

УДК 532.59:612.1

## ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В АКТИВНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ТРУБКЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

КИРЕЕВА Е. Е., КЛОЧКОВ Б. Н.

Экспериментальные данные, касающиеся биомеханических свойств кровеносных микрососудов, указывают на существование в них колебательных режимов течения [1, 2]. При численном решении соответствующих задач удается получить такого рода режимы [3, 4], являющиеся следствием развития неустойчивости в системе. Физиологические значения параметров соответствуют устойчивому положению системы или нахождению ее в неустойчивой области вблизи границы устойчивости (бифуркации). В связи с этим представляет интерес исследование поведения системы в этой области.

В настоящей работе приведены результаты аналитического решения нелинейных уравнений, моделирующих течение ньютоновской жидкости в активной вязкоупругой трубке в безынерционном квазиодномерном приближении вблизи границы бифуркации при потере устойчивости. Получено аналитическое выражение для среднего за период распределенных автоколебаний расхода через такую трубку. Обсуждается применение результатов к проблеме авторегуляции расхода крови через микрососуды. Краткое изложение содержится в [5].

1. Уравнения движения ньютоновской несжимаемой жидкости с вязкостью  $\mu$  в вязкоупругой активной трубке радиуса  $R(x, t)$  и средним по сечению давлением  $p(x, t)$ , зависящими от продольной координаты  $x$  и времени  $t$ , впервые были предложены в работах [6, 7]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \psi(p, R) = \Lambda \frac{\partial R}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$R \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{16\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( R^4 \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

где  $\psi(p, R) = 0$  — статическая S-образная характеристика, имеющая падающий участок на плоскости  $p, R$  (в частности, можно положить, что  $\psi(p, R) = \alpha^0 R + \alpha_1^0 p + \alpha_2^0 p^2 + \alpha_3^0 p^3 + \alpha_0^0$ , причем  $\alpha^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \alpha_0^0$  — упругие постоянные);  $\Lambda = \text{const}$  — мгновенный упругий коэффициент.

Граничные условия для трубки конечной длины  $L$  в общем случае могут быть заданы в виде

$$p_+ - p(0, t) = z_+ g(0, t), \quad p(L, t) - p_- = z_- g(L, t) \quad (1.3)$$

где давления  $p_+, p_-$  и гидравлические сопротивления  $z_+, z_-$  фиксированы, а  $g = -(\pi R^4 / (8\mu)) (\partial p / \partial x)$  — расход.

Будем рассматривать поведение малых отклонений от стационарного состояния  $p_0 = p_0(x), R_0 = R_0(x)$ , определяемого решением системы уравнений (1.1), (1.2) при  $\partial/\partial t = 0$

$$\psi(p_0, R_0) = 0, \quad \frac{dg_0}{dx} = 0, \quad g_0 = -\frac{\pi R_0^4}{8\mu} \frac{dp_0}{dx} = \text{const} \quad (1.4)$$

Перейдем к новым переменным  $\delta p = p - p_0, \delta R = R - R_0$ . Рассматривая случай достаточно малых  $\delta p, \delta R$ , будем учитывать лишь нелинейности до

