МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1986

УДК 532.5+536

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

ЯВОРСКИЙ Н. И.

Известно большое число [1] вариационных принципов в механике сплошной среды, но лишь немногие из них могут быть применены для сплошных сред с диссипацией энергии и теплопроводностью. Классическим примером является принцип минимума диссипации энергии Гельмгольца для ползущего движения. Хорошо известно [1], что не существует голономного вариационного принципа, из которого следуют уравнения Навье – Стокса. Тем не менее был разработан метод локальных потенциалов [2], представляющий некоторый вариационный подход для получения этих уравнений. К недостаткам этого метода следует отнести зависимость функционала от варьируемых величин, удовлетворяющих уравнению Навье – Стокса, которые в сущности и нужно получить, минимизируя функционал. Поэтому метод локальных потенциалов приводит к необходимости применения некоторой сходящейся итеративной процедуры, минимизирующей функционал.

Ниже рассматривается альтернативный подход. Вариационный принцип голономен, поэтому его экстремали не являются решениями уравнений Навье – Стокса. Однако удается построить искомые решения, наложив на полученные экстремали связи простейшего вида. Такой подход требует расширения пространства, на котором определены варьируемые переменные.

1. В случае несжимаемой жидкости уравнения движения, как правило, автономны, так что уравнение энергии является уравнением распространения тепла как пассивной примеси. В этом случае можно сформулировать вариационный принцип для двух функционалов таким образом, что из экстремали первого функционала будут получаться уравнения движения, а из экстремали второго функционала – уравнение энергии или теплопроводности.

Пусть V и ∂V – не фиксированные объем и граница области течения жидкости. Область определения варьируемых величин, описывающих движение жидкости, задается в виде $\Omega=(V\times\Delta t)\times(V\times\Delta t)$, где $\Delta t=t_{00}-t_0$ – рассматриваемый, может быть, бесконечный промежуток времени. Кинематическая вязкость ν и время релаксации τ постоянны, и, кроме того

$$u_i=u_i(\mathbf{r}_1, t_1|\mathbf{r}_2, t_2), \qquad p=p(\mathbf{r}_1, t_1|\mathbf{r}_2, t_2)$$
$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\in V, \qquad t_1, t_2\in[t_{00}, t_0] \tag{1.1}$$

Функционал для уравнений движения представляется в виде

$$S_u=\int\limits_\Omega\left\{\frac{\nu}{2}\left(e^\Phi\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}}+e^{-\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}\right)^2-\frac{\tau}{2}\left(e^\Phi\frac{\partial u_i}{\partial t_1}+e^{-\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial t_2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}}+\frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial u_j}{\partial x_{2i}}\right)-\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial u_i}{\partial x_{2i}}\right)-(f_{i1}+f_{i2})\frac{u_i}{2}\right\}d\Omega \tag{1.2}$$

$$\Phi=\frac{1}{2}\left[\frac{t_1-t_2}{\tau}-\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{\nu}\right]$$

$$\mathbf{f}_{1,2}=\mathbf{f}(\mathbf{r}_{1,2}, t_{1,2})$$

где ρ — плотность, Φ — вязкорелаксационная фаза, а $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ — заданное поле внешних объемных сил.

В точке экстремума S_u, считая варьируемые величины u_i, p независимыми, имеем

$$\frac{\delta S_u}{\delta u_i}=\tau\left(e^{2\Phi}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t_1^2}+2\frac{\partial^2 u_i}{\partial t_1\,\partial t_2}+e^{-2\Phi}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t_2^2}\right)+e^{2\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial t_1}+e^{-2\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial t_2}+$$
$$+u_j\left(e^{2\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}}+e^{-2\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}\right)-e^{2\Phi}\frac{\partial}{\partial x_{1j}}\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}}-e^{-2\Phi}\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}- \tag{1.3}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_{1j}}\nu\frac{\partial u_j}{\partial x_{1i}}-\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\nu\frac{\partial u_j}{\partial x_{2i}}-\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}}+\frac{\partial u_j}{\partial x_{1i}}\right)-\frac{\partial}{\partial x_{1j}}\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}+\frac{\partial u_j}{\partial x_{2i}}\right)+$$
$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial p}{\partial x_{2i}}\right)+\frac{1}{2}(f_{i1}+f_{i2})+R_i=0$$

$$\frac{\delta S_u}{\delta p}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial u_i}{\partial x_{2i}}\right)=0 \tag{1.4}$$

