УДК 533.6.011.8

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

ИВЧЕНКО И. Н.

Предложен новый метод, названный методом «сглаженной функции распределения», который позволяет существенно упростить процедуру вычисления моментов от интеграла столкновений и получить решение системы моментных уравнений Максвелла — Больцмана. Используемая в интеграле столкновений в форме Больцмана аппроксимирующая функция распределения обеспечивает предельный переход к континуальным выражениям для потоков молекулярных признаков. На примере решения классической задачи о теплопередаче между двумя параллельными пластинами при произвольных числах Кнудсена проведено сравнение теоретических результатов с результатами других анализов, а также с экспериментом.

Исследования процессов переноса молекулярных признаков от среды к частицам, взвешенным в ней, имеют большое значение во многих прикладных физических задачах. На практике, как правило, эти процессы протекают в условиях, когда происходит непрерывное изменение радиуса частиц от значений, значительно меньших длины свободного пробега газовых молекул, до значений, значительно превышающих ее, или наоборот. При рассмотрении таких процессов особую актуальность имеет теория переноса, справедливая при всех числах Кнудсена ($K=\lambda/R$, где λ — длина свободного пробега молекул газа, R — радиус частицы).

Между тем сегодня значительный теоретический прогресс достигнут только в изучении предельных режимов переноса, а именно свободномолекулярного и континуального режимов. Предельные теории имеют ограниченную (по числу Кнудсена) применимость. Кроме того, трудно установить пределы применимости предельных теорий в конкретных задачах, так как диапазон чисел Кнудсена, в котором имеется удовлетворительное описание предельными формулами, оказывается различным в разных задачах переноса.

Отсутствие строгого анализа в промежуточной области чисел Кнудсена обусловило широкое использование различных эмпирических методов, анализ которых при конденсационных процессах на каплях приведен в работах [1, 2]. Широкое распространение получил так называемый метод «сшивания», представляющий просто математическое сопряжение решений для свободномолекулярного и континуального режимов. Несмотря на нестрогость метода, результаты, полученные этим методом, широко используются в прикладных исследованиях. Так, в физике облаков до сих пор используются либо формулы для потоков тепла и массы, справедливые в диффузионном режиме, либо формулы, полученные в работах [3, 4] методом «сшивания». Анализ использования различных эмпирических выражений для потоков массы и энергии при конденсационных процессах роста (испарения) сферических частиц приведен в обзорах [5, 6].

1. Моментный метод. Строгая теория переноса при всех числах Кнудсена может быть основана только на решении граничных задач для уравнений Больцмана. Однако точные аналитические результаты решения уравнения Больцмана получены лишь в линеаризованном случае с использованием модельной формы оператора столкновений.

Основной метод построения теории переноса при произвольных числах Кнудсена заключается в использовании моментных уравнений, полученных из уравнений Больцмана. Идея моментных методов заключается в преобразовании граничных задач из «микроскопической» формы в форму уравнений континуума, в которых основными переменными, определяющими состояние системы, являются некоторые моменты от функций распределения. Общей чертой всех моментных методов является и то, что замыкание системы моментных уравнений осуществляется за счет специального выбора функций распределения, содержащих некоторое число неизвестных параметров, зависящих от координат и времени, причем число неизвестных параметров равно числу моментных уравнений.

Функции распределения в граничных задачах при всех числах Кнудсена должны отражать характерные черты как свободномолекулярных, так и континуальных распределений. Для получения правильных результатов в свободномолекулярной области необходимо выбирать такую форму функций распределения, которая будет отражать разрывность на поверхности конуса влияния в пространстве скоростей.

В настоящее время наиболее широко при решении граничных задач переноса используются функции распределения, предложенные Лизом [7]. В моментном методе Лиза применяются разрывные в пространстве скоростей двухсторонние максвелловские функции распределения, содержащие различные характеристические плотности, скорости и температуры. Эти функции распределения в случае простого газа вне (область *1* в пространстве скоростей) и внутри (область *2*) конуса влияния имеют вид

$$f=\begin{cases} n_1(\mathbf{r},t)\left(\dfrac{m}{2\pi kT_1(\mathbf{r},t)}\right)^{3/2}\exp\left[-\dfrac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u}_1(\mathbf{r},t))^2}{2kT_1(r,t)}\right] \\ n_2(\mathbf{r},t)\left(\dfrac{m}{2\pi kT_2(\mathbf{r}\ t)}\right)^{3/2}\exp\left[-\dfrac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u}_2(\mathbf{r},t))^2}{2kT_2(\mathbf{r},t)}\right] \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь m, $\mathbf{v}$ – масса и скорость молекулы.

