

УДК 532.516.5+532.526.75

**ТОРМОЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРЕ МАЛОЙ ВЫСОТЫ
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

КРЫМОВ В. А., МАНИН Д. Ю.

Проблеме релаксации к состоянию твердотельного вращения жидкости, заключенной во вращающемся осесимметричном сосуде, посвящена обширная литература. Особенно широко изучались разгон и торможение однородной жидкости в круговом цилиндре (см., например, [1–6]; о более ранних работах – [7]). Эта задача решена в линейном приближении, когда угловые скорости сосуда и жидкости близки [8]. Слабонелинейный случай рассмотрен в [9, 10]. Все аналитические результаты по слабонелинейному разгону и торможению связаны с различными модификациями полумпирической модели, введенной для описания разгона жидкости из состояния покоя в конечном цилиндре [11]. В работе [4] адекватность этой модели подвергнута сомнению и указано на необходимость учета некармановского пограничного слоя. В [5] модель [11] применяется, в частности, к жидкости, заключенной между двумя бесконечными дисками, где ее применение более оправданно.

Эксперименты, описанные в литературе, проводились с цилиндрами с отношением радиуса к высоте порядка единицы. В этом случае течение при резком торможении становится турбулентным из-за неустойчивостей на боковой стенке. Поэтому экспериментальные результаты по сильнонелинейному торможению до настоящего времени отсутствовали.

В настоящей работе задача об осесимметричном движении жидкости между бесконечными дисками решается методом сращиваемых асимптотических разложений без привлечения модельных предположений. Для сильнонелинейной стадии торможения найдены решения, соответствующие начальным состояниям, отличным от твердого вращения, когда пограничный слой не является кармановским. Полученные экспериментальные результаты находятся в качественном и количественном согласии с теорией.

1. Рассматривается однородная несжимаемая жидкость вязкости ν , ограниченная двумя бесконечными параллельными дисками, расстояние между которыми L . Диски вращаются соосно с одинаковой угловой скоростью Ω , зависящей от времени. Введем масштабы безразмеривания для времени $L^2/4\nu$, длины $L/2$ и скорости $2\nu/L$. При этом характерная безразмерная угловая скорость жидкости пропорциональна числу Рейнольдса или обратному числу Экмана: $Re = E^{-1} = \omega L^2/\nu$. Осесимметричные течения удовлетворяют уравнениям Навье – Стокса с условиями прилипания на дисках

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{u^2}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

$$u=w=0, \quad v=\Omega r \quad (z=\pm 1) \quad (1.5)$$

Здесь (r, φ, z) — цилиндрические координаты, u — радиальная, v — азимутальная и w — вертикальная компоненты скорости.

Будем, следуя Карману [12], искать решение задачи (1.1)–(1.5) в виде

$$u=rF(r, t), \quad v=rG(z, t) \quad (1.6)$$

$$w=H(z, t), \quad p=r^2K(t)+M(z, t)$$

Подставляя (1.6) в (1.1)–(1.5), исключая давление из уравнений (1.1), (1.3) и функцию F с помощью уравнения неразрывности, придем к следующей краевой задаче:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + 4G \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G - G \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

$$H(\pm 1, t) = \frac{\partial H}{\partial z}(\pm 1, t) = 0, \quad G(\pm 1, t) = \Omega(t) \quad (1.8)$$

Задача (1.7), (1.8) решена в [8] в линейной постановке, когда $\Omega(t) = \Omega_0(1 + \varepsilon \theta(t))$, где ε — число Россби, $\varepsilon = \Delta\Omega/\Omega$, $\varepsilon \ll 1$, а θ — функция Хевисайда. Согласно этому решению, при малых числах Экмана $E \ll 1$ вблизи твердых границ в жидкости возникают тонкие пограничные слои, в которых течение направлено от периферии к центру (для торможения, $\varepsilon < 0$). Остальную массу жидкости можно считать невязкой, благодаря чему ее момент количества движения сохраняется. Поэтому радиальное течение, направленное во внутренней области от центра к периферии, приводит к растяжению кольцевых линий тока и уменьшению угловой скорости жидкости. Характерное время этого процесса составляет $\tau_E = L(\Omega\nu)^{-1/2} = E^{1/2}L^2\nu^{-1} = E^{-1/2}\Omega^{-1}$. Оно много больше характерного времени собственных движений пограничного слоя $\tau_0 = \Omega^{-1}$, который поэтому квазистационарен.