Невыписанные в (1.3) явно члены $\mathbf{R}$ таковы, что $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}, t)\equiv 0$. При выводе (1.3), (1.4) предполагалось, что на гиперповерхности $\partial\Omega$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered} G_i\delta u_i|_{t_1=t_\infty,\,t_0}=0, \qquad L_i\delta u_i|_{\mathbf{r}_1\in\partial V}=0\\ G_i\delta u_i|_{t_2=t_\infty,\,t_0}=0, \qquad L_i\delta u_i|_{\mathbf{r}_2\in\partial V}=0\\ (\mathbf{u}\mathbf{n}_1)\delta p|_{r_1\in\partial V}=0, \quad (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_2)\delta p|_{r_2\in\partial V}=0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

Явный вид G_i, L_i можно получить, рассмотрев вариацию δS_u после интегрирования по частям и приравняв интеграл по гиперповерхности $\partial\Omega$ нулю; $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ — внешние нормали к соответствующим границам.

Наложив в (1.3), (1.4) связи

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}, \qquad t_1=t_2=t \tag{1.6}$$

получим уравнения Навье — Стокса с релаксацией и уравнение неразрывности в виде

$$\tau\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}+\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.7}$$
$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\equiv\mathbf{u}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}, t)$ и $P(\mathbf{r}, t)\equiv p(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}, t)$ имеют смысл скорости и давления.

Функционал для уравнения теплопроводности имеет вид

$$S_T=\int\left\{\frac{a}{2}\left(e^{\Lambda}\frac{\partial\theta}{\partial x_{1i}}+e^{-\Lambda}\frac{\partial\theta}{\partial x_{2i}}\right)^2-\frac{\tau_T}{2}\left(e^{\Lambda}\frac{\partial\theta}{\partial t_1}+e^{-\Lambda}\frac{\partial\theta}{\partial t_2}\right)^2-(q_1+q_2)\frac{\theta}{2}\right\}d\Omega$$
$$\Lambda=\frac{1}{2}\left[\frac{t_1-t_2}{\tau_T}-\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{a}\right] \tag{1.8}$$
$$\theta=\theta(\mathbf{r}_1, t_1|\mathbf{r}_2, t_2), \qquad q_{1,2}=q(\mathbf{r}_{1,2}, t_{1,2})$$
$$a,\ \tau_T=\mathrm{const}$$

Здесь a — температуропроводность, τ_T — время тепловой релаксации, $q(\mathbf{r}, t)$ — заданный объемный источник тепла, Λ — релаксационно-температуропроводная фаза.

Экстремаль функционала S_T удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta S_T}{\delta\theta}=\tau_T\left(e^{2\Lambda}\frac{\partial^2\theta}{\partial t_1^2}+2\frac{\partial^2\theta}{\partial t_1\,\partial t_2}+e^{-2\Lambda}\frac{\partial^2\theta}{\partial t_2^2}\right)+e^{2\Lambda}\frac{\partial\theta}{\partial t_1}+e^{-2\Lambda}\frac{\partial\theta}{\partial t_2}+$$
$$+u_j\left(e^{2\Lambda}\frac{\partial\theta}{\partial x_{1j}}+e^{-2\Lambda}\frac{\partial\theta}{\partial x_{2j}}\right)-e^{2\Lambda}\frac{\partial}{\partial x_{1j}}a\frac{\partial\theta}{\partial x_{1j}}-e^{-2\Lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2j}}a\frac{\partial\theta}{\partial x_{2j}}- \tag{1.9}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_{1j}}a\frac{\partial\theta}{\partial x_{2j}}-\frac{\partial}{\partial x_{2j}}a\frac{\partial\theta}{\partial x_{1j}}-\frac{1}{2}(q_1+q_2)+Q=0$$

Невыписанные в (1.9) явно члены Q таковы, что $Q(\mathbf{r},\ t|\mathbf{r},\ t)\equiv0$. При выводе (1.9) аналогично выводу (1.3), (1.4) предполагалось, что на $\partial\Omega$ выполняются соотношения

$$G\delta\theta|_{t_1=t_{00},\ t_0}=0,\qquad L\delta\theta|_{\mathbf{r}_1\in\partial V}=0$$
$$G\delta\theta|_{t_2=t_{00},\ t_0}=0,\qquad L\delta\theta|_{\mathbf{r}_2\in\partial V}=0 \tag{1.10}$$

где вид G, L можно получить аналогично тому, как это сделано для G_i, L_i.