третьей степени включительно в обоих уравнениях. Тогда вместо (1.1), (1.2) с учетом (1.4) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}(\nu | \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \{\delta p; \delta R\} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{f}(\nu | \mathbf{u}) = \left\{ -\delta \psi(\delta p, \delta R) + \Lambda \frac{\partial \delta R}{\partial t}; \frac{\partial \delta g_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta g_2}{\partial x} - \frac{\delta R}{R_0} \frac{\partial \delta g_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta g_3}{\partial x} - \frac{\delta R}{R_0} \frac{\partial \delta g_2}{\partial x} + \frac{(\delta R)^2}{R_0^2} \frac{\partial \delta g_1}{\partial x} \right\}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta \psi(\delta p, \delta R) &= -\frac{\Lambda}{\theta} \delta R - \frac{\delta p}{\lambda} + \alpha_2 (\delta p)^2 + \alpha_3 (\delta p)^3 \\ \frac{\partial \delta g_1}{\partial x} &= \frac{R_0^3}{16\mu} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{2\theta u_0}{\lambda \Lambda} \frac{\partial \delta p}{\partial x} - 2u_0 \frac{\partial \delta R}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta g_2}{\partial x} &= \frac{-\delta R}{R_0} \frac{\partial \delta g_1}{\partial x} + \frac{3R_0^2}{16\mu} \delta R \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{R_0^2}{4\mu} \frac{\partial \delta R}{\partial x} \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{4\theta u_0}{\lambda \Lambda R_0} \delta R \frac{\partial \delta p}{\partial x} - \frac{4u_0}{R_0} \delta R \frac{\partial \delta R}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta g_3}{\partial x} &= \frac{\delta R}{R_0} \frac{\partial \delta g_2}{\partial x} - \frac{(\delta R)^2}{R_0^2} \frac{\partial \delta g_1}{\partial x} + \frac{R_0}{2\mu} \delta R \frac{\partial \delta R}{\partial x} \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{3R_0}{16\mu} (\delta R)^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{2\theta u_0}{\lambda \Lambda R_0^2} (\delta R)^2 \frac{\partial \delta p}{\partial x} - \frac{2u_0}{R_0^2} (\delta R)^2 \frac{\partial \delta R}{\partial x} \\ u_0 &= -\frac{R_0^2}{8\mu} \frac{dp_0}{dx} = \frac{g_0}{\pi R_0^2}, \quad -\frac{\Lambda}{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial R} = \alpha^\circ \\ &\quad -\frac{1}{\lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial p} = \alpha_1^\circ + 2\alpha_2^\circ p_0 + 3\alpha_3^\circ p_0^2 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} = \alpha_2^\circ + 3\alpha_3^\circ p_0, \quad \alpha_3 = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial p^3} = \alpha_3^\circ \\ \frac{dR_0}{dx} &= -\frac{\theta}{\lambda \Lambda} \frac{dp_0}{dx}, \quad R_0 \frac{d^2 p_0}{dx^2} + 4 \frac{dp_0}{dx} \frac{dR_0}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Вопрос о выборе бифуркационного параметра  $\nu$  изложим ниже.

Рассмотрим нетривиальный случай, когда стационарное состояние с  $p_0$ ,  $R_0$  лежит на падающем участке кривой  $\psi(p_0, R_0) = 0$ . При этом величины  $\lambda$ ,  $\theta$ ,  $\Lambda$ ,  $\alpha_3$  считаем положительными.

При выводе системы уравнений (1.5) предположено, что

$$256\mu^2 \theta^2 u_0^2 L^2 / (\lambda^2 \Lambda^2 R_0^6) \ll 1 \quad (1.7)$$

т. е. пренебрегаем квадратами стационарных градиентов. Пусть также  $p_0$ ,  $R_0$  мало меняются по длине трубки, так что величины  $R_0$ ,  $\lambda$ ,  $\theta$  в уравнениях (1.5) можно считать постоянными.

2. Для получения решения системы уравнений (1.5) в области неустойчивости вблизи границы бифуркации воспользуемся следующей процедурой [8]. Перейдем к новому безразмерному времени  $\tau = \omega t$ , где  $\omega$  имеет смысл частоты колебаний. Будем искать  $2\pi$ -периодическое по  $\tau$  решение (1.5) в виде рядов по малому параметру  $\varepsilon$ , определяемому величиной отклонения от границы бифуркации (см. ниже)

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 / 2 + \varepsilon^3 \mathbf{u}_3 / 6 + \dots \quad (2.1)$$

$$v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 / 2 + \varepsilon^3 v_3 / 6 + \dots \quad (2.2)$$

$$\omega - \omega_* = \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 / 2 + \varepsilon^3 \omega_3 / 6 + \dots \quad (2.3)$$

$$g = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 / 2 + \varepsilon^3 g_3 / 6 + \dots \quad (2.4)$$

причем  $\omega_*$  — частота на границе бифуркации.

Подставляя (2.1)–(2.3) в (1.5) и приравнявая выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему уравнений для различных приближений  $u_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ). Значения параметров  $\varepsilon$ ,  $v_i$ ,  $\omega_i$  находятся из специальных условий совместности.

