МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1986

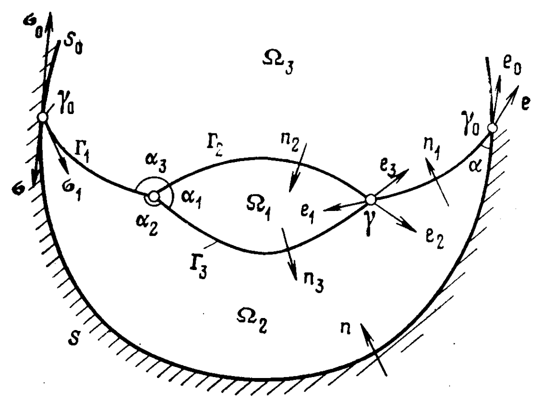
УДК 532.5.013.4

О РАВНОВЕСИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХ КАПИЛЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ С ОБЩЕЙ ЛИНИЕЙ КОНТАКТА

СЛОБОЖАНИН Л. А.

Системы с линией контакта трех капиллярных жидкостей, достаточно распространенные в природе, стали изучаться сравнительно недавно [1–3]. На основе вариационных принципов ниже сформулированы условия равновесия и устойчивости таких систем в сосуде.

1. Условия равновесия. Пусть три несмешивающиеся жидкости (одной из них может быть газ) плотности ρ_i заполняют сосуд, занимая области Ω_i (фигура). Жидкости обладают поверхностным натяжением и имеют общую замкнутую линию контакта γ. Поле массовых сил считаем стационарным и потенциальным. Потенциальная энергия такой системы



$$U=\sum_{i=1}^{3}\sigma_i|\Gamma_i|+\sigma|S|+ \qquad (1.1)$$
$$+\sigma_0|S_0|+\sum_{i=1}^{3}\rho_i\int\limits_{\Omega_i}\Pi\,d\Omega$$

Здесь σ_i – коэффициент поверхностного натяжения на поверхности Γ_i раздела жидкостей j и k ($i\neq j\neq k$; i, j, k=1, 2, 3); σ, σ_0 – коэффициенты поверхностного натяжения на поверхностях S и S_0 контакта жидкостей 2 и 3 со стенкой сосуда; $|A|$ – площадь соответствующей поверхности; $\Pi(\mathbf{x})$ – плотность потенциала массовых сил.

Найдем выражение для первой вариации δU потенциальной энергии. При варьировании первых пяти слагаемых в правой части (1.1) воспользуемся формулой Гаусса [4] для вариации площади поверхности. Кроме того, положим, что единичный вектор нормали $\mathbf{n}_i$ к Γ_i направлен из Ω_j в Ω_k. (Для i=1 выберем j=2, k=3; для других i значения j, k определяются циклической перестановкой, см. фигуру.) Тогда

$$\delta\int\limits_{\Omega_i}\Pi\,d\Omega=-\int\limits_{\Gamma_j}\Pi(\mathbf{n}_j\delta\mathbf{x})\,d\Gamma+\int\limits_{\Gamma_k}\Pi(\mathbf{n}_k\delta\mathbf{x})\,d\Gamma$$

где $\delta\mathbf{x}$ – бесконечно малый вектор смещения точки $\mathbf{x}$. Учтем [5], что на линии γ_0 контакта поверхности Γ_1 со стенкой сосуда $\mathbf{e}\delta\mathbf{x}=(\mathbf{n}\mathbf{n}_1)\mathbf{e}_0\delta\mathbf{x}$ ($\mathbf{n}$ – единичный вектор внутренней нормали к поверхности сосуда, а $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_0$ – единичные векторы нормали к γ_0, касательные соответственно к Γ_1 и к S и направленные из Γ_1 и S). По аналогии с [5] получим

$$\delta U=\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\Gamma_i}[-2\sigma_iH_i+(\rho_j-\rho_k)\Pi](\mathbf{n}_i\delta\mathbf{x})\,d\Gamma+ \qquad (1.2)$$
$$+\int\limits_{\gamma_0}[\sigma_1(\mathbf{n}\mathbf{n}_1)+\sigma-\sigma_0](\mathbf{e}_0\delta\mathbf{x})\,d\gamma+\int\limits_{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\mathbf{e}_i\right)\delta\mathbf{x}\,d\gamma$$

Здесь H_i – средняя кривизна Γ_i; $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор нормали к γ в касательной к Γ_i плоскости, направленный из Γ_i.