Если в (1.9) наложить связи (1.6), то получится уравнение теплопроводности с релаксацией

$$\tau_T\frac{\partial^2T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}+U_j\frac{\partial T}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}a\frac{\partial T}{\partial x_j}+q \tag{1.11}$$

где $T(\mathbf{r},\ t)\equiv\theta(\mathbf{r},\ t|\mathbf{r},\ t)$ — температура жидкости.

Соотношения (1.5), (1.10) после наложения связей (1.6) принимают вид

$$\mathbf{L}\delta\mathbf{U}|_{\partial V}=0,\qquad L_i=\left[\nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)-\frac{P}{\rho}\delta_{ij}\right]n_j \tag{1.12}$$

$$(\mathbf{Un})\delta P|_{\partial V}=0$$
$$\tau\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\delta\mathbf{U}|_{t=t_{00},t_0}=0 \tag{1.13}$$

$$L\delta T|_{\partial V}=0,\qquad L=a\frac{\partial T}{\partial n} \tag{1.14}$$
$$\tau_T\frac{\partial T}{\partial t}\delta T|_{t=t_{00},t_0}=0$$

Условия на вариации величин (1.12), (1.13), (1.14) можно интерпретировать как задание некоторых краевых условий для уравнений (1.7) и (1.11). Легко видеть, что если на границе области течения заданы вектор скорости ($\delta U_i=0$) и условие непроницаемости границы ($\mathbf{Un}=0$), то (1.12) выполняется. Этот случай соответствует типичной постановке граничных условий в гидродинамике для заданных непроницаемых границ. Если же вариации δU_i на ∂V произвольные, то из (1.12) получается $L_i=0$, что при условии задания на границе давления ($\delta P=0$) соответствует заданию граничных условий на свободной поверхности. Таким образом, (1.12) содержит в себе в качестве подмножества обычные гидродинамические граничные условия.

Далее, условие (1.13) для уравнений Навье — Стокса без релаксации ($\tau=0$) представляет собой лишь естественное условие ограниченности варьируемых полей. Для класса задач, в которых релаксация существенна, из (1.13) следует необходимость задания начальных условий ($\delta U_i=0$ в начальный момент времени t_{00}) и выполнения некоторого условия в конечный момент времени t_0, которое для достаточно широкого класса задач со стационарными граничными условиями при $t_0\to\infty$ приобретает вид естественного для релаксационной задачи условия стационарности

($\partial U/\partial t \to 0$ при $t\to\infty$). В общем случае условие (1.13) допускает и другие физические постановки краевых задач, например постановку задачи об эволюции некоторого распределения скоростей за определенный промежуток времени в любое, наперед заданное.

Второе условие в (1.14) во многом подобно уже рассмотренному условию для поля скорости (1.13), поэтому все изложенное выше для условия (1.13) для него также справедливо. В частности, при $\tau_T\to 0$, т. е. для обыкновенного уравнения теплопроводности без релаксации, (1.14) есть условие ограниченности полей температуры. Первое условие в (1.14) для заданной границы приводит к постановке краевой задачи Дирихле ($\delta T=0$ на граничной поверхности ∂V), а в случае свободной поверхности, когда на границе δT произвольна, — к естественному условию ее адиабатичности: $a\partial T/\partial n=0$. Отметим, что условия на вариации (1.12)—(1.14) являются достаточно сильными и их, вообще говоря, можно заменить более слабыми интегральными условиями.

Рассмотрим предельные случаи $\nu\to\infty$, $a\to\infty$ для стационарных распределений варьируемых величин без внешних сил и источников тепла. Полагая $\tau\to\infty$ и $\tau_T\to\infty$, найдем

$$S_u \to \int\left\{\frac{\nu}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}}+\frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}+\frac{\partial u_j}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial u_j}{\partial x_{2i}}\right)^2-\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial u_i}{\partial x_{2i}}\right)\right\}d\Omega \tag{1.15}$$

$$S_T \to \int\frac{a}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial\theta}{\partial x_{2i}}\right)^2 d\Omega \tag{1.16}$$

Функционал (1.15) — аналог функционала Гельмгольца для ползущего движения, где p/ρ соответствует множителю Лагранжа, если полевые величины заданы в пространстве Ω. Если связи (1.6) учесть в (1.15) в виде множителя $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(t_1-t_2)$, то приходим к принципу минимума диссипации энергии и формулировке Гельмгольца.

Функционал (1.16) является аналогом интеграла Дирихле, если величина θ определена на Ω. Вводя связи (1.6) в (1.16) в виде указанного выше множителя, приходим к классическому интегралу Дирихле для уравнения Лапласа.