Граничные условия (1.3) в различных приближениях запишутся в виде

$$p_+ - p_0(0) = z_+ g_0, \quad p_0(L) - p_- = z_- g_0 \quad (2.5)$$

$$-p_m(0, t) = z_+ g_m(0, t), \quad p_m(L, t) = z_- g_m(L, t), \quad m=1, 2, \dots \quad (2.6)$$

3. Уравнения (1.5) в первом приближении имеют вид

$$\omega \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = f_u(0|u_1) \quad (3.1)$$

$$f_u(0|u_1) = \left\{ \frac{\Lambda}{\theta} R_1 + \frac{p_1}{\lambda} + \Lambda \left( \frac{R_0^3}{16\mu} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - 2u_0 \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{2\theta u_0}{\lambda \Lambda} \frac{\partial p_1}{\partial x} \right); \right. \\ \left. \frac{R_0^3}{16\mu} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - 2u_0 \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{2\theta u_0}{\lambda \Lambda} \frac{\partial p_1}{\partial x} \right\} \quad (3.2)$$

Заметим, что линейные уравнения (3.1) являются просто следствием линеаризации (1.5). Аналогичные линейные уравнения были получены в статье [6], в которой с их помощью был проведен анализ устойчивости малых возмущений в бесконечной и конечной трубках. В [6] считалось  $dR_0/dx=0$ ,  $dp_0/dx \neq 0$ , поэтому там отсутствовало слагаемое  $(2\theta u_0 / (\lambda \Lambda)) \partial p_1 / \partial x$ . В настоящей работе принята линейная связь между  $dp_0/dx$  и  $dR_0/dx$ .

Найдем решение системы (3.1). Поскольку  $u_1$  действительно, то его можно представить в виде  $u_1 = Z + \bar{Z}$ , где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Считая  $Z = Z_0 \exp[i(\tau - kx)]$ , где  $Z_0$  — постоянная амплитуда, получим дисперсионное уравнение

$$\lambda \omega_*^2 + (-i\eta \theta k^2 - 2\lambda u_0 k + 2\theta u_0 k + i) \omega_* - 4iu_0 k - \eta k^2 = 0 \\ \eta = R_0^3 \lambda \Lambda / (16\mu \theta) \quad (3.3)$$

Разрешая (3.3) относительно  $k$ , получим

$$k_{1,2} = k_0 \pm \Delta k \\ k_0 = -\frac{u_0 [(\lambda - \theta) \omega_* + 2i]}{\eta (1 + i\theta \omega_*)}, \\ \Delta k = \frac{\sqrt{u_0^2 [(\lambda - \theta) \omega_* + 2i]^2 + \eta \omega_* (\lambda \omega_* + i) (1 + i\theta \omega_*)}}{\eta (1 + i\theta \omega_*)} \quad (3.4)$$

Тогда комплексное решение  $Z$  уравнений (3.1) можно представить в виде

$$Z = e^{i(\tau - k_0 x)} (Z_0' e^{-i\Delta k x} + Z_0'' e^{i\Delta k x})$$

Используя граничные условия (2.6) в частном случае  $z_+ = z_- = 0$ , получим уравнение для нахождения собственного значения  $\sigma = i\omega_*$  задачи (3.1) в виде  $\Delta k L = \pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\theta \lambda \eta \sigma^3 + [\eta (\lambda - \theta) + \pi^2 n^2 \eta^2 \theta^2 / L^2] \sigma^2 + (-\eta + 2\pi^2 n^2 \eta^2 \theta / L^2) \sigma + \pi^2 n^2 \eta^2 / L^2 = 0. \quad (3.5)$$

При выводе (3.5) предполагалось

$$u_0^2/(\eta\omega_*) \ll 1, \quad \lambda \sim \theta \quad (3.6)$$

На границе бифуркации, как следует из (3.5) согласно критерию Рауса – Гурвица, справедливы следующие соотношения:

$$\omega_*^2 = 1/(\lambda\theta), \quad \pi^2 n^2 R_0^3 \lambda \Lambda / (16\mu L^2) = 1 \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) неравенство (3.6) эквивалентно (1.7) с точностью до числового множителя. Система устойчива, если