Характерные величины компонент скорости и их производных во внутренней области и в пограничном слое соответственно следующие:

$$u, w = O(vE^{1/2}), \quad \frac{\partial}{\partial z} = O(1) \quad (1.9)$$

$$u = O(v), \quad w = O(vE^{1/2}), \quad \frac{\partial}{\partial z} = O(E^{-1/2}) \quad (1.10)$$

2. Будем решать задачу (1.7), (1.8) методом сращиваемых асимптотических разложений, считая, что соотношения (1.9), (1.10) сохраняют силу и в нелинейном случае. Справедливость этого предположения подтвердят полученные результаты. Введем обозначение $\omega(t) \equiv G(0, t)$ — безразмерная угловая скорость, пропорциональная числу Рейнольдса, и перейдем к новым переменным, которые будем считать порядка $O(1)$. Согласно (1.9), (1.10), положим для внутренней области и пограничного слоя соответственно

$$G(z, t) = \omega G_{0I}(z, \tau), \quad H(z, t) = \omega^{1/2} H_{0I}(z, \tau) \quad (2.1)$$

$$G(z, t) = \omega G_{0B}(\xi, \tau), \quad H(z, t) = \omega^{1/2} H_{0B}(\xi, \tau) \quad (2.2)$$

$$\tau = \int \omega^{1/2} dt, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \omega^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} = O(1)$$

$$\xi = \omega^{1/2}(1 \pm z)$$

Подставляя (2.1) в (1.7) и учитывая только главные члены, получим приближенные уравнения для внутренней области

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{0I}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} - \omega^{\frac{1}{2}} \frac{\partial H_{0I}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (2.3)$$

Отсюда и из граничных условий следует

$$G_{0I} = 1, \quad H_{0I} = zh(t)$$

Теперь уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \omega^{\frac{1}{2}} h = 0 \quad (2.4)$$

где значение h определяется ниже из условий сшивки с пограничным слоем.

Уравнения пограничного слоя получим, подставляя (2.2) в (1.7), (1.8) и удерживая только главные члены

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_{0B}}{\partial \zeta^2} + G_{0B} \frac{\partial H_{0B}}{\partial \zeta} - H_{0B} \frac{\partial G_{0B}}{\partial \zeta} &= 0 \\ \frac{\partial^4 H_{0B}}{\partial \zeta^4} - H_{0B} \frac{\partial^3 H_{0B}}{\partial \zeta^3} - 4G_{0B} \frac{\partial G_{0B}}{\partial \zeta} &= 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$H_{0B} = \frac{\partial H_{0B}}{\partial \zeta} = 0, \quad G_{0B} = \Omega/\omega \quad (\zeta=0) \quad (2.6)$$

Условия сшивки с внутренней областью дают граничные условия для пограничного слоя при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial H_{0B}}{\partial \zeta} = 0, \quad G_{0B} = G_{0I}(-1, \tau) = 1 \quad (2.7)$$

$$H_{0B} = H_{0I}(-1, \tau) = -h \quad (2.8)$$

Краевая задача (2.5)–(2.7) неоднократно рассматривалась [13, 14]. Ее решение единственно, и из него однозначно определяется значение $H_{0B}|_{\zeta=\infty}$, т. е., согласно (2.8), зависимость h от Ω/ω . Эта зависимость, найденная численными методами в [13], позволяет замкнуть уравнение (2.4).

Таким образом, задача свелась к простому уравнению (2.4) с известной функцией $h(\Omega/\omega)$. Такое упрощение является следствием того, что уравнения пограничного слоя не содержат производных по времени и все процессы происходят на шкале «экмановского» времени τ_E (отсюда следует условие на угловую скорость вращения дисков $\Omega = O(\Omega E^{-\frac{1}{2}})$). Фактически переход к экмановскому времени равносителен усреднению быстрых собственных движений пограничного слоя и выделению более медленной вынужденной составляющей. Это будет продемонстрировано ниже на экспериментальном материале.

