

потенциалом $\chi^* = -i\chi$. Тогда линии тока исходного течения переходят в эквипотенциальные линии дуального течения и наоборот ($\Phi^* = \Psi$, $\Psi^* = -\Phi$). При этом направление скорости на бесконечности меняется на 90° , а циркуляции Γ исходного течения соответствует расход Q ($Q = -\Gamma$) дуального течения. Построенное таким образом дуальное течение является искомым решением краевой задачи (1.4).

Для примера рассмотрим сформулированную в первом разделе оптимальную задачу в случае обтекания эллиптического цилиндра с полуосями a и b . Пусть ось a имеет направление вектора скорости на бесконечности, а суммарный расход Q равен нулю. В соответствии с полученными результатами эта задача дуальна обычной задаче потенциального бесциркуляционного обтекания эллиптического цилиндра со скоростью на бесконечности, направленной вдоль оси b . Решение последней задачи хорошо известно. Приведем только значение сопротивления X , вычисленного по определению (1.1)

$$X = 2\pi\mu U(1+a/b)^2$$

В плоских потенциальных течениях выражение для функционала X упрощается, а именно

$$X = \frac{4\mu}{U} \iint \left| \frac{d^2\chi}{dz^2} \right|^2 dx dy \quad (z=x+iy)$$

Поскольку $|d^2\chi/dz^2| = |d^2\chi^*/dz^2|$, то $X = X^*$ и коэффициент сопротивления дается формулой

$$C_x = \frac{X}{\rho U^2 a} = 4\pi \left(1 + \frac{a}{b} \right)^2 \frac{1}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{2\rho U a}{\mu}$$

Окончательное оптимальное решение задачи (для определенности рассмотрен случай $a > b$) имеет вид

$$\chi^* = \frac{U}{2} \left[(z + \sqrt{z^2 - c^2}) - \left(\frac{a+b}{c} \right)^2 (z - \sqrt{z^2 - c^2}) \right], \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Снижение вязкостного трения. М.: Машиностроение, 1984. 464 с.
2. Бругян М. А., Крапивский П. Л. Об оптимальном управлении потоком вязкой несжимаемой жидкости. — ПММ, 1984, т. 48, вып. 6, с. 929—934.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1985

УДК 532.525.6

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОУДАРЕНИИ НЕРАВНОМЕРНОЙ СТРУИ С ПЛОСКОЙ ПРЕГРАДОЙ

ПАСТЕРНАК В. Е.

Задача о соударении неравномерной дозвуковой струи с плоской преградой исследовалась численно (см., например, [1, 2]) в рамках модели идеальной жидкости. Такой подход является общепринятым для исследования течений, в которых происходит разворот потока [3]. В этом случае информация о том, что вне области разворота потока течение является вязким содержится только в граничных условиях. В данной работе используется эта же модель течения, но в отличие от [1, 2] в качестве профиля скорости на достаточном удалении от преграды взят гауссов профиль, хорошо описывающий основной участок струи [4, 5]. В результате этого удается получить линейное дифференциальное уравнение с частными производными для функции тока и найти его аналитическое решение. Полученные ниже формулы для составляющих поля скорости и поля давления на преграде удовлетворительно согласуются с результатами эксперимента и могут быть использованы в инженерных расчетах и при отладке программ численного моделирования аналогичных течений.

Рассмотрим осесимметричную струю вязкой несжимаемой жидкости, набегающую по нормали на бесконечную плоскую преграду. Начало цилиндрической системы координат расположим в точке пересечения оси струи с преградой; ось z направим вдоль оси струи, ось x — по радиусу (см. фиг. 1).

Без потери общности можно принять, что давление в окружающей среде и статическое давление в струе вне области соударения равны нулю. Профиль скорости на входной границе области соударения соответствует профилю основного участка турбулентной струи. Положение входной границы определяют в процессе решения задачи из условия $v/v_e = 1 - \varepsilon$, где v и v_e — осевые скорости возмущенной и невозмущенной струй соответственно. Поскольку на входной границе эти скорости долж-

ны мало отличаться одна от другой, величина ε должна быть малой. Следуя [1], положим $\varepsilon=0,02$.

Течение в области соударения струи с преградой должно, вообще говоря, описываться системой уравнений непрерывности и Навье - Стокса, однако анализ порядков величин инерционных и вязкостных членов в этих уравнениях показывает, что последними можно пренебречь. Отсюда следует, что если струя дозвуковая и изотермическая, то система уравнений гидродинамики может быть приведена к виду

$$\frac{\partial}{\partial z}(xv) + \frac{\partial}{\partial x}(xu) = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega}{x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega}{x} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

Величины u , v , x и z - безразмерные. В качестве масштабов скорости и длины взяты осевая скорость невозмущенной струи и ее полуширина на входной границе области соударения.