$$\pi^2 n^2 R_0^3 \lambda \Lambda > 16\mu L^2 \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что в качестве бифуркационного параметра  $\nu$  можно выбрать один из  $R_0 - R_{0*}$ ,  $\lambda - \lambda_*$ ,  $\Lambda - \Lambda_*$ ,  $\mu - \mu_*$ ,  $L - L_*$  или их комбинацию, причем  $R_{0*}$ ,  $\lambda_*$ ,  $\Lambda_*$ ,  $\mu_*$ ,  $L_*$  удовлетворяют второму соотношению (3.7). При переходе из устойчивого состояния в неустойчивое с изменением бифуркационного параметра первой возникает бифуркация для  $n=1$ . В этом случае действительное решение уравнений первого приближения (3.1) с учетом (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \{p_1; R_1\} &= a e^{i\tau} (1 + k_{om}x - ik_{od}x) \sin \frac{\pi x}{L} \left\{ 1; \frac{i\omega_*\theta}{\Lambda} \right\} + \bar{Z} \\ k_{om} &= -\frac{16\mu u_0}{\Lambda R_0^3} \theta^2 \omega_*^2, \quad k_{od} = -\frac{16\mu u_0}{\Lambda R_0^3} \theta \omega_* \end{aligned} \quad (3.9)$$

Условие нормировки примем в виде

$$[u_1; Z^c] = \frac{1}{2\pi L} \int_0^{2\pi} \int_0^L (p_1 \bar{p}^c + R_1 \bar{R}^c) dx d\tau = 1$$

причем  $[\bar{Z}; Z^c] = 0$ , где  $Z^c$  – решение сопряженной к (3.1) задачи с учетом (3.6) и (1.7)

$$\begin{aligned} Z^c = (p^c; R^c) &= a^c e^{i\tau} \left\{ (1 + k_{om}x + ik_{od}x) \sin \frac{\pi x}{L}; \quad (1 + k_{om}x + ik_{od}x) \times \right. \\ &\quad \left. \times i\omega_* \lambda \Lambda \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{2\pi \lambda \Lambda u_0}{L} (1 - i\theta \omega_*) \cos \frac{\pi x}{L} \right\} \end{aligned}$$

4. Во втором и последующих приближениях получаем неоднородные линейные уравнения, для разрешимости которых в классе  $2\pi$ -периодических по  $\tau$  функций необходимо и достаточно выполнение условий совместности – ортогональности правых частей уравнений вектору  $Z^c$ . При этом можно показать, что коэффициенты при нечетных степенях  $\varepsilon$  в (2.2), (2.3) равны нулю, т. е.  $\nu_1 = \nu_3 = \dots = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_3 = \dots = 0$ . Тогда уравнения второго приближения запишутся следующим образом:

$$-\omega_* \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + f_u(0|u_2) = -f_{uu}(0|u_1|u_1) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} f_{uu}(0|u_1|u_1) &= 2 \left\{ -\alpha_2 p_1^2 + \Lambda \left( \frac{3R_0^2}{16\mu} R_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{R_0^2}{4\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x} \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{4\theta u_0}{\lambda \Lambda R_0} R_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4u_0}{R_0} R_1 \frac{\partial R_1}{\partial x} \right); \frac{3R_0^2}{16\mu} R_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{R_0^2}{4\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x} \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{4\theta u_0}{\lambda \Lambda R_0} R_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{4u_0}{R_0} R_1 \frac{\partial R_1}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

Выражение для функции  $f_u(0|u_2)$  в (4.1) дается (3.2), если  $u_1$  заменить на  $u_2$ .

Параметры  $\omega_2$  и  $\nu_2$  определяются из условий совместности для правой части уравнений третьего приближения

$$-3\omega_2 i + 3\nu_2 \sigma_\nu + 3[f_{uu}(0|u_1|u_2); Z^c] + [f_{uuu}(0|u_1|u_1|u_1); Z^c] = 0 \quad (4.2)$$

$$f_{uu}(0|u_1|u_2) = \{-2\alpha_2 p_1 p_2 + \Lambda \varphi; \varphi\}$$

$$\varphi = \frac{3R_0^2}{16\mu} \left( R_2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + R_1 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \right) + \frac{R_0^2}{4\mu} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x} \frac{\partial R_2}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{4\theta u_0}{\lambda \Lambda R_0} \left( R_2 \frac{\partial p_1}{\partial x} + R_1 \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) - \frac{4u_0}{R_0} \left( R_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} + R_2 \frac{\partial R_1}{\partial x} \right)$$

