УДК 532.516

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЯЗКИМ ПОТОКОМ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

БРУТЯН М. А., КРАПИВСКИЙ П. Л., СЫЧЕВ В. В.

Наиболее перспективным и развитым средством уменьшения сопротивления в аэродинамике остается управление течением посредством вдува и отсоса. На практике основными задачами управления остаются ослабление отрыва и затягивание перехода пограничного слоя. Эти задачи решаются главным образом экспериментальными методами [1]. При этом остается невыясненным принципиальный вопрос: каков теоретический минимум сопротивления, достижимый путем управления вдувом (отсосом)? В настоящей работе ответ на этот вопрос дан для случая обтекания тела ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса.

1. Постановка задачи. Пусть тело S обтекается стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью $\mathbf{U}$ на бесконечности. Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти такое распределение скоростей W вдува (отсоса) по нормали к поверхности тела, при котором сопротивление X минимально. Поскольку в рассматриваемом случае тело является протекаемым, то при стандартном определении сопротивления необходимы знания об управляющем устройстве, находящемся внутри тела. Чтобы избежать рассмотрения течения во внутренней области тела, определим сопротивление выражением $X=D/U$, где D – скорость диссипации энергии во внешней к телу области течения. Приведенное определение является разумным, так как, во-первых, оно отражает гидродинамическую сущность задачи и не связано с техническими вопросами конструкции управляющего устройства и, во-вторых, в случае обычных граничных условий прилипания на теле оно совпадает со стандартным определением сопротивления.

Уравнения движения жидкости, граничные условия и минимизируемый функционал имеют вид

$$\rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}=-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{V},\quad \operatorname{div}\mathbf{V}=0 \qquad (1.1)$$
$$\mathbf{V}|_S=W\mathbf{n},\quad \mathbf{V}|_\infty=\mathbf{U}$$
$$X(W)=\frac{\mu}{2U}\int\limits_G\sum_{i,j}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)^2 d^3x$$

Здесь $\mathbf{V}$ – скорость жидкости, ρ – плотность, p – давление, μ – динамическая вязкость, G – внешность тела S, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали.

Будем считать, что суммарный расход жидкости через поверхность тела задан и равен Q. Необходимые условия оптимальности задачи (1.1) в области течения и на поверхности тела имеют вид [2]

$$\mu\Delta\mathbf{V}^*-\nabla p^*+\rho[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}^*-(\nabla\mathbf{V})\mathbf{V}^*]=2\mu\Delta\mathbf{V},\quad (\nabla\mathbf{V})_{ij}=\partial V_j/\partial x_i \qquad (1.2)$$
$$\operatorname{div}\mathbf{V}^*=0,\quad \mathbf{V}^*|_S=\mathbf{V}^*|_\infty=0$$

$$\left(4\mu\frac{\partial V_n}{\partial n}+p^*-\mu\frac{\partial V_n{}^*}{\partial n}\right)\Bigg|_S=\text{const} \qquad (1.3)$$

Рассмотрим случай больших чисел Рейнольдса. В этом приближении условие оптимальности (1.3) приобретает исключительно простой вид $p^*|_S=\text{const}$. Естественно предположить, что в пределе при $\text{Re}\to\infty$ течение будет потенциальным. Поэтому решение оптимальной задачи ищем в виде

$$\mathbf{V}=\nabla\Phi,\qquad p=p_\infty+\frac{\rho U^2}{2}-\frac{\rho(\nabla\Phi)^2}{2} \qquad (1.4)$$
$$\Delta\Phi=0$$
$$[\mathbf{V}\mathbf{n}]|_S=0,\qquad \Phi=\mathbf{U}\mathbf{x}-\frac{Q}{4\pi|x|}+O\left(\frac{1}{|x|^2}\right),\qquad |x|\to\infty$$

Краевая задача (1.1) при этом удовлетворяется, а искомое распределение скорости вдува (отсоса) определяется из (1.4) по формуле

$$W=\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Bigg|_S \qquad (1.5)$$

Для рассматриваемого потенциального решения (1.4) краевая задача (1.2) становится однородной ($\Delta\mathbf{V}=0$) задачей с нулевыми граничными условиями и имеет только тривиальное решение

$$\mathbf{V}^*=0,\quad p^*=\text{const} \qquad (1.6)$$

При этом условие оптимальности $p^*|_S=\text{const}$ выполняется, так что (1.4)–(1.6) действительно является решением рассматриваемой задачи о минимуме сопротивления в приближении больших чисел Рейнольдса.