Граничными условиями к уравнениям (1), (2) являются

$$v(x, \infty) = v_0, \quad v(\infty, z) = 0, \quad u(0, z) = 0, \quad v(x, 0) = 0 \quad (4)$$

Здесь $v_0 = \exp(-1/2x^2)$ - осевая составляющая скорости на входной границе области соударения. Физический смысл условий (4) вполне очевиден.

Для отыскания решения системы (1), (2) удобно ввести (в соответствии с (1)) безразмерную функцию тока ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -xv, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = xu \quad (5)$$

Из уравнений (2) и (5) следует, что величина ω/x является произвольной функцией от ψ : $\omega/x = f(\psi)$ или

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = x^2 f(\psi) \quad (6)$$

Вид $f(\psi)$ определяется видом функции ψ_0 в начальном сечении области соударения, а так как величина ω/x постоянна вдоль линий тока $\psi = \text{const}$, то $f(\psi)$ (внутри области соударения) будет иметь тот же вид, что и в начальном сечении. Существует несколько, различающихся аналитически функций тока, позволяющих хорошо описать основной участок турбулентной струи [4, 5]. Если выбрать в качестве начальной функции тока $\psi_0 = x^2(1+cx^2)^{-2}$ [1], можно получить

$$f(\psi) = -4c(1-2c\psi)^3, \quad c = \sqrt{2}-1$$

Уравнение (6) с таким выражением для $f(\psi)$ было решено численно в работе [1]. Если, однако, в качестве начальной функции тока взять $\psi_0 = \exp(-1/2x^2) - 1$ (при этом, очевидно, $v_0 = \exp(-1/2x^2)$), то $f(\psi) = 1 + \psi$. Уравнение (6) при этом линейное и может быть решено аналитически.

Для удобства последующих вычислений сделаем замену переменной в уравнении (6): $y = x^2$. Имеем

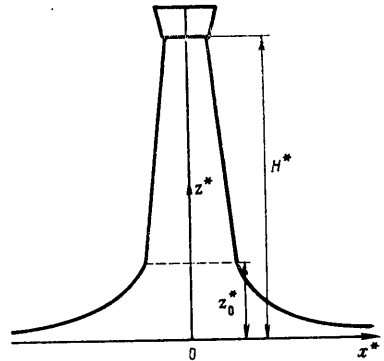
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 4y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = y(1 + \psi) \quad (7)$$

Граничные условия к уравнению (7), вытекающие из условий (4), имеют вид

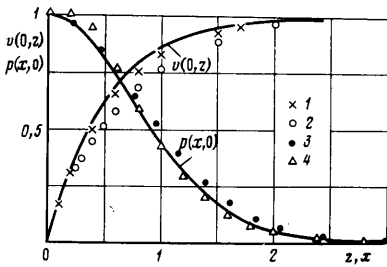
$$\psi(y, \infty) = \psi_0, \quad \sqrt{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad \psi(0, z) = 0, \quad \psi(y, 0) = 0 \quad (8)$$

Пусть $\psi = \psi_0 + \psi_1$, где ψ_1 описывает отклонение от начальной функции тока ψ_0 , возникающее из-за влияния преграды. Вместо уравнения (7) получим

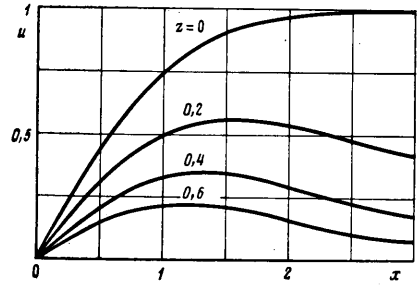
$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + 4y \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = y\psi_1 \quad (9)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнение (9) может быть решено методом разделения переменных. Не вдаваясь в детали вычислений, выпишем окончательное выражение для функции тока ψ

$$\psi = y e^{-1/2y} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-knz}) \frac{(-1)^n}{n+1} L_n^{(1)}(y)$$

$$L_n^{(\alpha)}(y) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+\alpha)!}{(n-m)!(m+\alpha)!m!} y^m, \quad \alpha=0, 1, 2, \dots$$

где $k_n = 2\sqrt{n+1}$, $L_n^{(1)}(y)$ – присоединенный полином Лагерра [6].