$$f_{uuu}(0|u_1|u_1|u_1) = \left\{ -6\alpha_3 p_1^3 + 3\Lambda R_0 \left( \frac{1}{\mu} R_1 \frac{\partial R_1}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3}{8\pi} R_1^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{4\theta u_0}{\lambda \Lambda R_0^3} R_1^2 \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{4u_0}{R_0^3} R_1^2 \frac{\partial R_1}{\partial x} \right\};$$

$$3R_0 \left( \frac{1}{\mu} R_1 \frac{\partial R_1}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{3}{8\mu} R_1^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{4\theta u_0}{\lambda \Lambda R_0^3} R_1^2 \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{4u_0}{R_0^3} R_1^2 \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) \}$$

Из формулы (4.2) следует, что выбор бифуркационного параметра  $\nu$  влияет лишь на одно слагаемое  $3\nu_2 \sigma_\nu$ . При этом производную  $\sigma_\nu$  от собственного значения  $\sigma$  по  $\nu$  на границе бифуркации можно вычислить с помощью (3.5). Если в качестве бифуркационного параметра взять вязкость, т. е.  $\nu = \mu - \mu_*$ , где  $\mu_* = \pi^2 \lambda \Lambda R_0^3 / (16L^2)$ , то  $\sigma_\nu = (1 - i\lambda\omega_*) / (2\lambda\mu_*)$ . Вычисление  $[f_{uuu}(0|u_1|u_1|u_1); Z^c]$  в (4.2) при  $u_0 = 0$  дает

$$a\bar{a}^c = 1, \quad [f_{uuu}(0|u_1|u_1|u_1); Z^c] = a^2 \left( -\frac{27}{4} \alpha_3 - \frac{3\pi^2 \theta^2 \omega_*^2 (1 - i\lambda\omega_*) R_0}{64\mu \Lambda L^2} \right)$$

Выражение  $[f_{uu}(0|u_1|u_2); Z^c]$  довольно громоздко даже при  $u_0 = 0$ .

Считая коэффициент кубической нелинейности статической характеристики трубки  $\alpha_3$  достаточно большим (в  $[f_{uu}(0|u_1|u_2); Z^c]$  величина  $\alpha_3$  не входит)

$$\alpha_3 \gg \pi^2 R_0 / (144\mu \Lambda L^2)$$

$$[f_{uuu}(0|u_1|u_1|u_1); Z^c] \gg [f_{uu}(0|u_1|u_2); Z^c]$$

соотношение (4.2) можно упростить

$$-\omega_2 i + \nu_2 \sigma_\nu = 9\alpha_3 a^2 / 4 \quad (4.3)$$

Принимая  $\nu = \mu - \mu_*$ , из действительной части (4.3) получим  $\nu_2 = 9\lambda\mu_* \alpha_3 a^2 / 2 > 0$  и приближенно с точностью до членов четвертого порядка имеем следующее выражение для квадрата амплитуды распределенных автоколебаний в случае  $u_0 = 0$ :

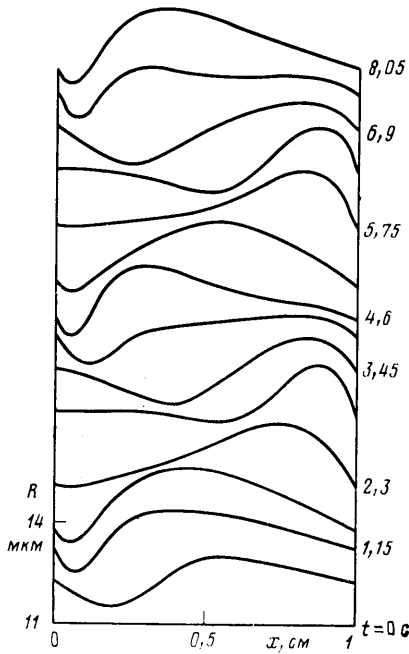
$$(ae)^2 = 4(\mu - \mu_*) / (9\lambda\mu_* \alpha_3) \quad (4.4)$$