Допустимыми являются такие возмущения поверхностей раздела, при которых объем w_i каждой из жидкостей сохраняется

$$\delta w_i \equiv -\int\limits_{\Gamma_j} (\mathbf{n}_j\delta\mathbf{x})\,d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_k} (\mathbf{n}_k\delta\mathbf{x})\,d\Gamma=0 \tag{1.3}$$

Следуя правилу неопределенных множителей Лагранжа, примененному к условиям (1.3), из принципа стационарности потенциальной энергии получим следующие условия равновесия:

$$-2\sigma_i H_i+(\rho_j-\rho_k)\Pi+c_i=0,\ \ \mathbf{x}\in\Gamma_i;\ \ \mathbf{n}\mathbf{n}_1\equiv\cos\alpha=(\sigma_0-\sigma)/\sigma_1,\ \ \mathbf{x}\in\gamma_0$$
$$\sigma_1\mathbf{e}_1+\sigma_2\mathbf{e}_2+\sigma_3\mathbf{e}_3=0,\ \ \mathbf{x}\in\gamma \tag{1.4}$$

Здесь α – угол смачивания стенки сосуда жидкостью *2*. Постоянные $c_i=p_j-p_k$ (p_i – множители Лагранжа) связаны соотношением $c_1+c_2+c_3=0$. Оно становится понятным, если учесть, что из трех условий (1.3) независимы лишь два. Значения c_i полностью определяются, если заданы объемы двух жидкостей.

Таким образом, как обычно, на равновесных поверхностях раздела должно выполняться капиллярное уравнение Лапласа, а на линии смачивания γ_0 краевой угол α должен быть фиксирован. Для выполнения условия (1.4) необходимо, чтобы каждый из коэффициентов σ_i не превосходил суммы двух остальных: $\sigma_i\leqslant\sigma_j+\sigma_k$. Легко установить, что равенство (1.4) определяет значения равновесных двугранных углов α_i, образуемых областями Ω_i на контуре γ [5]

$$\cos\alpha_i=(\sigma_i^2-\sigma_j^2-\sigma_k^2)/(2\sigma_j\sigma_k) \tag{1.5}$$

Введем обозначения $h_i=\mathbf{e}_i\delta\mathbf{x}$, $N_i=\mathbf{n}_i\delta\mathbf{x}$. Если для всех i $\sigma_i<\sigma_j+\sigma_k$, то на γ проекция h_i может быть выражена через N_j, N_k

$$h_i=(-N_j\cos\alpha_j+N_k\cos\alpha_k)/\sin\alpha_i \tag{1.6}$$

2. Вторая вариация потенциальной энергии. Для рассматриваемых систем определение $\delta^2 U$ в окрестности состояния равновесия существенно отличается от ранее исследованных случаев [5] лишь необходимостью нахождения вариации интеграла по γ, входящего в (1.2). Обозначим через $\mathbf{t}=\mathbf{n}_i\times\mathbf{e}_i$ единичный вектор касательной к γ. Имеем

$$\delta\mathbf{e}_i=(\delta\mathbf{t}\times\mathbf{n}_i)+(\mathbf{t}\times\delta\mathbf{n}_i) \tag{2.1}$$