Случай торможения к состоянию покоя $\Omega=0$ (и вообще сильнонелинейной стадии торможения $\Omega/\omega \ll 1$) выделяется тем, что для решения уравнения (2.4) необходимо знать только одно частное значение функции $h(\Omega/\omega)$, именно $h(0) = h_0$. Такое решение, удовлетворяющее началь-

ному условию $\omega(0) = \omega_0$, имеет в размерных переменных вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{r}{t+t_0}, & v &= \frac{L^2}{\nu h_0^2} \frac{r}{(t+t_0)^2} \\ w &= \frac{-2z}{t+t_0} & \left(t_0 &= \frac{L}{h_0 \sqrt{\omega_0 \nu}} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Значение h_0 составляет [13] 1,369.

3. Для сильнонелинейной стадии торможения численное интегрирование уравнений пограничного слоя оказывается необходимым только для определения некоторой универсальной константы порядка единицы. Такая ситуация имеет место и в более общем случае некармановского торможения. Рассмотрим в качестве исходных уравнения (1.1)–(1.5) и будем считать, что $\partial/\partial r = O(r^{-1})$. Далее, опираясь на результаты предыдущего параграфа, положим для внутренней области

$$\begin{aligned} v &= g(r, t) = O(rE^{-1}) \\ u &= f(r, t) = O(\nu E^{1/2}) = O(rE^{-1/2}) \\ w &= zh(r, t) = O\left(\frac{\nu}{r} E^{1/2}\right) = O(E^{-1/2}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где, как и раньше, число Экмана обратно пропорционально угловой скорости жидкости, взятой для определенности в средней плоскости. Однако теперь то и другое может зависеть от радиальной координаты. Подставляя (3.1) в уравнения Навье – Стокса (1.1)–(1.5) и отбрасывая малые члены, получим

$$\frac{r}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} + f \frac{\partial r g}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial r f}{\partial r} + rh = 0 \quad (3.2)$$

Здесь радиальная часть лапласиана считается малой, что возможно при выполнении условия $r \gg E^{1/2}$. Аналогично для пограничного слоя примем

$$u, v = O(rE^{-1}), \quad w = O(E^{-1/2}), \quad \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} = O(E^{-1/2}) \quad (3.3)$$

Откуда следуют известные уравнения пограничного слоя на бесконечной пластине [14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] &= 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial r u}{\partial r} + r \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Граничные условия на верхнем и нижнем дисках и условия спивки с внутренней областью имеют вид соответственно

$$u = v = w = 0 \quad (z = \pm 1) \quad (3.5)$$

$$u = 0, \quad v = g, \quad w = -h \quad ((1 \mp z) = O(E^{1/2})) \quad (3.6)$$

Полученная система уравнений (3.2), (3.4)–(3.6) допускает однопараметрическое семейство автомодельных подстановок вида

$$\begin{aligned} f &= t^{(1+p)/(1-p)} f_p(\xi), & g &= t^{2p/(1-p)} g_p(\xi) \\ h &= t^{-1} h_p(\xi), & \xi &= r t^{2/(p-1)} \quad (p \neq 1) \end{aligned}$$

Получить аналитические выражения для функций f_p , h_p , g_p не представляется возможным, однако удастся найти две асимптотики. Одна из них имеет место при $\xi^{1/2(p-1)} \rightarrow 0$, т. е. при малых временах t , и описывает начальную стадию торможения (в безразмерном и в размерном виде соответственно)

$$g_p \sim A \xi^p \left(1 - 2\sqrt{A} C(p) \frac{1+p}{3+p} \xi^{1/2(p-1)} \right) \quad (3.7)$$

$$v \sim A \left(\frac{2r}{L} \right)^p \left[1 - 2\sqrt{A} C(p) \frac{1+p}{3+p} \left(\frac{2r}{L} \right)^{1/2(p-1)} \frac{4vt}{L^2} \right] \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что параметр p определяет вид начального состояния: $v(r, 0) = A(2r/L)^p$.

