МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1986

УДК 532.5.013.12:537.84:519.63

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ПОКРЫТОГО ТОНКИМ СЛОЕМ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

ПОЛЕВИКОВ В. К.

Для уменьшения сопротивления твердых тел в потоке вязкой жидкости предлагается наносить на обтекаемую поверхность слой магнитной жидкости, которая может удерживаться с помощью магнитного поля, играя роль своеобразной смазки между внешним течением и телом [1, 2]. В [1] предпринималось теоретическое исследование гидродинамического сопротивления цилиндрического проводника с током, покрытого равномерным слоем магнитной жидкости, при малых числах Рейнольдса. Чтобы упростить уравнения движения, для набегающего потока вводилось приближение Озеена, а для магнитной жидкости – приближение Стокса [3]. В рамках этого подхода найдено точное аналитическое решение, из которого следует, что при числах Рейнольдса $\mathrm{Re}\ll 1$ сопротивление цилиндра может значительно уменьшиться, если вязкость его магнитожидкостной оболочки много меньше вязкости потока.

Основная цель настоящей работы – на примере той же задачи выяснить, как магнитожидкостное покрытие влияет на гидродинамическое сопротивление при числах Рейнольдса $1\leqslant \mathrm{Re}\leqslant 10^2-10^3$, т. е. в условиях отрывного течения. Упрощения, связанные с пренебрежением нелинейными инерционными членами в уравнении Навье – Стокса, в этом случае неприемлемы, так что получить решение можно только численными методами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный поток вязкой немагнитной жидкости, движущийся прямолинейно с постоянной скоростью U, обтекая в поперечном направлении длинный цилиндрический проводник конечного радиуса R. На твердую поверхность цилиндра нанесем слой магнитной жидкости, не смешивающейся с жидкостью внешнего течения. Постоянный ток I, текущий по проводнику, создает неоднородное магнитное поле, которое препятствует сносу магнитожидкостного покрытия.

Если $U=0$, а сила тока I достаточно велика, граница раздела жидкостей принимает форму кругового цилиндра радиуса $a>R$, коаксиального с проводником [2]. Ясно, что с ростом скорости U круговая форма будет искажаться. Согласно [1], этой деформацией можно пренебречь, если магнитостатическое давление в слое значительно превышает динамическое давление в набегающем потоке, т. е. выполняется условие

$$\mathrm{Re}\ll I\sqrt{\mu_0\chi}/2\pi\delta\nu_2\sqrt{\rho_2} \tag{1.1}$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, χ – магнитная восприимчивость покрытия, ρ_2 и ν_2 – плотность и кинематическая вязкость потока, $\delta=a/R$, $\mathrm{Re}=UR/\nu_2$ – число Рейнольдса. Если, к примеру, взять $I=100$ А, $\delta=1{,}1$, $\rho_2=10^3$ кг/м^3, $\nu_2=10^{-6}$ м^2/с, $\chi=2$, то условие (1.1) справедливо при $\mathrm{Re}\ll 725$. Так что вполне реальна ситуация, когда поверхность магнитной жидкости остается круговым цилиндром даже при Re порядка 100. В этом случае магнитное поле не оказывает влияния на движение в кольцевом слое – его роль сводится к фиксации круговой границы раздела [1].

Пусть для определенности поток движется в горизонтальном направлении слева направо. Считаем задачу плоской, симметричной и стационарной и введем систему полярных координат с полюсом на оси цилиндра. Стационарные уравнения движения обеих жидкостей, приведенные к функции тока и завихренности, различаются лишь коэффициентами кинематической вязкости. Запишем их сразу в безразмерном виде, пользуясь при необходимости индексами 1 и 2 соответственно для магнитной и немагнитной жидкостей

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}-\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}=\frac{\mu}{\lambda\,\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta^2}\right] \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}-\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta^2}\right] \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\varphi r=0 \tag{1.4}$$

$$v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad v_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{1.5}$$