На Γ_i в окрестности γ введем криволинейные координаты u_i, v_i так, что линии $v_i=\mathrm{const}$ ортогональны γ, а контур γ совпадает с некоторой линией $u_i=\mathrm{const}$. Для удобства записи будем обозначать для всех i значения v_i, принимаемые вдоль γ, через v. Тогда

$$\mathbf{t}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\right)^{-1/2}$$

$$\delta\mathbf{t}=\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\right)^{-1/2}\delta\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\right)-\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\right)^{-3/2}\left[\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\delta\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\right)\right]$$

Принимая за v длину дуги τ контура γ, получим

$$\delta\mathbf{t}=\delta\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\tau}\right)-\mathbf{t}\left[\mathbf{t}\delta\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\tau}\right)\right] \tag{2.2}$$

Соответствие между равновесными и возмущенными поверхностями раздела установим так, чтобы в каждой точке $\mathbf{x}\in\gamma$ вектор $\delta\mathbf{x}$ принадлежал плоскости, ортогональной γ, т. е. $\mathbf{t}\delta\mathbf{x}=0$. При варьировании некоторого вектора $\mathbf{A}_i$, определенного на γ и относящегося к Γ_i, представим $\delta\mathbf{x}=\delta_1\mathbf{x}+\delta_2\mathbf{x}$, $\delta_1\mathbf{x}=N_i\mathbf{n}_i$, $\delta_2\mathbf{x}=h_i\mathbf{e}_i$ и в соответствии с этим получим $\delta\mathbf{A}_i=\delta_1\mathbf{A}_i+\delta_2\mathbf{A}_i$. Имеем

$$\delta_1\mathbf{n}_i=-\frac{\partial N_i}{\partial s_i}\mathbf{e}_i-\frac{\partial N_i}{\partial\tau}\mathbf{t},\qquad \delta_1\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\tau}\right)=\frac{\partial N_i}{\partial\tau}\mathbf{n}_i+N_i\frac{\partial\mathbf{n}_i}{\partial\tau} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\mathbf{n}_i}{\partial\tau}=-K_{1i}\cos\theta_i\mathbf{t}_{1i}-K_{2i}\sin\theta_i\mathbf{t}_{2i}=-\omega_i\mathbf{t}-\frac{K_{1i}-K_{2i}}{2}(\sin 2\theta_i)\mathbf{e}_i \tag{2.4}$$

$$\omega_i=K_{1i}\cos^2\theta_i+K_{2i}\sin^2\theta_i$$

Здесь s_i – длина дуги вдоль линии $v_i=\mathrm{const}$, отсчитываемая в направлении $\mathbf{e}_i$; K_{1i}, K_{2i} – главные кривизны Γ_i; $\mathbf{t}_{1i}$, $\mathbf{t}_{2i}$ – единичные векторы, отвечающие главным направлениям на Γ_i; θ_i – угол между $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}_{1i}$; ω_i – кривизна нормального сечения Γ_i в направлении $\mathbf{t}$. В (2.4) использована формула [6] для производной единичного вектора нормали по направлению касательной к поверхности. С учетом соотношений

(2.2)–(2.4) из (2.1) получим (2.5)

$$\delta_1 \mathbf{e}_i = N_i \frac{K_{1i}-K_{2i}}{2} (\sin 2\theta_i)\mathbf{t} + \frac{\partial N_i}{\partial s_i}\mathbf{n}_i \tag{2.5}$$

$$\delta_2 \mathbf{n}_i = h_i \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial s_i} = h_i \left[-\varkappa_i \mathbf{e}_i + \frac{K_{1i}-K_{2i}}{2} (\sin 2\theta_i)\mathbf{t} \right] \tag{2.6}$$

$$\delta_2 \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial h_i}{\partial \tau} \mathbf{e}_i + h_i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \tau} \tag{2.7}$$