Краевая задача (1.4) математически эквивалентна задаче о проводнике S, помещенном в однородное электрическое поле. При этом аналогом напряженности электрического поля является скорость течения $\mathbf{V}$, аналогом поверхностной плотности заряда – скорость вдува (отсоса) W и т. п.

2. Минимизация сопротивления сферы. В качестве примера решения вариационной задачи для трехмерного тела рассмотрим случай обтекания сферы радиуса a при $Q=0$. В соответствии с (1.4) решение ищем в виде

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}+\nabla\varphi \tag{2.1}$$

где φ – потенциал возмущенной скорости. Решениями уравнения Лапласа являются, как известно, $1/r$ и все ее производные. Вследствие полной симметрии сферы в решение может войти лишь один постоянный вектор $\mathbf{U}$, причем ввиду линейности уравнения Лапласа он должен войти в φ линейным образом. Единственным скаляром, который можно составить из $\mathbf{U}$ и производных от $1/r$, является $\mathbf{U}\nabla(1/r)$. Поэтому φ ищем в виде

$$\varphi=C\frac{\mathbf{Un}}{r^2} \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в граничное условие $[\mathbf{Vn}]|_{r=a}=0$, находим $C=-a^3$, так что окончательное решение имеет вид

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}+[3\mathbf{n}(\mathbf{Un})-\mathbf{U}]\left(\frac{a}{r}\right)^3,\qquad W=3(\mathbf{Un}) \tag{2.3}$$

Находим сопротивление X и коэффициент сопротивления C_x

$$X=48\pi\mu aU,\qquad C_x=\frac{2X}{\rho U^2\pi a^2}=\frac{192}{\mathrm{Re}},\qquad \mathrm{Re}=\frac{2\rho Ua}{\mu}$$

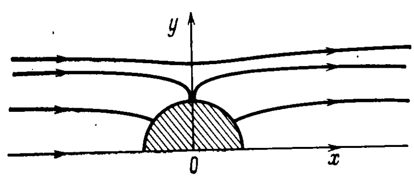
Аналогичная вариационная задача, но в другом предельном случае $\mathrm{Re}\to 0$ решена в работе [2]. В этом случае оптимальное решение имеет вид

$$W=\frac{1}{3}(\mathbf{Un}),\qquad C_x=\frac{64}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}$$

Соображения симметрии позволяют решить оптимальную задачу и при $Q\neq 0$. Для этого достаточно к решению (2.3) добавить скорость течения от источника (стока) интенсивности Q, расположенного в центре сферы. При этом скорость вдува (отсоса) и коэффициент сопротивления даются выражениями

$$W=3(\mathbf{Un})+qU,\qquad q=\frac{Q}{4\pi a^2U}$$

$$C_x=\frac{192}{\mathrm{Re}}\left(1+\frac{q^2}{3}\right)$$



Картина линий тока для оптимального решения (2.3) показана на фигуре при $\Psi=0$; 0,5; 1,5; 2. В классической теории пограничного слоя при безотрывном обтекании коэффициент сопротивления тела при $\mathrm{Re}\to\infty$ имеет порядок $O(\mathrm{Re}^{-1/2})$ и связан с диссипацией энергии в пограничном слое. Главной особенностью оптимального решения является то, что коэффициент сопротивления при $\mathrm{Re}\to\infty$ имеет порядок $O(\mathrm{Re}^{-1})$ и связан с диссипацией в потенциальном течении. Это различие вызвано тем, что в оптимальном решении не образуется пограничного слоя из-за особенностей граничных условий (нормальная составляющая скорости на поверхности тела не равна нулю) и потенциальное решение, как всегда удовлетворяющее уравнениям Навье-Стокса, в данном случае удовлетворяет и граничным условиям на твердой проницаемой поверхности.