Такой выбор функций распределения позволяет выразить все моменты от функции распределения через характеристические плотности n_i, температуры T_i и средние скорости $\mathbf{u}_i$, что позволяет осуществить замыкание системы моментных уравнений. Кроме того, этот выбор дает возможность преобразовать микроскопические граничные условия в условия для неизвестных функций, входящих в (1.1). Отметим, что использование двухсторонних максвелловских распределений ограничивает число моментных уравнений, а следовательно, и точность анализа. Увеличение числа моментных уравнений может быть достигнуто путем использования так называемых модифицированных двусторонних функций распределения, которые представляют произведения максвелловских распределений на некоторые трехмерные полиномы от компонент скорости молекул с коэффициентами, зависящими от пространственных координат и времени [8].

2. Метод «сглаженной» функции распределения. Основная трудность решения граничных задач моментным методом заключается в вычислении моментов от операторов столкновений в форме Больцмана с использованием разрывных распределений (1.1). Аналитические результаты для этих задач могут быть получены только в случае плоской геометрии и для молекул, взаимодействующих как жесткие упругие сферы [9]. В произвольном случае вычисление многократных интегралов не может быть выполнено аналитически. Численный анализ чрезвычайно трудоемок [10]. В большинстве работ по исследованию проблем переноса указанная трудность преодолена либо использованием модельных форм операторов столкновений, либо использованием максвелловской модели для потенциала межмолекулярных столкновений. Оба этих подхода не дают строгих количественных результатов.

Математический анализ существенно упрощается использованием нового метода, названного методом «сглаженной» функции распределения. Этот метод заключается в том, что в интеграле столкновений вместо разрывной функции распределения используется ее представление в виде ряда по полиномам Сонина в пространстве скоростей. Представим функцию распределения в виде следующего ряда:

$$f=f^{(0)}\left[1+\sum_{i,j,k}A_{ijk}(\mathbf{r},t)S^{(i)}(v_x)S^{(j)}(v_y)S^{(k)}(v_z)\right] \tag{2.1}$$

$$f^{(0)}=n(\mathbf{r},\ t)\,(m/2\pi kT(\mathbf{r},\ t))^{3/2}\exp\left(-m(\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t))^2/2kT(\mathbf{r},\ t)\right)$$

При решении граничных задач вместо полного разложения (2.1) будем использовать конечную сумму, содержащую несколько первых членов ряда. Аппроксимирующая функция распределения, используемая только в интегралах столкновений, должна иметь столько членов разложения (2.1), чтобы в ней содержались основные моменты, определяющие состояние системы. Поскольку вместо ряда используется лишь его частичная сумма, то коэффициенты при полиномах Сонина определим из условия, при котором основные моменты от истинной функции распределения совпадали с соответствующими моментами от аппроксимирующей функции. Такая аппроксимация функции распределения позволяет выразить моменты от интеграла столкновений в форме Больцмана через стандартные скобочные интегралы. Использование этого метода позволило решить ряд граничных задач переноса для процессов испарения (роста) сферических капель [11–13].

Метод «сглаженной» функции распределения позволяет существенно упростить процедуру вычисления моментов от интеграла столкновений, а также при определенных аппроксимациях для функции распределения обеспечивает точный переход к континуальным выражениям для потоков молекулярных признаков.

Описанный подход для исследования проблем переноса, основанный на моментном методе Лиза, широко используется в настоящее время для решения практических задач. Такое же положение, по-видимому, сохранится и в ближайшем будущем. Метод «сглаженной» функции распределения позволяет в рамках общепринятого анализа не только существенно упростить математические вычисления, но и получить точные предельные выражения для потоков как в свободномолекулярном, так и в континуальном режимах.

Некоторые выводы о точности метода могут быть сделаны путем сравнения результатов, полученных данным методом, с результатами решения ряда простейших задач, полученных использованием достаточно точных методов, обычно применяемых в этих простых условиях. Сравнение с данными «эталонных» решений [14] проведем на примере задачи о теплопередаче между двумя бесконечными пластинами.