При переходе ко второму равенству в (2.6) учтено соотношение, аналогичное (2.4). Здесь $\varkappa_i$ – кривизна нормального сечения Γ_i в направлении $\mathbf{e}_i$. Вектор $\partial \mathbf{e}_i/\partial\tau$ ортогонален $\mathbf{e}_i$ и его можно представить в виде $\partial \mathbf{e}_i/\partial\tau = F_i \mathbf{n}_i + G_i \mathbf{t}$, где F_i, G_i – некоторые скалярные функции. Поэтому из (2.2), (2.7) следует $\delta_2 t = (\partial h_i/\partial\tau)\mathbf{e}_i + h_i F_i \mathbf{n}_i$. Теперь с учетом (2.6) из соотношения (2.1) найдем

$$\delta_2 \mathbf{e}_i = \varkappa_i h_i \mathbf{n}_i - \frac{\partial h_i}{\partial \tau}\mathbf{t} \tag{2.8}$$

Используя равенства (1.4), (2.5), (2.8) и $\mathbf{t}\delta\mathbf{x}=0$, получим, что в окрестности равновесного состояния

$$\delta \int\limits_\gamma \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{e}_i \right) \delta\mathbf{x}\, d\gamma = \int\limits_\gamma \left[\sum_{i=1}^3 \sigma_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial s_i} + \varkappa_i h_i \right) N_i \right] d\gamma$$

Варьирование других членов, входящих в (1.2), производится аналогично [5]. В результате получим

$$\begin{gathered}\delta^2 U = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \int\limits_{\Gamma_i} (a_i N_i - \Delta_i N_i) N_i\, d\Gamma + \sigma_1 \int\limits_{\gamma_0} \left(\frac{\partial N_1}{\partial e} + \chi N_1 \right) N_1\, d\gamma + \\ + \int\limits_\gamma \left\{ \sum_{i=1}^3 \sigma_i \left[\frac{\partial N_i}{\partial s_i} + l_i (N_k \cos\alpha_k - N_j \cos\alpha_j) \right] N_i \right\} d\gamma \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$a_i = \frac{\rho_j - \rho_k}{\sigma_i} \frac{\partial \Pi}{\partial n_i} - K_{1i}^2 - K_{2i}^2, \qquad \chi = \frac{\varkappa \cos\alpha - \varkappa_0}{\sin\alpha}, \qquad l_i = \frac{\varkappa_i}{\sin\alpha_i}$$

Здесь Δ_i – оператор Лапласа – Бельтрами на Γ_i; $\partial/\partial e$ – производная по направлению вектора $\mathbf{e}$; $\varkappa$, $\varkappa_0$ – кривизны нормальных сечений поверхностей Γ_1 и S вдоль направлений $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_0$ соответственно; при записи интеграла по γ учтено соотношение (1.6). Воспользовавшись формулой Грина, выражение (2.9) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\delta^2 U = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \int\limits_{\Gamma_i} [a_i N_i^2 + \nabla_i (N_i, N_i)]\, d\Gamma_i + \sigma_1 \int\limits_{\gamma_0} \chi N_1^2\, d\gamma + \\ + \int\limits_\gamma \left[\sum_{i=1}^3 \sigma_i l_i (N_k \cos\alpha_k - N_j \cos\alpha_j) N_i \right] d\gamma \end{gathered} \tag{2.10}$$

где ∇_i – первый дифференциальный параметр Бельтрами на Γ_i.

3. Спектральный признак устойчивости. Согласно принципу минимума потенциальной энергии, состояние равновесия системы устойчиво, если наименьшее значение второй вариации $\delta^2 U$ на всех допустимых возмущениях положительно, и неустойчиво, если оно отрицательно [5]. С учетом нормировки

$$\sum_{i=1}^3 \int\limits_{\Gamma_i} N_i^2\, d\Gamma_i = 1$$

и условий (1.3) получим, что стационарное значение функционала $\delta^2 U$ реализуется на возмущениях, удовлетворяющих уравнению