Здесь ψ — функция тока, φ — завихренность, r и θ — полярные координаты, $\mu=\eta_1/\eta_2$ — отношение динамических вязкостей, $\lambda=\rho_1/\rho_2$ — отношение плотностей, v_r и v_θ — компоненты скорости. Переход от безразмерных переменных к размерным (отметим последние штрихами) осуществляется по формулам

$$r'=rR,\quad v_r'=v_rU,\quad v_\theta'=v_\theta U$$

$$\psi'=\psi UR,\quad \varphi'=\varphi U/R$$

Будем считать границу раздела круговой. Тогда движение магнитной жидкости описывается уравнениями (1.2), (1.4) в кольце $1\leqslant r\leqslant\delta$, а внешнее течение — уравнениями (1.3), (1.4) в области $\delta\leqslant r\leqslant\infty$. Предполагая решение симметричным, изменение полярного угла ограничим интервалом $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

На твердой поверхности примем условия прилипания $v_r=v_\theta=0$; при $\theta=0$, π — условия симметрии $v_\theta=0$, $\partial v_r/\partial\theta=0$; на достаточно большом расстоянии, $r=r_\infty$,— отсутствие возмущений в вектор скорости $v_r=\cos\theta$, $v_\theta=-\sin\theta$, из которых, согласно (1.4) и (1.5), имеем

$$\psi=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial r}=0\qquad (r=1) \tag{1.6}$$

$$\psi=0,\quad \varphi=0\quad (\theta=0;\ \pi) \tag{1.7}$$

$$\psi=r_\infty\sin\theta,\quad \varphi=0\quad (r=r_\infty) \tag{1.8}$$

На поверхности раздела потребуем непрерывности скорости, непроницаемости поверхности, равенства касательных напряжений, что с помощью (1.4), (1.5) можно записать в виде

$$\psi=0,\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r}=\frac{\partial\psi_2}{\partial r},\quad \mu\left(\varphi_1+\frac{2}{\delta}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)=\varphi_2+\frac{2}{\delta}\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\quad (r=\delta) \tag{1.9}$$

Уравнения (1.2)—(1.4) вместе с краевыми условиями (1.6)—(1.9) образуют стационарную математическую модель задачи. Определяющими параметрами являются: число $\mathrm{Re}=UR/\nu_2$ и отношения $\mu=\eta_1/\eta_2$, $\lambda=\rho_1/\rho_2$, $\delta=a/R$.

Для плоской задачи обтекания цилиндра в случае $\mathrm{Re}<100$ стационарная постановка вполне уместна, так как в указанном диапазоне чисел Рейнольдса нестационарное численное решение с течением времени имеет тенденцию устанавливаться [4–6]. Главное преимущество стационарного подхода — в возможности применения специальных итерационных методов, позволяющих многократно сократить время решения по сравнению с методом установления. Среди работ, выполненных в рамках этого подхода по обтеканию твердого цилиндра, отметим [7, 8]. В первой из них рассмотрен интервал $0{,}5\leqslant\mathrm{Re}\leqslant250$, а второй — $2{,}5\leqslant\mathrm{Re}\leqslant50$.

Сила сопротивления цилиндра радиуса a, отнесенная к единице длины цилиндра, определяется формулой [3]

$$W' = \frac{2\eta_2^2 \delta \operatorname{Re}}{\rho_2 R} \int_0^\pi \left[2\frac{\partial v_{2r}}{\partial r}\cos\theta + \left(\frac{\partial p_2}{\partial \theta} - \frac{\partial v_{2\theta}}{\partial r} + \frac{v_{2\theta}}{\delta} \right) \sin\theta \right]_{r=\delta} d\theta$$

где p_2 — безразмерное давление в потоке ($p_2 = p_2' R / U\eta_2$). Применяя интегрирование по частям и учитывая, что на границе раздела азимутальная составляющая уравнения Навье — Стокса представима в виде

$$\frac{\partial p_2}{\partial \theta} = -\frac{\operatorname{Re}}{2}\frac{\partial v_{2\theta}^2}{\partial \theta} + \delta\frac{\partial^2 v_{2\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial^2 v_{2\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_{2\theta}}{\partial r} - \frac{v_{2\theta}}{\delta}$$

после несложных преобразований получим следующее выражение для безразмерной силы сопротивления цилиндра, покрытого кольцевым слоем магнитной жидкости:

$$W = W' \frac{\rho_2 R}{\eta_2^2} = \delta \operatorname{Re} \int_0^\pi \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right)^2 \cos\theta + 2\delta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\varphi_2}{r} \right) \sin\theta \right]_{r=\delta} d\theta \tag{1.10}$$