Вернемся к функционалу (1.2). Здесь p/ρ также играет роль множителя Лагранжа, а третий член дивергентен, поэтому содержание вариационного принципа почти полностью содержится в первых двух членах, которые можно представить в виде квадрата «градиента» скорости u_i. Действительно, вводя четырехмерный вектор ξ_α, определим «градиент» как

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0},\frac{\partial}{\partial\xi_1},\frac{\partial}{\partial\xi_2},\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_0}=\left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{1/2}\left(e^{\Phi}\frac{\partial}{\partial t_1}+e^{-\Phi}\frac{\partial}{\partial t_2}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\xi_j}=e^{\Phi}\frac{\partial}{\partial x_{1j}}+e^{-\Phi}\frac{\partial}{\partial x_{2j}},\quad j=1,2,3$$

и метрический тензор $g_{\alpha\beta}$

$$g_{00}=-1,\quad g_{ij}=\delta_{ij},\quad g_{0j}=0,\quad \alpha,\beta=0,1,2,3$$

Тогда первые два члена в (1.2) можно записать в виде

$$D=\frac{\nu}{2}g_{\alpha\beta}\frac{\partial u_i}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial\xi_\beta} \tag{1.17}$$

Выражение (1.17) при $\nu\to\infty$ и $\tau\to\infty$ переходит с точностью до дивергентных членов в «плотность диссипации энергии» для функционала (1.15). Таким образом, вариационный принцип, из которого следуют уравнения Навье — Стокса с релаксацией, можно было бы назвать принципом минимума квадрата «градиента» скорости.

Совершенно аналогично изложенному первые два члена в функционале S_T (1.8) можно представить в виде «градиента» температуры θ и сформулировать принцип минимума квадрата «градиента» температуры для уравнения теплопроводности с релаксацией.

Характерной особенностью изложенных выше принципов является то, что из них получаются не только уравнения движения, но и граничные условия к ним.

2. В случае сжимаемой жидкости уравнения движения не являются автономными, а система уравнений движения и уравнения энергии — замкнутой. Замыкающими эту систему уравнениями являются уравнения состояния локального термодинамического равновесия и зависимости коэффициентов переноса от термодинамических параметров

$$\begin{gathered}\rho=\rho(P, T), \quad c_v=c_v(P, T)\\ \mu=\mu(P, T), \quad \lambda=\lambda(P, T)\\ \tau=\tau(P, T), \quad \tau_T=\tau_T(P, T), \quad \zeta=\zeta(P, T)\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, μ — динамическая вязкость, λ — теплопроводность, τ — время скоростной релаксации, τ_T — время тепловой релаксации, ζ — объемная вязкость.

Уравнение состояния получается методами равновесной статистической механики, а коэффициенты переноса могут быть получены лишь в рамках кинетической теории жидкости. Поэтому единый вариационный принцип должен объединять равновесную и неравновесную термодинамику и физическую кинетику. Такая физическая теория должна существенно опираться на теорию молекулярного строения вещества и не может быть получена феноменологическими средствами. Тем не менее можно получить вариационный принцип, из которого следуют уравнения движения и энергии, тогда как замыкающие уравнения (2.1) постулируются. В силу такого подхода величины ρ, c_v, μ, λ, τ, τ_T, ζ следует считать заданными, а их вариации — нулевыми. В таком случае вариационный принцип, так же как и в п. 1, представляется в виде двух функционалов S_u и S_T, а постулируемые связи (2.1) налагаются на уже полученные уравнения. Функционалы S_u, S_T имеют вид

$$\begin{aligned}S_u = \int\limits_\Omega \Big[&\frac{\mu}{2}\left(e^{\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}} + e^{-\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}\right)^2 - \frac{\rho\tau}{2}\left(e^{\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial t_1} + e^{-\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial t_2}\right)^2 + \\ &+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}} + \frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_{1i}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{2i}}\right) + \frac{\zeta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1i}} + \frac{\partial u_i}{\partial x_{2i}}\right)^2 - (f_{i1}+f_{i2})\frac{\rho u_i}{2} - \\ &-\frac{p}{\rho}\left(e^{\chi}\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + e^{-\chi}\frac{\partial \rho}{\partial t_2} + e^{\chi}\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_{1j}} + e^{-\chi}\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_{2j}}\right)\Big] d\Omega\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}S_T = \int\limits_\Omega \Big[&\frac{\lambda}{2}\left(e^{\Delta}\frac{\partial \theta}{\partial x_{1i}} + e^{-\Delta}\frac{\partial \theta}{\partial x_{2i}}\right)^2 - \\ &-\frac{\rho c_v \tau_T}{2}\left(e^{\Delta}\frac{\partial \theta}{\partial t_1} + e^{-\Delta}\frac{\partial \theta}{\partial t_2}\right)^2 - (q_1+q_2)\frac{\theta}{2}\Big] d\Omega\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\chi = \frac{1}{2\rho}\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_{1i}} + \frac{\partial \rho}{\partial x_{2i}}\right)(x_{1i}-x_{2i}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial t_2}\right)(t_1-t_2)\right]$$