Параметр $C(p)$, входящий в (3.7) и (3.8), играет ту же роль, что и константа h_0 в предыдущем параграфе: пусть функции F , G , H удовлетворяют «обобщенной системе Кармана» с граничными условиями Бедвадта (см. [14])

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left[pF^2 - G^2 + H \frac{\partial F}{\partial Z} - \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \right] = 0 \quad (3.9)$$

$$(p+1)FG + H \frac{\partial G}{\partial Z} - \frac{\partial^2 G}{\partial Z^2} = 0, \quad \frac{1}{2}(p+3)F + \frac{\partial H}{\partial Z} = 0$$

$$F(0) = G(0) = H(0) = 0, \quad F(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 1 \quad (3.10)$$

Тогда, по определению, $C(p) = H(\infty)$. В частности, $C(1) = h_0 = 1,369$. Вопросы существования здесь не рассматриваются, однако, по-видимому, при $p > 0$ решение задачи (3.9), (3.10) существует и единственно (см. [15]).

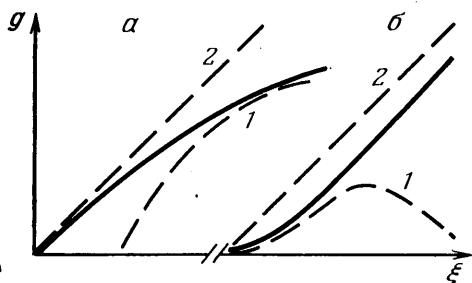
Вторая асимптотика имеет место при $\xi^{1/2(p-1)} \rightarrow \infty$, т. е. при больших временах

$$g_p \sim \left[\frac{2}{C(1)} \right]^2 \xi \quad (3.11)$$

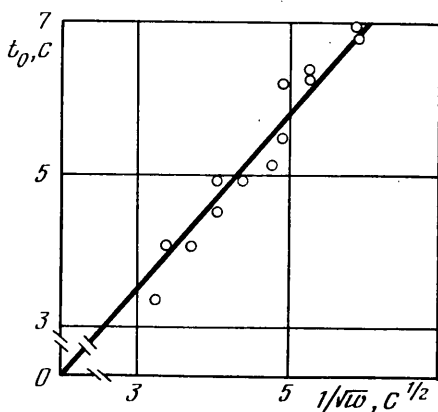
$$v \sim \frac{L^2}{h_0^2 \nu} \frac{r}{t^2}, \quad u \sim \frac{r}{t}, \quad w \sim \frac{-2z}{t}$$

Отметим, что она не зависит от параметра p , т. е. от начального условия, и совпадает по форме с решением для вырожденного случая $p=1$, рассмотренного в предыдущем параграфе. Значит, при любом начальном условии вида (3.10) в жидкости возникает и расширяется с течением времени область, где торможение происходит так, как если бы начальное состояние было состоянием твердого вращения. Эта область определяется условием $\xi^{1/2(p-1)} \gg 1$, что означает $r \gg t^{2/(1-p)}$ (большие r) при $p > 1$ и $r \ll t^{2/(1-p)}$ (малые r) при $p < 1$. На фиг. 1 схематически изображены профили скорости в зависимости от ξ при $p=1/2$ (фиг. 1, а) и при $p=2$ (фиг. 1, б). Штриховые кривые 1 соответствуют асимптотике (3.7), 2 — асимптотике (3.11), сплошные кривые описывают зависимость $g_p(\xi)$.