В данном случае увеличение вязкости протекающей жидкости приводит к неустойчивости (возбуждению волновых и колебательных движений). Формально это аналогично случаю волн отрицательной энергии. Из мнимой части (4.3) получаем поправку к частоте

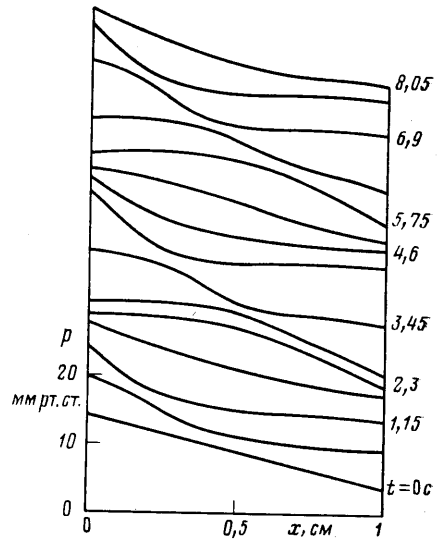
$$\omega = \omega_* - (\mu - \mu_*) \omega_* / (2\mu_*)$$

При дальнейшем увеличении бифуркационного параметра  $\nu$  (дальнейшем уходе от границы бифуркации) необходимо учитывать следующие приближения по  $\epsilon$ , что довольно громоздко. Пример численного решения (1.1), (1.2) показан на фиг. 1.2 при следующих значениях параметров:  $\alpha_0^\circ = 2,2 \cdot 10^4$  дин/(см<sup>2</sup>·с);  $\alpha^\circ = -1,2 \cdot 10^8$  дин/(см<sup>3</sup>·с);  $\alpha_1^\circ = 38$  с<sup>-1</sup>;  $\alpha_2^\circ = -3,4 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/(дин·с);  $\alpha_3^\circ = 8,9 \cdot 10^{-8}$  см<sup>4</sup>/(дин<sup>2</sup>·с);  $\Lambda = 4,5 \cdot 10^7$  дин/см<sup>3</sup>;  $\mu = 0,03$  г/(см·с). При дальнейшем увеличении  $\nu$  решение выходит на режим квазистационарных волн, рассмотренных в [3, 9].

5. Рассмотрим теперь вопрос об авторегуляции расхода жидкости через трубку. Если система находится в устойчивой области, то авторегуляция расхода, заключающаяся в примерном постоянстве расхода жидко-



Фиг. 1



Фиг. 2

сти через поперечное сечение трубки при изменении перфузионного давления, обеспечивается наличием падающего участка на статической кривой давление — радиус: при увеличении давления в трубке ее радиус уменьшается. Если система находится в неустойчивой области и возникают исследованные выше распределенные автоколебания, то в выражение для среднего за период колебаний расхода жидкости будут входить параметры этих автоколебаний. При этом за счет колебаний вклад в общий расход может быть либо отрицательным, либо положительным, либо равным нулю в зависимости от параметров задачи.

Действительно, расход  $g$  через трубку можно представить в виде ряда по степеням  $\varepsilon$  (см. (2.4)). Основной интерес представляет прокачивающий эффект  $G_2$ , т. е. дополнительный к  $g_0$  вклад в расход  $g$  за период установившихся колебаний. Поскольку в  $g_1$  входят лишь линейные члены, то усреднение за период (одинарные угловые скобки) дает

$$\langle g_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1 d\tau = 0$$

Первый отличный от нуля вклад связан с  $g_2$

$$G_2' = \frac{\varepsilon^2}{2} g_2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \left( -\frac{\pi R_0^4}{8\mu_*} \frac{\partial p_2}{\partial x} + 4\pi R_0 u_{0*} R_2 - \frac{\pi R_0^3}{\mu_*} R_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + 12\pi u_{0*} R_1^2 \right) \quad (5.1)$$

Поскольку можно показать, что  $\langle g_2 \rangle = \text{const}$  не только по  $t$ , но и по  $x$ , то для вычисления  $G_2 = \langle G_2' \rangle$  удобно усреднить (5.1) еще и по длине трубки, воспользоваться граничными условиями для  $p_2$  (2.6) с учетом  $z_+ = z_- = 0$  и усредненными по периоду уравнениями второго приближения для  $u_2$ . В результате получим следующее выражение для прокачивающего эффекта:

$$G_2 = \frac{2\pi\theta u_{0*} (2\alpha_2 \lambda \Lambda R_0 - 1)}{\lambda \Lambda^2} \varepsilon^2 a^2 \quad (5.2)$$

где  $\varepsilon^2 a^2$  дается (4.4).