Уравнения движения получаются из уравнений для экстремалей

$$\frac{\delta S_u}{\delta u_i} = 0, \quad \frac{\delta S_u}{\delta p} = 0, \quad \frac{\delta S_T}{\delta \theta} = 0 \tag{2.4}$$

Налагая связи (1.6) на уравнения (2.4), приходим к системе уравнений баланса импульса, массы и энергии для вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости с релаксацией

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\tau\frac{\partial U_i}{\partial t}+\rho\frac{\partial U_i}{\partial t}+\rho U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)+\zeta\frac{\partial U_l}{\partial x_l}\delta_{ij}\right] \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho U_j=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho c_v\tau_T\frac{\partial T}{\partial t}+\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+U_j\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}+q$$

Здесь $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ — произвольные заданные объемные внешние силы на единицу массы, $q(\mathbf{r}, t)$ — известный объемный источник тепла, включающий вязкий нагрев за счет диссипации кинетической энергии жидкости. Замыканием системы (2.5) является постулированная система (2.1).

Как и в п. 1, из этого же вариационного принципа можно вывести граничные условия для уравнений (2.5). Эти условия для заданной границы принимают вид

$$\begin{gathered}\mathbf{U}|_{\partial V}=\mathbf{U}_s(\mathbf{s}),\qquad T|_{\partial V}=T_s(\mathbf{s}),\qquad \mathbf{s}\in\partial V\\ \mathbf{U}|_{t_\infty}=\mathbf{U}_0(\mathbf{r}),\qquad T|_{t_\infty}=T_0(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in V\\ \mathbf{U}_s\mathbf{n}|_{\partial V}=0\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $\mathbf{U}_s$, $\mathbf{U}_0$, T_s, T_0 — заданные функции. Условия (2.6) должны быть дополнены условиями ограниченности или стационарности для конечного момента времени t_0.

Для свободной поверхности получаются граничные условия

$$\begin{gathered}\left[\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)+\zeta\frac{\partial U_l}{\partial x_l}\delta_{ij}-P\delta_{ij}\right]n_j|_{\partial V}=0\\ \lambda\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\partial V}=0,\qquad P|_{\partial V}=P_s(\mathbf{s})\end{gathered} \tag{2.7}$$

Условия (2.6), (2.7) совпадают с классическими граничными условиями, применяемыми в гидрогазодинамике.

3. Рассмотрим случай вязкой теплопроводной жидкости, являющейся проводником электрического тока. Предполагается, что выполнены условия, при которых справедлив подход магнитной гидродинамики [3]. Жидкость считается несжимаемой. В этом случае тепловой функционал S_T (1.8) не претерпевает значительных изменений. Единственное изменение его заключается в том, что в объемный источник тепла считается включенным джоулево тепло. Построение функционала S_u, из которого следуют уравнения движения жидкости и магнитного поля производится аналогично пунктам 1,2 с формированием квадратов «градиентов» или их аналогов. В случае магнитной гидродинамики функционал S_u принимает вид

$$S_u=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\nu}{2}\left(e^{\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}}+e^{-\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}\right)^2-\frac{\tau}{2}\left(e^{\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial t_1}+e^{-\Phi}\frac{\partial u_i}{\partial t_2}\right)^2+\right.$$

$$+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}}+\frac{\partial u_i}{\partial x_{2j}}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial u_j}{\partial x_{2i}}\right)- \tag{3.1}$$

$$-\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial u_i}{\partial x_{2i}}\right)-\frac{u_i}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_{1j}}+\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\right)\left(h_ih_j-\frac{h^2}{2}\delta_{ij}\right)-$$