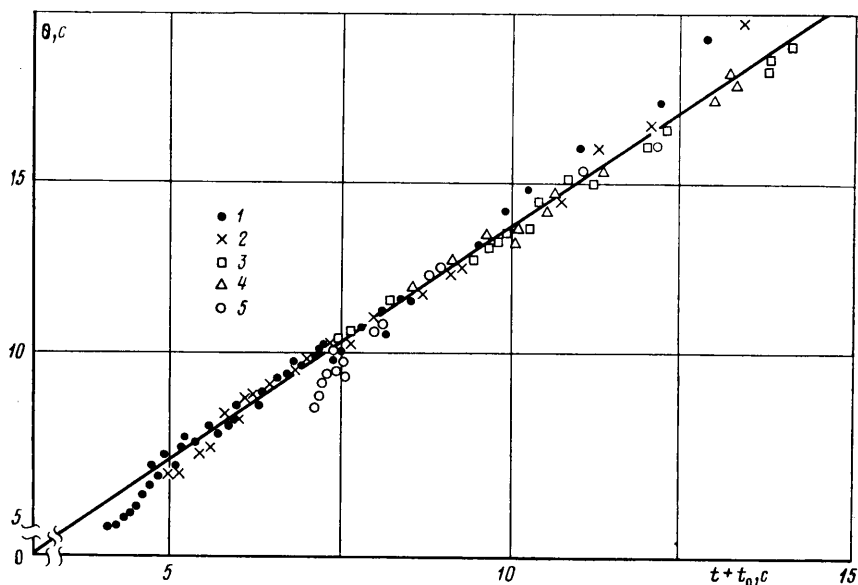
4. Для подтверждения применимости ламинарной теории торможения и проверки ее выводов было проведено экспериментальное исследование. Лабораторная установка представляла собой цилиндрический сосуд, в который помещены два плоских диска радиуса $r_0 = 10$ см. Общая ось вращения дисков перпендикулярна каждому из них и совпадает с осью симметрии цилиндра. Зазор между краями дисков и внутренней стенкой сосуда не превышал 0,5 мм, а расстояние между ними составляло $L = 1,4$ см. Установка заполнялась водой ($\nu = 0,01$ см²/с) и диски приводились во вращение с постоянной угловой скоростью, которую можно было выбирать в пределах от 1 до 10 с⁻¹. Таким образом, начальные значения числа Рейнольдса $Re_0 = \omega_0 L^2 / \nu$ лежали в диапазоне от 200 до 2000. Влияние боковой стенки в таких условиях распространяется вглубь жидкости на расстояние порядка $L \ll r_0$ [1, 16], поэтому основная ее часть вращается как целое вместе с дисками. Равенство начальной угловой скорости жидкости в точке измерения ω_0 и угловой скорости дисков Ω проверялось каждый раз независимым измерением того и другого. Установка не позволяла создавать начальные состояния вращения типа $v_\varphi(r, 0) \propto r^p$, $p \neq 1$.



Фиг. 1



Фиг. 3



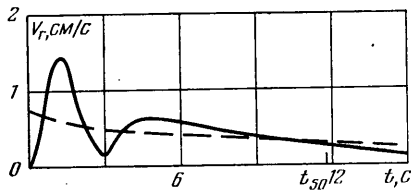
Фиг. 2

После того как жидкость приходила в состояние квазитвердого вращения, диски резко останавливались. Радиальная и азимутальная компоненты скорости измерялись лазерным доплеровским анемометром фирмы DISA (см. [17]). Разностный доплеровский сигнал, поступающий с ФЭУ, обрабатывался специализированным устройством Counter Processor 55L90a фирмы DISA. Аналоговый сигнал с выхода Counter Processor, пропорциональный мгновенной скорости жидкости в точке измерения, фиксировался самописцем.

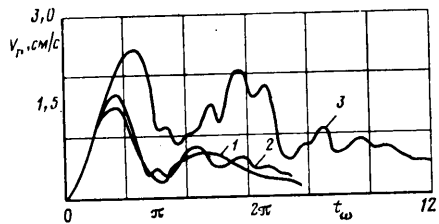
5. При обработке записей самописца данные о скорости представлялись в виде зависимости от времени величины Θ

$$\Theta(t) = \frac{L}{\sqrt{\omega_0 v}} \sqrt{\frac{v_{\varphi 0}}{v_{\varphi}(t)}} = \frac{L}{\sqrt{\omega(t) v}} \quad (5.1)$$