Из (5.2) видно, что при  $2\alpha_2\lambda\Lambda R_0 > 1$  имеется прокачивающий эффект, а при  $2\alpha_2\lambda\Lambda R_0 < 1$  — запирающий. Необходимое условие прокачивающего эффекта — положительность коэффициента квадратичной нелинейности  $\alpha_2$  статической характеристики давление — радиус трубки (см. (1.6)). Из (5.2) следует, что если  $u_{0*} = 0$ , т. е. отсутствует стационарный поток (а следовательно, нет и стационарного градиента радиуса трубки), то никакого насосного эффекта нет.

6. Исследуем отдельно на предмет наличия бесклапанного насосного эффекта частный случай отсутствия стационарного потока, т. е. будем считать, что  $dR_0/dx = dp_0/dx = 0$  при общих граничных условиях в виде (2.5), (2.6) при  $g_0 = 0$  и  $z_{\pm} \neq 0$ ,  $p_{\pm} \neq 0$ . В этом случае величина  $G_2'$  будет определяться более простым, чем (5.1), выражением

$$G_2' = - \frac{\pi \varepsilon^2}{16\mu_*} \left( R_0^4 \frac{\partial p_2}{\partial x} + 8R_0^3 R_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) \quad (6.1)$$

Усредним (6.1) по времени  $\tau$  за период  $2\pi$  и по длине  $L$  трубки

$$G_2 = \frac{1}{2\pi L} \int_0^{2\pi} \int_0^L G_2' dx d\tau = - \frac{\pi \varepsilon^2}{16\mu_*} \left( \frac{R_0^4}{L} (\langle p_2(x=L) \rangle - \langle p_2(x=0) \rangle) + 8R_0^3 \left\langle \left\langle R_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} \right\rangle \right\rangle \right) \quad (6.2)$$

где двойные угловые скобки обозначают усреднение по периоду  $2\pi$  и длине трубки  $L$ . С учетом (2.6) выражение (6.2) перепишем следующим образом:

$$G_2 = - \frac{\pi \varepsilon^2 R_0^3}{2\mu_*} \left\langle \left\langle R_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} \right\rangle \right\rangle \left/ \left( 1 + \frac{\pi R_0^4 (z_+ + z_-)}{8\mu_* L} \right) \right. \quad (6.3)$$

Решение уравнений (3.1) при  $u_0 = 0$  имеет вид (ср. с (3.9))

$$\{p_1; R_1\} = e^{i\tau} (C_1 e^{-ikx} + C_2 e^{ikx}) \left\{ 1; - \frac{k^2 R_0^3}{16i\omega_* \mu_*} \right\} + \bar{Z} \quad (6.4)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные, а величина  $k$  связана с  $\omega_*$  (см. (3.4))

$$k = \sqrt{\omega_* (\lambda \omega_* + i) / [\eta_* (i\theta \omega_* + 1)]} \quad (6.5)$$

Граничные условия (2.6) дают трансцендентное уравнение для определения  $k$ , следовательно, и  $\omega_*$

$$f(k) = \operatorname{tg} kL - \frac{k(\zeta_+ + \zeta_-)}{k^2 - \zeta_+ \zeta_-} = 0, \quad \zeta_{\pm} = \frac{8\mu_*}{\pi R_0^4 z_{\pm}} \quad (6.6)$$

причем  $C_1 = C_2 (ik - \zeta_+) / (ik + \zeta_+)$ . Заметим, что (6.6) является частным случаем уравнения, полученного в [6].