Используя формулы (5), легко получить выражения для составляющих скорости u и v , а также для скорости на оси струи $v(0, z)$:

$$u = 2\sqrt{y} e^{-1/2y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} L_n^{(1)}(y) e^{-knz} \quad (10)$$

$$v = e^{-1/2y} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - e^{-knz}) (L_n^{(0)}(y) + L_{n+1}^{(0)}(y)) \quad (11)$$

$$v(0, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - e^{-knz}) \quad (12)$$

Необходимо отметить, однако, что формулы (10)–(12) непригодны для практических вычислений из-за крайне медленной сходимости рядов при $0 \leq z \leq 1$, тогда как именно область малых значений z наиболее интересна с точки зрения приложений. Сходимость рядов (10)–(12) может быть существенно улучшена при помощи алгоритма, идея которого изложена в [7]. Опуская детали вычислений, выпишем конечные результаты

$$u = \sqrt{y} e^{-1/2y} \sum_{n=1}^{\infty} A_n 2^{-n} \quad (13)$$

$$A_n = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m-1} \frac{(n-1)!}{m!(n-m)!} \sqrt{n-m} L_{n-m-1}^{(1)}(y) e^{-2\sqrt{n-m}z}$$

$$v = e^{-1/2y} \sum_{n=1}^{\infty} B_n 2^{-n} \quad (14)$$

$$B_n = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m-1} \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} (L_{n-m-1}^{(0)}(y) + L_{n-m}^{(0)}(y)) (1 - e^{-2\sqrt{n-m}z})$$

$$v(0, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0, z) 2^{-n} \quad (15)$$

Формулы (13)–(15) удобны для программирования. Расчет поля течения для 210 точек занимает ~10 с машинного времени на ЭВМ HP-3000.

Безразмерное давление в плоскости преграды может быть вычислено по теореме Бернулли [3]

$$p(0, x) = 1 - u^2(0, x) \quad (16)$$

Результаты вычислений по формулам (15) и (16) можно сравнить с численным расчетом [4] и с экспериментом [8, 9].

При сопоставлении результатов расчета с экспериментом принято использовать в качестве масштаба длины полуширину невозмущенной струи на уровне плоскости преграды, тогда как в расчетах использовалась полуширина на уровне входной границы зоны соударения. Положение этой границы z_0 (как сказано выше) может быть найдено из решения уравнения $v(0, z) = 0,98$. Искомое значение $z_0 = 2,234$, что согласуется с результатами работ [1, 8]. Зная z_0 , можно (используя одно из известных соотношений для полуширины струи $b^* = 0,089(H^* - z_0^*)$ [9]) получить соотношение между полушириной на входной границе зоны соударения и полушириной на уровне преграды

$$b^*(H^*) = 1,199b^*(H^* - z_0^*)$$

Здесь величины b^* , H^* и z_0^* являются размерными полушириной, расстоянием от среза сопла до преграды и расстоянием от преграды до входной границы соответственно. На фиг. 2, 3 все координаты даны в единицах $b^*(H^*)$.

На фиг. 2 изображена зависимость осевой скорости $v(0, z)$ от расстояния от преграды z и распределение давления по поверхности преграды (сплошные кривые – результаты данного расчета, 1 – результаты [1], 2, 3 – [8], 4 – [9]). На фиг. 3 представлены профили радиальной составляющей скорости струи для различных значений z .

В экспериментах [8, 9] расстояние от среза сопла до преграды (измеренное в калибрах сопла) менялось в пределах от 8 до 20. Число Рейнольдса менялось в пределах от $3,4 \cdot 10^4$ до $8 \cdot 10^4$. Из сопоставления результатов настоящей работы с данными экспериментов [8, 9] и численным расчетом [1] видно (см. фиг. 2), что они удовлетворительно согласуются друг с другом.

Таким образом, в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости получено точное решение задачи о соударении неравномерной завихренной осесимметричной струи с плоской преградой, удовлетворительно описывающее результаты экспериментов. Формулы (11)–(14) могут быть непосредственно использованы в практических приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубель А. Численный метод расчета набегания струи на плоскую поверхность. – Ракетная техника и космонавтика, 1980, т. 18, № 4, с. 50–60.
2. Белов И. А. Взаимодействие неравномерных потоков с преградами. Л.: Машиностроение, 1983. 144 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
5. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.
6. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
7. Мэтьюс Дж., Уокер Р. Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. 398 с.
8. Giralt F., Chia C. J., Trass O. Characterization of the impingement region in Axisymmetric turbulent jet. – Industr. and Engineering Chem., Fundamentals, 1977, v. 16, p. 21–28.
9. Bradbury L. J. S. The impact of an axisymmetric jet onto a normal ground. – Aeronautical Quarterly, 1972, v. 23, p. 141–147.

Москва

Поступила в редакцию
7.VI.1985.

УДК 532.526

О СМЕНЕ МЕХАНИЗМОВ ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

КОЛЯДА В. В., ПАВЕЛЬЕВ А. А.

Переход к турбулентности в пограничном слое при малом уровне возмущений набегающего потока ϵ_0 связан с развитием неустойчивых колебаний (волн Толлмина – Шлихтинга), длина которых существенно превышает толщину пограничного слоя [1]. Эти волны впервые экспериментально наблюдались при $\epsilon_0 < 0,1\%$ [2], а впоследствии была установлена их определяющая роль в процессе перехода вплоть до $\epsilon_0 = 0,25\%$ [3]. Однако уже при $\epsilon_0 = 0,7\%$ развитие возмущений на участке перехода к турбулентности в пограничном слое на пластине происходило в гладком