3. Сравнение исследований теплопереноса между плоскими пластинами. Применим метод «сглаженной» функции распределения для решения задачи о теплопереносе между двумя плоскими параллельными пластинами, расстояние между которыми l. Нижняя пластина имеет температуру $T_0-\Delta T$, верхняя $T_0+\Delta T$. Предполагаем выполненным условие $\Delta T \ll T_0$, что позволяет линеаризовать задачу. Введем систему координат с началом в центре между пластинами и осью X, направленной по нормали к ним. В данной одномерной линеаризованной постановке можно получить аналитическое решение задачи, используя моментный метод Лиза. Для вычисления моментов от интеграла столкновений в форме Больцмана используем метод «сглаженной» функции распределения.

Разрывная на плоскости $v_x=0$ в пространстве скоростей функция распределения в четырехмоментном приближении имеет вид

$$f=\begin{cases} f^{(0)}[1+\nu_1(x)+(c^2-{}^3/_2)\tau_1(x)], & c_x<0,\\ f^{(0)}[1+\nu_2(x)+(c^2-{}^3/_2)\tau_2(x)], & c_x>0,\end{cases} \tag{3.1}$$

$$f^{(0)}=n_0(m/2\pi kT_0)^{3/2}\exp(-c^2),\quad \mathbf{c}=(m/2kT_0)^{1/2}\mathbf{v}$$

Здесь n_0 – численная плотность газа при $x=0$.

Система моментных уравнений переноса имеет вид

$$\frac{d}{dx}\int v_x\Phi(\mathbf{v})f(\mathbf{v},x)\,d\mathbf{v}=\Delta\Phi(\mathbf{v}) \tag{3.2}$$

Здесь $\Delta\Phi(\mathbf{v})$ – моменты от интеграла столкновений. В качестве $\Phi(\mathbf{v})$ выбираются следующие величины: m, mv_x, ${}^1/_2mv^2$, ${}^1/_2mv^2v_x$.

В качестве аппроксимирующей функции распределения в интеграле столкновений будем использовать функцию, представленную несколькими членами ряда (2.1). В этом разложении используем только первые два члена по переменной c_x. Эта функция распределения имеет вид

$$f^*=f^{(0)}[1+\nu(x)+(c^2-{}^3/_2)\tau(x)+2c_xG_x(x)+A(x)c_xS_{3/2}^{(1)}(c^2)],$$
$$\mathbf{G}(x)=(m/2kT_0)^{1/2}\mathbf{u}(x) \tag{3.3}$$

Из равенства потоков тепла, вычисленных с помощью функций распределения (3.3) и (3.1), будем иметь

$$A(x)=2G_x(x)-{}^4/_5q(x)$$

Здесь $q(x)$ – безразмерный поток тепла.

Используя (3.3), легко получить выражение для $\Delta({}^1/_2mv^2v_x)$, которое имеет вид

$$\Delta({}^1/_2mv^2v_x)={}^2/_3mn_0{}^2(2kT_0/m)^{3/2}A(x)\Omega^{(2,2)} \tag{3.4}$$

Здесь $\Omega^{(2,2)}$ – стандартный интеграл, зависящий от модели межмолекулярных взаимодействий.

Граничные условия для системы (3.2) сформулированы путем задания численной плотности газа при $x=0$ и использования коэффициента аккомодации по энергии α_t в качестве модели взаимодействия газа с поверхностью пластин. В результате простых вычислений для молекул, взаимодействующих как жесткие упругие сферы, будем иметь следующее выражение для потока тепла:

$$Q=Q^*\left(1+\frac{\alpha_t}{2-\alpha_t}\frac{64}{75\pi}\frac{l}{\lambda}\right)^{-1},\qquad Q^*=-\frac{2\alpha_t}{2-\alpha_t}\frac{n_0kT_0}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT_0}{m}\right)^{1/2}\frac{\Delta T}{T_0} \tag{3.5}$$

Проведем анализ выражения (3.5) в различных предельных случаях. При $K\to\infty$ выражение для потока тепла совпадает со свободномолекулярным потоком Q^*. При $K\to 0$ будем иметь

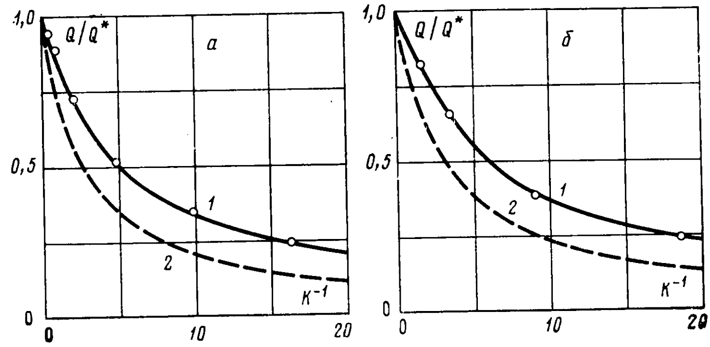
$$Q=-\varkappa dT/dx,\quad \varkappa=(75k/64\sigma^2)(kT_0/\pi m)^{1/2}$$

Здесь σ – диаметр молекулы.