Переходя на комплексную плоскость и пользуясь принципом аргумента, можно показать, что число нулей  $f(k)$  совпадает с числом действительных нулей. Следовательно, уравнение (6.6) имеет лишь действительные корни. Из действительности  $k$  и (6.5) получаем

$$\omega_* = \sqrt{1/(\lambda\theta)}, \quad k^2 = 16\mu_*/(\lambda\Lambda R_0^3)$$

причем на границе бифуркации справедливо соотношение

$$\operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{16\mu_*}{\lambda\Lambda R_0^3}} L \right) = \frac{\sqrt{16\mu_*/\lambda\Lambda R_0^3} (\zeta_+ + \zeta_-)}{16\mu_*/\lambda\Lambda R_0^3 - \zeta_+ \zeta_-}$$

которое при  $\zeta_{\pm} \rightarrow 0$ , либо при  $\zeta_{\pm} \rightarrow \infty$  переходит во второе соотношение (3.7).

Таким образом, выражение для частоты колебаний  $\omega_* = 1/\sqrt{\lambda\theta}$  довольно универсально — оно не зависит от  $u_0$  (при малых  $u_0^2$ ) и не зависит от граничных значений  $z_{\pm}$  (при  $u_0 = 0$ ). Поскольку между  $R_1$  и  $\partial p_1/\partial x$  при  $u_0 = 0$  имеется сдвиг по фазе  $90^\circ$  (см. (6.4)), то  $\langle R_1 \partial p_1/\partial x \rangle = 0$ . Следовательно, в (6.3) получаем  $G_2 = 0$  при любых  $z_+$  и  $z_-$ , т. е. какого-либо насосного эффекта в данном случае нет.

Заметим, что в [10] показана возможность насосного эффекта в режиме вынужденных колебаний, когда система находилась в устойчивой области.

7. В данной работе получены уравнения для отклонений от стационарного состояния. Вблизи границы бифуркации решена нелинейная задача и найдено установившееся колебательное распределенное изменение радиуса и давления, отвечающее от стационарного в точке потери устойчивости последнего. При наличии стационарного потока получена величина прокачивающего и запирающего эффектов, а также условия их существования. Показано, что при отсутствии стационарного потока, даже когда гидравлические сопротивления на концах трубки различны, данных эффектов нет. Полученные результаты полезны при изучении вопросов, связанных с проблемами течения крови в микрососудах и перистальтического прокачивания [11].

Наблюдаемые в экспериментах на артериальных микрососудах периоды и амплитуды колебаний [1, 2] близки к оценкам из полученных выше формул и численных расчетов. Заметим, что в данной работе, как и в предыдущих [3–7, 9], рассмотрен лишь один из возможных источников появления распределенных автоколебательных процессов — падающий участок на статической кривой давление — радиус.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Colantuoni A., Bertuglia S., Intaglietta M. Quantitation of rhythmic diameter changes in arterial microcirculation.— Amer. J. Physiol., 1984, v. 246, № 4, pt 2, p. H508–H517.
2. Colantuoni A., Bertuglia S., Intaglietta M. The effects of  $\alpha$ - or  $\beta$ -adrenergic receptor agonists and antagonists and calcium entry blockers on the spontaneous vasomotion.— Microvasc. Res., 1984, v. 28, № 2, p. 143–158.
3. Клочков Б. Н., Рейман А. М., Степанянц Ю. А. Нестационарные течения жидкости в трубках из вязкоупругого активного материала.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 3, с. 94–102.
4. Скобелева И. М. О возможных режимах течения ньютоновской жидкости в трубках из активного материала.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 3, с. 88–93.
5. Киреева Е. Е., Клочков Б. Н. Нелинейная распределенная теория кровеносных сосудов с мышечной стенкой.— В кн.: Тр. I Всесоюз. симпози. «Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика». Кутаиси — Ткибули: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1985, с. 281–284.
6. Регирер С. А., Руткевич И. М. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Волны малой амплитуды.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1, с. 45–53.
7. Руткевич И. М. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Стационарные нелинейные волны.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4, с. 86–95.
8. Iooss G., Joseph D. D. Elementary stability and bifurcation theory. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1980. (Рус. пер.: Иоосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 301 с.)
9. Клочков Б. Н. Автоволновые процессы в кровеносных сосудах мышечного типа.— В кн.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Ин-т прикладной физики АН СССР, 1981, с. 233–242.
10. Киреева Е. Е., Регирер С. А. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Вынужденные колебания.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4, с. 94–99.
11. Регирер С. А. Квазиодномерная теория перистальтических течений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 5, с. 89–97.

Москва  
Бор

Поступила в редакцию  
29.IV.1985