$$- \frac{\nu_m}{8\pi\rho}\left(e^{\Gamma} \frac{\partial h_i}{\partial x_{1j}} + e^{-\Gamma} \frac{\partial h_i}{\partial x_{2j}} - e^{\Gamma} \frac{\partial h_j}{\partial x_{1i}} - e^{-\Gamma} \frac{\partial h_j}{\partial x_{2i}} \right)^2 +$$

$$+ \frac{\tau_m}{8\pi\rho}\left(e^{\Gamma} \frac{\partial h_i}{\partial t_1} + e^{-\Gamma} \frac{\partial h_i}{\partial t_2} \right)^2 - \varkappa \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_{1i}} + \frac{\partial h_i}{\partial x_{2i}} \right) \Bigg] d\Omega$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left[\frac{t_1 - t_2}{\tau_m} - \frac{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{\nu_m} \right]$$

$$h_i = h_i(\mathbf{r}_1, t_1 | \mathbf{r}_2, t_2), \qquad \varkappa = \varkappa(\mathbf{r}_1, t_1 | \mathbf{r}_2, t_2)$$

$$\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

Здесь τ_m – время магнитной релаксации, ν_m – коэффициент диффузии магнитного поля, c – скорость света, σ – электропроводность, $\varkappa$ – имеет смысл множителя Лагранжа, Γ – магнитно-релаксационная фаза. Все коэффициенты переноса и времена релаксации постоянны. Независимыми варьируемыми величинами в (3.1) являются u_i, p, h_i, $\varkappa$. Наложив связи (1.6) в дифференциальных уравнениях экстремалей

$$\frac{\delta S_u}{\delta u_i} = 0, \qquad \frac{\delta S_u}{\delta p} = 0, \qquad \frac{\delta S_u}{\delta h_i} = 0, \qquad \frac{\delta S_u}{\delta \varkappa} = 0 \tag{3.2}$$

приходим к системе уравнений релаксационной магнитной гидродинамики

$$\tau \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(P + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + \nu\Delta\mathbf{U} \tag{3.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0$$

$$\tau_m \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{U} + \nu_m\Delta\mathbf{H} - \nabla(\mathbf{UH} - \mathrm{K})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{h}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}, t)$ – напряженность магнитного поля, а величина $\mathrm{K}(\mathbf{r}, t) \equiv \varkappa(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}, t)$ такова, что

$$\Delta(\mathrm{K} - \mathbf{UH}) = 0 \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) получается из третьего уравнения (3.3), если к нему применить оператор дивергенции. Аналогично предыдущему можно получить и граничные условия, которые будут состоять в задании $\mathbf{U}$ и $\mathbf{H}$ на границе области течения, если граница считается заданной. Если же граничная поверхность свободная, то соответствующие граничные условия имеют вид

$$\left[\nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{P}{\rho}\delta_{ij} + \frac{1}{4\pi\rho}\left(H_i H_j - \frac{H^2}{2}\delta_{ij} \right) \right] n_j |_{\partial V} = 0 \tag{3.5}$$

$$[(\mathbf{Un})\mathbf{H} - (\mathbf{Hn})\mathbf{U} - \mathbf{n}(\mathrm{K} - \mathbf{UH}) + \nu_m \mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}]|_{\partial V} = 0 \tag{3.6}$$

Умножая (3.6) скалярно на $\mathbf{n}$ находим, что на свободной поверхности ∂V

$$(\mathrm{K} - \mathbf{UH})|_{\partial V} = 0 \tag{3.7}$$

Если граница ∂V замкнута, то из уравнения (3.4) с граничными условиями (3.7) получаем, что всюду в области течения

$$\mathrm{K} \equiv \mathbf{UH} \tag{3.8}$$

Таким образом, если ограничивающая движущуюся жидкость поверхность является свободной для напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, то K определяется однозначно. В общем случае (3.8) может и не иметь места, однако для реальных течений это соотношение можно считать выполняющимся, поскольку жестко задать напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ на границе движущейся проводящей жидкости ∂V не представляется возможным. Кроме того, массой электронного газа обычно пренебрегают и, следовательно, время магнитной релаксации $\tau_m = 0$. Переходя к безрелаксационным уравнениям, из (3.3) с учетом (3.8) приходим к стандартным уравнениям магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости [3].

Изложенные в пунктах 1—3 вариационные принципы имеют довольно обширную область применения и позволяют получить уравнения гидрогазодинамики в весьма общем виде, включая граничные условия. Это позволяет надеяться, что знание новых экстремальных свойств известных уравнений гидродинамики может оказаться плодотворным как для построения новых моделей механики сплошной среды, так и для развития статистической теории турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
2. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию 11.III.1985