Если $W_0(\operatorname{Re}_0)$ — сопротивление цилиндра без покрытия, соответствующее $\operatorname{Re} = \operatorname{Re}_0$, то имеет место простая зависимость

$$W_0(\operatorname{Re}_0) = \delta \lim_{\mu \to \infty} W(\operatorname{Re}_0/\delta) \tag{1.11}$$

Решение сформулированной задачи находилось численно по методу сеток. В области $\delta \leqslant r \leqslant r_\infty$ сетка по радиусу выбиралась неравномерной, в остальных случаях — равномерной. Для уравнений (1.2) — (1.4) составлялась консервативная монотонная разностная схема, имеющая второй порядок аппроксимации на регулярном шаблоне и первый — на нерегулярном. Она является простым обобщением схемы, приведенной в [9], и на равномерной сетке с ней совпадает. Схема обладает высокими стабилизирующими свойствами и обеспечивает выполнение в сеточной области физических законов сохранения. Последнее означает, что она более правильно отражает качественные особенности решения, чем обычные неконсервативные схемы.

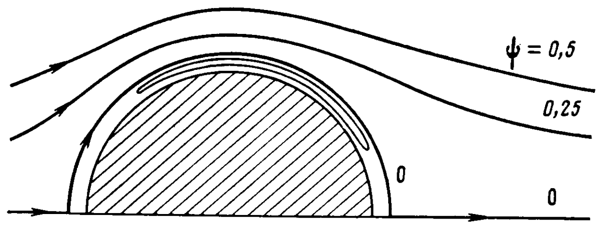
Завихренность на твердой стенке задавалась приближенным условием Вудса [9], на линии раздела — из условий сопряжения (1.9), аппроксимированных с вторым порядком с учетом уравнения (1.4). Во всех остальных случаях граничные значения для завихренности и функции тока определялись по явным формулам, имеющимся среди (1.6) — (1.9).

Для решения полученной разностной задачи применялся итерационно-релаксационный метод зейделевского типа с автоматическим выбором параметров релаксации [10].

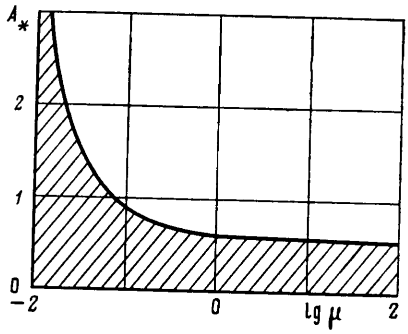
Расчеты выполнялись на машине БЭСМ-6. Результаты, представленные в работе, получены при $r_\infty = 20$, числе разбиений сетки $k = 40$ по углу θ, $m = 10$ по радиусу в слое покрытия, $n = 20$ по радиусу в области внешнего кольца. Для контроля точности избранные варианты задачи пересчитывались при $r_\infty = 10$ и 40, $m = 5$ и 20, $n = 30$ и 40.

2. Результаты. Все расчеты производились при $\delta = 1{,}1$ и $\lambda = 1$. Относительная вязкость μ и число Рейнольдса подробно варьировались в диапазонах $0{,}01 \leqslant \mu \leqslant 10$, $1 \leqslant \operatorname{Re} \leqslant 100$; в отдельных случаях рассматривались также $\mu = 10^2$, 10^3, $\operatorname{Re} = 0{,}1$; $0{,}5$; 10^3.

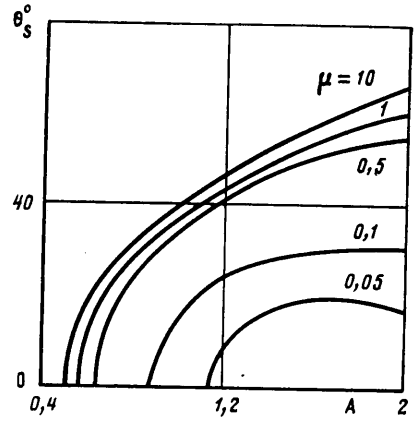
Фигуры 1—3 показывают, что нанесение на поверхность цилиндра слоя магнитной жидкости может существенно изменить структуру обтекающего потока. На фиг. 1 изображена картина течения как внутри слоя, так и вне его при $\operatorname{Re} = 100$, $\mu = 0{,}01$. На оси возвратного движения магнитной жидкости, отмеченной точкой, $\psi = -0{,}02$; близлежащая к ней линия тока соответствует $\psi = -0{,}01$. График, приведенный на фиг. 2, описывает влияние параметра вязкости μ на величину $A_* = \lg \operatorname{Re}_*$, где Re_* — критическое значение числа Рейнольдса, отвечающее возникновению отрывного вихря за цилиндром; заштрихована область безотрывного течения. О величине зоны отрыва позволяет судить отрывной угол θ_s — азимутальная