$$2\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\int\limits_{\Gamma_i}(a_iN_i-\Delta_iN_i+\mu_i-\lambda N_i)\delta N_i\,d\Gamma+2\sigma_1\int\limits_{\gamma_0}\left(\frac{\partial N_1}{\partial e}+\chi N_1\right)\delta N_1\,d\gamma+$$

$$+\int\limits_{\gamma}\left\{\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\left[2\frac{\partial N_i}{\partial s_i}+l_i(N_k\cos\alpha_k-N_j\cos\alpha_j)+\frac{\cos\alpha_i}{\sigma_i}(\sigma_jl_jN_j-\sigma_kl_kN_k)\right]\delta N_i\right\}d\gamma=0 \quad (3.1)$$

где $2\mu_i=q_j-q_k$; λ, q_i – множители Лагранжа.

Из уравнения $\sigma_1\mathbf{n}_1+\sigma_2\mathbf{n}_2+\sigma_3\mathbf{n}_3=0$, эквивалентного (1.4), следует, что на γ величины N_i, а также δN_i связаны соотношениями

$$\sigma_1N_1+\sigma_2N_2+\sigma_3N_3=0 \quad (3.2)$$

$$\sigma_1\delta N_1+\sigma_2\delta N_2+\sigma_3\delta N_3=0 \quad (3.3)$$

Выражая из (3.3) значение δN_2 через δN_1 и δN_2, используя (1.5) и (3.2), представим интеграл по γ, входящий в (3.1), в виде

$$2\int\limits_{\gamma}\left\{\sigma_1\left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}+b_1N_1\right)-\left(\frac{\partial N_3}{\partial s_3}+b_3N_3\right)\right]\delta N_1+\right.$$

$$\left.+\sigma_2\left[\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_2}+b_2N_2\right)-\left(\frac{\partial N_3}{\partial s_3}+b_3N_3\right)\right]\delta N_2\right\}d\gamma$$

$$\left(2b_i=l_i\frac{\sigma_j^2-\sigma_k^2}{\sigma_j\sigma_k}+l_j\frac{\sigma_j}{\sigma_k}-l_k\frac{\sigma_k}{\sigma_j}\right)$$

Тогда из (3.1) следует, что минимум квадратичного функционала (2.10) и функции N_i, реализующие этот минимум, совпадают с наименьшим собственным значением $\lambda=\lambda_*$ и соответствующими нормированными собственными функциями задачи

$$-\Delta_iN_i+a_iN_i+\mu_i=\lambda N_i,\qquad x\in\Gamma_i;\qquad \frac{\partial N_1}{\partial e}+\chi N_1=0,\qquad x\in\gamma_0$$

$$\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}+b_1N_1\right)-\left(\frac{\partial N_3}{\partial s_3}+b_3N_3\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_2}+b_2N_2\right)-\left(\frac{\partial N_3}{\partial s_3}+b_3N_3\right)=0,\qquad x\in\gamma$$

к которой необходимо присоединить условие (3.2) на γ и условия (1.3). Здесь снова $\mu_1+\mu_2+\mu_3=0$ и из трех условий (1.3) достаточно рассматривать два. Если $\lambda_*>0$, то система устойчива, если $\lambda_*<0$ – неустойчива.

Автор благодарит А. Д. Тюпцова за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hartland S., Burri J.* Das maximale Volumen einer Linse an einer Fluid-Flüssig Grenzfläche.– Chem. Eng. J., 1976, v. 11, № 1, p. 7–17.
2. *Vohra D. K., Hartland S.* Shape of a vertical column of drops approaching an interface.– AIChE Journal, 1978, v. 24, № 5, p. 811–817.
3. *Братухин Ю. К., Маурин Л. Н.* О равновесных формах капель нефти на воде. Минск, Инж.-физ. ж. Рукопись деп. в ВИНИТИ 29.11.82 г., № 5909-82 Деп.
4. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 330 с.
5. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
6. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.

Харьков

Поступила в редакцию 29.IV.1985