где $v_{\varphi}(t)$ и $\omega(t)$ — текущие значения азимутальной и угловой скоростей соответственно, а $v_{\varphi 0}$ и ω_0 — их начальные значения. Время отсчитывается от момента остановки дисков. Согласно формулам (2.9), величина Θ должна линейно зависеть от времени: $\Theta = h_0(t + t_0)$. Поэтому по экспериментальной зависимости $\Theta(t)$ методом наименьших квадратов находилось наилучшее линейное приближение, из которого определялись экспе-



Фиг. 4



Фиг. 5

риментальные значения h_0 и t_0 . Качественное согласие теории и эксперимента иллюстрирует фиг. 2, на которой изображены теоретическая (сплошная прямая) и несколько экспериментальных (точки) зависимостей Θ от «сдвинутого» времени $t+t_0$ при разных ω_0 . Точки 1–5 соответствуют значениям $Re_0=1655; 1009; 716; 570; 560$. Среднее значение коэффициента h_0 составило $1,37 \pm 0,02$, что хорошо согласуется с теоретическим значением.

На фиг. 3 показана экспериментальная зависимость t_0 от $\omega_0^{-1/2}$, которая, согласно формулам (2.9), также должна быть линейной: $t_0 = k\omega_0^{-1/2}$, $k = L/h_0\sqrt{\nu}$. Вычисленный по экспериментальным данным коэффициент пропорциональности составил $k = (11,7 \pm 1,7) \text{ с}^{1/2}$, что довольно близко к теоретическому значению $L/h_0\sqrt{\nu} = 10,2 \text{ с}^{1/2}$.

Основная трудность при измерении скоростей поперечной циркуляции связана с тем, что они на порядок меньше азимутальной скорости. Поскольку лазерный доплеровский анемометр измеряет проекцию полной скорости на некоторое фиксированное направление, то для измерения малой радиальной составляющей исследуемый объем должен быть очень точно ориентирован относительно этого направления. Фактическая ошибка по направлению составляла единицы градусов, а вклад азимутальной скорости в измеряемую проекцию был сравним с вкладом радиальной. Однако скорость, измеряемая до остановки дисков, обусловлена только азимутальной компонентой, закон убывания которой известен. Поэтому радиальную составляющую можно выделить в чистом виде

$$v_r = v_m - \frac{\omega(t)}{\omega_0} v_{m0}$$

где v_m — измеряемая скорость, v_{m0} — ее начальное значение. Полученный таким способом график экспериментальной зависимости $v_r(t)$ приведен на фиг. 4 (сплошная линия). Быстрые колебания, наблюдающиеся на этом графике, связаны с тем, что в момент торможения нарушается условие $\Omega = O(\Omega E^{-1/2})$, и реальный пограничный слой не является квазистационарным. Тем не менее теоретическая кривая (см. (2.9)), представленная на этой фигуре (штриховая линия), хорошо отражает средний ход радиальной скорости. Таким образом, переход к экмановскому времени действительно равносильен усреднению процессов, быстрых по сравнению с торможением.

Структура колебаний радиальной скорости выявляется, если перейти к «собственному времени погранслоя»

$$t_\omega = \int \omega dt = \frac{\omega_0 t}{1+t/t_0}$$

Несколько графиков экспериментальной зависимости v_r от t_ω при разных Re_0 приведено на фиг. 5 (кривые 1–3 соответствуют начальным значениям числа Рейнольдса 268; 320; 640). На них прослеживаются колебания с безразмерным периодом, близким к π , т. е. с частотой около 2ω ,

которые можно отождествить с инерционными колебаниями [8]. По мере увеличения числа Рейнольдса возникают более быстрые и менее регулярные колебания. Но, по-видимому, они не связаны с нарушением основных предположений теории о ламинарности и осесимметричности течения.

6. В работе [1] рассмотрено торможение в плоском цилиндре в пределе малых чисел Рейнольдса. Представляет интерес сопоставление результатов [1] и настоящей работы, в которой рассмотрен противоположный случай. Оценка применимости линейной теории имеет вид [1] $Re = \omega L^2 / \nu < 50$.