Фиг. 1



Фиг. 2



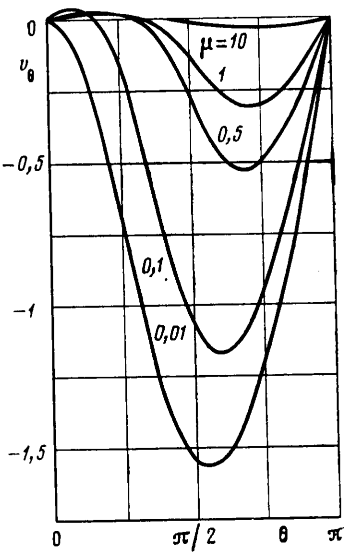
Фиг. 3

координата точки отрыва на линии раздела. Зависимость θ_s от параметров μ и $A=\lg \mathrm{Re}$ отражена на фиг. 3.

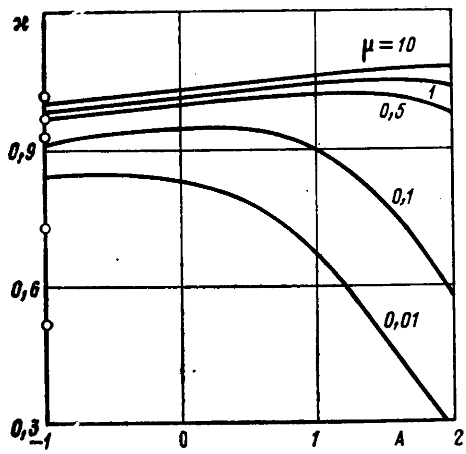
Магнитожидкостное покрытие может служить эффективным стабилизатором внешнего потока. Возвратное движение, неизменно происходящее в кольцевом слое, способствует уменьшению перепада давления на поверхности раздела, тем самым ухудшая условия для появления и существования отрыва. Чем меньше вязкость оболочки, тем заметнее ее воздействие. Уменьшение μ вызывает рост критического числа Re_*, особенно стремительный при $\mu<1$, т. е. начало образования отрыва все более затягивается. В закритической области $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_*$ наблюдается затухание следа за цилиндром, вплоть до его полного исчезновения при достаточно малом μ. Любопытно, что в случае $\mu=0{,}01$ отрыв не происходит даже при $\mathrm{Re}=10^3$. По мере увеличения числа Рейнольдса темпы роста отрывного угла замедляются, однако при малых μ θ_s устанавливается раньше. Оказалось, что в случае маловязких покрытий повышение интенсивности потока лишь вначале приводит к увеличению зоны отрыва, а в дальнейшем как ширина, так и длина следа убывают. Это подтверждается графиком на фиг. 3 для $\mu=0{,}05$.

На фиг. 4 вычерчено семейство графиков, характеризующих интенсивность циркуляции на поверхности раздела $r=\delta$, показано распределение тангенциальной составляющей скорости v_θ на промежутке $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ при $\mathrm{Re}=100$. Положительные значения v_θ соответствуют зоне отрывного течения. Отметим, что максимальная скорость достигается на участке $\pi/2<\theta<3\pi/4$; при $\mu\to 0$ точка максимума смещается к $\theta=\pi/2$, при $\mu\to\infty$ — к $\theta=3\pi/4$. И увеличение числа Рейнольдса и уменьшение вязкости магнитной жидкости обеспечивают нарастание скорости на поверхности раздела. Причем она может значительно превышать скорость потока на «бесконечности», где $v=1$.