3. Минимизация сопротивления плоских тел. Поскольку рассматриваемое течение потенциальное, то мощным средством решения плоских задач является теория функций комплексного переменного. С помощью этой теории можно решить такой же широкий класс задач, как и в обычной гидродинамике плоских безвихревых течений. В действительности решение плоских оптимальных задач проще получить непосредственно из решения соответствующих задач обтекания с обычным условием непротекания. Для этого воспользуемся следующим приемом. Введем комплексный потенциал течения $\chi=\Phi+i\Psi$. Рассмотрим теперь «дуальное» течение с комплексным потенциалом $\chi^*=-i\chi$. Тогда линии тока исходного течения переходят в эквипотенциальные линии дуального течения и наоборот ($\Phi^*=\Psi$, $\Psi^*=-\Phi$). При этом направление скорости на бесконечности меняется на 90°, а циркуляции Γ исходного течения соответствует расход Q ($Q=-\Gamma$) дуального течения. Построенное таким образом дуальное течение является искомым решением краевой задачи (1.4).

Для примера рассмотрим сформулированную в первом разделе оптимальную задачу в случае обтекания эллиптического цилиндра с полуосями a и b. Пусть ось a имеет направление вектора скорости на бесконечности, а суммарный расход Q равен нулю. В соответствии с полученными результатами эта задача дуальна обычной задаче потенциального бесциркуляционного обтекания эллиптического цилиндра со скоростью на бесконечности, направленной вдоль оси b. Решение последней задачи хорошо известно. Приведем только значение сопротивления X, вычисленного по определению (1.1)

$$X=2\pi\mu U(1+a/b)^2$$

В плоских потенциальных течениях выражение для функционала X упрощается, а именно

$$X=\frac{4\mu}{U}\iint\left|\frac{d^2\chi}{dz^2}\right|^2 dx\,dy \qquad (z=x+iy)$$

Поскольку $|d^2\chi/dz^2|=|d^2\chi^*/dz^2|$, то $X=X^*$ и коэффициент сопротивления дается формулой

$$C_x=\frac{X}{\rho U^2 a}=4\pi\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\frac{1}{\mathrm{Re}}, \qquad \mathrm{Re}=\frac{2\rho U a}{\mu}$$

Окончательное оптимальное решение задачи (для определенности рассмотрен случай $a>b$) имеет вид

$$\chi^*=\frac{U}{2}\left[(z+\sqrt{z^2-c^2})-\left(\frac{a+b}{c}\right)^2(z-\sqrt{z^2-c^2})\right], \qquad c=\sqrt{a^2-b^2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Снижение вязкостного трения. М.: Машиностроение, 1984. 464 с.
2. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Об оптимальном управлении потоком вязкой несжимаемой жидкости.– ПММ, 1984, т. 48, вып. 6, с. 929–934.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1985

УДК 532.525.6

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОУДАРЕНИИ НЕРАВНОМЕРНОЙ СТРУИ С ПЛОСКОЙ ПРЕГРАДОЙ

ПАСТЕРНАК В. Е.

Задача о соударении неравномерной дозвуковой струи с плоской преградой исследовалась численно (см., например, [1, 2]) в рамках модели идеальной жидкости. Такой подход является общепринятым для исследования течений, в которых происходит разворот потока [3]. В этом случае информация о том, что вне области разворота потока течение является вязким содержится только в граничных условиях. В данной работе используется эта же модель течения, но в отличие от [1, 2] в качестве профиля скорости на достаточном удалении от преграды взят гауссов профиль, хорошо описывающий основной участок струи [4, 5]. В результате этого удается получить линейное дифференциальное уравнение с частными производными для функции тока и найти его аналитическое решение. Полученные ниже формулы для составляющих поля скорости и поля давления на преграде удовлетворительно согласуются с результатами эксперимента и могут быть использованы в инженерных расчетах и при отладке программ численного моделирования аналогичных течений.

Рассмотрим осесимметричную струю вязкой несжимаемой жидкости, набегающую по нормали на бесконечную плоскую преграду. Начало цилиндрической системы координат расположим в точке пересечения оси струи с преградой; ось z направим вдоль оси струи, ось x – по радиусу (см. фиг. 1).

Без потери общности можно принять, что давление в окружающей среде и статическое давление в струе вне области соударения равны нулю. Профиль скорости на входной границе области соударения соответствует профилю основного участка турбулентной струи. Положение входной границы определяют в процессе решения задачи из условия $v/v_e=1-\varepsilon$, где v и v_e – осевые скорости возмущенной и невозмущенной струй соответственно. Поскольку на входной границе эти скорости долж-