  и  $\tau_0^{33}$  не зависящими от времени. При этом характеристическое уравнение, определяемое с использованием (1.17), (1.24) и (2.12), принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma &= \{-2\zeta^2 S(1-R^2)^{-1} + [4\zeta^4 S^2(1+R)^{-2} + \zeta^2]^{1/2}\}^{1/2} \\ R &= (1 + S/\tau_0^{11})^{-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Соответствующие результаты представлены на фиг. 4 кривыми 9–11 ( $S=0,5$ : 9 —  $R=0,4$ , 10 —  $R=0,6$ , 11 —  $R=0,8$ ). Начальное натяжение пленки упруговязкой жидкости играет стабилизирующую роль, в частности оно полностью подавляет рост коротковолновых возмущений. Характеристические распады пленки определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (1-R^2) [R(2-R)]^{-1/2} (2S)^{-1} \\ \zeta_* &= (1+R) (2\sqrt{2}S)^{-1} \{-1 + [R(2-R)]^{-1/2}\}^{1/2} \\ \gamma_* &= \{(1+R) [4S(1-R)]^{-1} [1 - (R(2-R))^{1/2}]\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

В заключение отметим, что во всех рассмотренных случаях  $\gamma_* = O(1)$ , откуда следует, что характерное время роста возмущений  $t_* \sim (h_0/A_0)^{1/2}$ , т. е. порядка времени смещения первоначально неподвижной пленки на одну ее толщину. Этим оправдывается принятое в расчете допущение о квазистационарности внешних условий в окружающей газовой среде. Оценкой размера кусков, на которые распадается пленка, будет  $l_* = 2\pi h_0 / \zeta_*$  — длина волны наиболее быстро растущего возмущения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М. Динамика вязких и упругих жидкостей. Препринт № 130. М.: Ин-т пробл. мех. АН СССР, 1979.
2. Ertov V. M. On the dynamics of films of viscous and elastoviscous liquids. — Arch. Mech. Stosow., 1982, v. 34, № 4, p. 395–407.
3. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 438 с.
4. Астарига Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
5. Кузнецов В. М., Шер Е. Н. Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце. — ПМТФ, 1964, № 2, с. 66–73.

Москва

Поступила в редакцию  
26.III.1985