Выясним вопрос о влиянии магнитожидкостного покрытия на гидродинамическое сопротивление цилиндра. Для этого рассмотрим отношение



Фиг. 4



Фиг. 5

$\varkappa = W/W_0$, показывающее, во сколько раз изменяется сопротивление после нанесения покрытия. На фиг. 5 изображены графики зависимости $\varkappa$ от числа Рейнольдса ($A = \lg \mathrm{Re}$) для разных μ. Поведение кривых отражает те перемены, которые происходят в структуре обтекающего потока. Наиболее значительное падение сопротивления имеет место в области $\mathrm{Re}>3$, характеризующейся наличием отрывного вихря за твердым цилиндром ($\delta=1$). Чем меньшей оказывается зона отрыва в результате наложения покрытия, тем сильнее падает сопротивление. Важно, что с ростом интенсивности движения эффект снижения сопротивления становится весомее. Хотя это касается главным образом малых значений μ, тенденция к уменьшению отношения $\varkappa$ по мере нарастания Re заметна даже при $\mu=1$. Не исключено, что при более высоких числах Рейнольдса эффективными окажутся не только маловязкие покрытия. Конечно, переход в область высоких Re требует учета деформации границы раздела, однако кажется справедливым предположение, высказанное в работе [1], что при этом следует ожидать дополнительной потери сопротивления. Впрочем, исчерпывающий ответ на эти вопросы может дать только реальный эксперимент.

В заключение обсудим точность приведенных результатов. Сравнение с данными эксперимента [11], измеренными для $1 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 50$, показало, что вычисленные значения W_0 превышают экспериментальные на 5—12%. По-видимому, это справедливо и для W, так как предпринятое варьирование шагов сетки и радиуса «бесконечности» r_∞ почти никак не отразилось на величине отношения $\varkappa$. На фиг. 5 нанесены кружками значения $\varkappa$, вытекающие из аналитического решения [1] при $\mathrm{Re}=0{,}1$ и $\mu=10$; 1; 0,5; 0,1; 0,01 (сверху вниз). Сопоставляя их с численными результатами, находим хорошее количественное согласование лишь при $\mu \geqslant 1$. В области $\mu<1$ результаты расчета располагаются выше теоретических, а при $0{,}01 \leqslant \mu \leqslant 0{,}1$ они отличаются друг от друга весьма ощутимо. Вероятно, в уравнениях движения магнитной жидкости в этом случае велика роль инерционных членов, которыми пренебрегалось в [1]. Свидетельством удовлетворительной точности численного решения может в какой-то степени служить тот факт, что появление следа за цилиндром без покрытия, происходящее при $3 < \mathrm{Re}_* < 4$, полностью соответствует данным [8]. В случае отсутствия оболочки обнаружено также согласие с работами [4, 5, 7] относительно величины отрывного угла θ_s.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Краков М. С.* Управление отрывом потока с помощью намагничивающейся жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 3, с. 10—14.
2. *Баштовой В. Г., Берковский Б. М., Вислович А. Н.* Введение в термомеханику магнитных жидкостей. М.: ИВТАН, 1985. 188 с.
3. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
4. *Thoman D. C., Szewczyk A. A.* Time-dependent viscous flow over a circular cylinder.— Phys. Fluids, 1969, v. 12, № 12, p. 76—86.
5. *Son J. S., Hanratty T. J.* Numerical solution for the flow around a cylinder at Reynolds numbers of 40, 200 and 500.— J. Fluid Mech., 1969, v. 35, № 2, p. 369—386.
6. *Гущин В. А.* Численное исследование обтекания тела конечного размера потоком несжимаемой вязкой жидкости.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1980, т. 20, № 5, с. 1333—1341.
7. *Hamielec A. E., Raal J. D.* Numerical studies of viscous flow around circular cylinders.— Phys. Fluids, 1969, v. 12, № 1, p. 11—17.
8. *Dennis S. C. R., Chang G.-Z.* Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100.— J. Fluid Mech., 1970, v. 42, № 3, p. 471—489.
9. *Полевиков В. К., Фертман В. Е.* Исследование теплообмена через горизонтальный кольцевой слой магнитной жидкости при охлаждении цилиндрических проводников с током.— Магнитная гидродинамика, 1977, № 1, с. 15—21.
10. *Полевиков В. К.* Применение метода релаксации для решения стационарных разностных задач конвекции.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, т. 21, № 1, с. 127—138.
11. *Tritton D. J.* Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers.— J. Fluid Mech., 1959, v. 6, № 4, p. 547—567.

Минск

Поступила в редакцию
17.VI.1985