Легко видеть, что поток тепла в континуальном режиме точно совпадает с предельным выражением, причем коэффициент теплопроводности совпадает со значением, вычисленным по теории Чепмена – Энскога. Отметим, что четырехмоментное приближение Гросса – Зиринга [14] в этом предельном случае дает значение для коэффициента теплопроводности, которое вдвое меньше, чем предсказываемое теорией Чепмена – Энскога. Сравнение развитой теории с теорией Гросса – Зиринга указывает на удовлетворительное согласие двух анализов только в области больших чисел Кнудсена. В области континуальных режимов предложенная аппроксимация функции распределения приводит к результатам, которые существенно лучше описывают реальные процессы переноса.

Проведем анализ достоверности развитого метода путем сравнения теории с достаточно точными экспериментальными данными [15].

На фигуре приведено сравнение результатов, полученных методом «сглаженной» функции распределения (кривая *1*) и четырехмоментным методом Гросса – Зиринга



(кривая *2*), с экспериментом (экспериментальные данные изображены точками) для двух несущих газов: аргона (α_t=0,826) и азота (α_t=0,760). Отклонения экспериментальных точек от теоретических кривых, полученных методом «сглаженной» функции распределения, не превышают 1% во всем диапазоне чисел Кнудсена (точность эксперимента порядка 1%). Отклонения экспериментальных точек от теории Гросса — Зиринга могут достигать порядка 50% в континуальной области.

Анализ, проведенный на примере одной классической задачи переноса, показывает высокую эффективность метода «сглаженной» функции распределения. Этот метод обеспечивает правильные выражения для потоков в двух предельных областях, а также, как показывает сравнение с экспериментом, дает достаточно точные результаты в промежуточных режимах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Н. А., Сутугин А. Г.* Высокодисперсные аэрозоли. М., 1969. 4 с. (ВИНИТИ, Итоги науки. Сер. Химия. Физ. химия).
2. *Davis E., Ray A.* Submicron droplet evaporation in the continuum and non-continuum regimes.– J. Aerosol Sci., 1978, v. 9, № 5, p. 411–422.
3. *Кань Санвук.* Исследование роста конденсированных частиц в разреженных и континуальных средах.– Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 7, с. 91–99.
4. *Fukuta N., Walter L. A.* Kinetics of hydrometeor growth from a vapor-spherical model.– J. Atmos. Sci., 1970, v. 27, № 8, p. 1160–1172.
5. *Kotake S., Glass I. I.* Flows with nucleation and condensation.– Progress in Aerospace Sci., 1981, v. 19, № 2/4, p. 129–196.
6. *Carstens J. C.* Drop growth in the atmosphere by condensation: Application to cloud physics.– In: Advances in Colloid and Interface Sci., 1979, v. 10, № 1–4, p. 285–314.
7. *Lees L.* Kinetic theory description of rarefield gas flow.– J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, v. 13, № 1, p. 278–311.
8. *Krook M.* Continuum equations in dynamics of rarefied gases.– J. Fluid Mech., 1959, v. 6, № 4, p. 523–541.
9. *Дерягин Б. В., Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* О построении решений кинетического уравнения Больцмана в слое Кнудсена.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 167–172.
10. *Kelly G. E., Sengers J. V.* Droplet growth in a dilute vapor.– J. Chem. Phys., 1974, v. 61, № 7, p. 2800–2807.
11. *Ивченко И. Н., Мурадян С. М.* Об испарении сферических капель в бинарной газовой смеси при произвольных числах Кнудсена.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 112–118.
12. *Ивченко И. Н.* Об особенностях испарения (роста) сферических капель при промежуточных числах Кнудсена.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 185–187.
13. *Ивченко И. Н.* Исследование конденсационного роста и испарения водяных капель в воздухе.– Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 3, с. 572–575.
14. *Gross E. P., Ziering S.* Heat flow between parallel plates.– Phys. Fluids, 1959, v. 2, № 6, p. 701–712.
15. *Teagan W. P., Springer G. S.* Heat-transfer and density-distribution measurements between parallel plates in the transition regime.– Phys. Fluids, 1968, v. 11, № 3, p. 497–506.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1985