Нижнюю оценку предела применимости приближения пограничного слоя можно получить, считая, что оно становится неприменимым, когда два пограничных слоя, утолщаясь, начинают смыкаться и занимают все пространство между дисками. Толщина слоя составляет (см. [13]) $D \approx 3\sqrt{\nu/\omega}$. Полагая $2D < L$, получаем $Re > 40$. Такая же оценка получается другим способом из сравнения времени развития радиальной циркуляции по линейной теории $t_{max} = 0,34L^2/\pi^2\nu$ с аналогичной величиной для сильнонелинейного случая $t_{max} \approx \pi/2\omega_0$. Условной границей между областями применимости двух приближений можно считать величину $Re_0 \approx 50$, при которой эти оценки дают одно и то же время. Отсюда снова получаем $Re_0 \approx 50$. Момент времени, когда текущее значение числа Рейнольдса достигает 50, отмечен на фиг. 4 символом t_{50} . Видно, что теория совпадает с экспериментом вплоть до этого момента. Вместе с тем в работе [1] получено удовлетворительное согласие теории и эксперимента при значениях $Re \leq 50$. Таким образом, области применимости результатов [1] и настоящей работы практически смыкаются, давая полную картину торможения жидкости в неподвижном плоском цилиндре.

Авторы благодарят А. М. Обухова и Ф. В. Должанского за постановку задачи и конструктивные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Должанский Ф. В., Крымов В. А. О торможении жидкости в цилиндре малой высоты. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 1, с. 19–25.
2. Hyun J. M., Leslie F., Fowles W. W., Warn-Varnas A. Numerical solutions for spin-up from rest in a cylinder. — J. Fluid Mech., 1983, v. 127, p. 263–281.
3. Kitchens C. W., Jr. Navier-Stokes solutions for spin-up in a filled cylinder. — AIAA Journal, 1980, v. 18, № 8, p. 929–934.
4. Benton E. R. Vorticity dynamics in spin-up from rest. — Phys. Fluids, 1979, v. 22, № 7, p. 1250–1251.
5. Weidman P. D. On the spin-up and spin-down of a rotating fluid. — J. Fluid Mech., 1976, v. 77, Pt 4, p. 685–708.
6. St-Maurice J.-P., Veronis G. A multi-scaling analysis of the spin-up problem. — J. Fluid Mech., 1975, v. 68, Pt 3, p. 417–445.
7. Benton E. R., Clark A., Jr. Spin-up. — Ann. Rev. Fluid Mech., 1974, v. 6, p. 257–280.
8. Greenspan H. P., Howard L. N. On a time-dependent motion of a rotating fluid. — J. Fluid Mech., 1963, v. 17, pt 3, p. 385–404.
9. Greenspan H. P., Weinbaum S. On non-linear spin-up of a rotating fluid. — J. Math. and Phys., 1965, v. 44, № 1, p. 66–85.
10. Benton E. R. Nonlinear hydrodynamic and hydromagnetic spin-up driven by Ekman — Hartmann boundary layers. — J. Fluid Mech., 1973, v. 57, Pt 2, p. 337–360.
11. Wedemeyer E. H. The unsteady flow within a spinning cylinder. — J. Fluid Mech., 1964, v. 20, Pt 3, p. 383–399.
12. Kármán Th., von. Über laminare und turbulente Reibung. — Z. angew. Math. und Mech., 1921, B. 1, H. 4, S. 233–252.
13. Rogers M. N., Lance G. N. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk. — J. Fluid Mech., 1960, v. 7, Pt 4, p. 617–631.
14. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с.
15. Belcher R. J., Burggraf O. R., Stewartson K. On generalized-vortex boundary layers. — J. Fluid Mech., 1972, v. 52, Pt 4, p. 753–780.
16. Szeri A. Z., Schneider S. J., Labbe F., Kaufman H. N. Flow between rotating disks. Pt 1. Basic flow. — J. Fluid Mech., 1983, v. 134, p. 103–131.
17. Дубнищев Ю. Н., Ринкевичус Б. С. Методы лазерной доплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982. 303 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.II.1985