**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1986**

УДК 532.546

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФРОНТАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ МЕЖФАЗНОГО МАССООБМЕНА И ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

ЗАЗОВСКИЙ А. Ф.

Для устойчивости фронта вытеснения одной жидкости другой по отношению к малым возмущениям градиент давления должен убывать при переходе через фронт в направлении вытеснения. Первоначально этот критерий был установлен для поршневого вытеснения жидкостей [1, 2], позже – в случае двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей для фронта вытеснения, отвечающего скачку насыщенности в задаче Баклея – Леверетта [3, 4]. Ниже показано, что тот же самый критерий устойчивости остается справедливым для фильтрационных процессов, сопровождающихся межфазным массообменом и фазовыми переходами [5, 6]. Такого рода процессы имеют место при вытеснении нефти из пластов с применением активного физико-химического или теплового воздействия [7] и обычно сводятся к закачке в пласт оторочки (конечной порции) реагента с последующим нагнетанием вытесняющего агента (воды или газа). Обьемы оторочек могут быть достаточно малы, особенно при использовании дорогих реагентов, и потому вопросы устойчивости вытеснения приобретают в этих случаях первостепенное значение. Для указанных процессов активного воздействия на пласт характерно образование в зоне вытеснения многоволновых структур, которым в крупномасштабном приближении (т. е. в пренебрежении капиллярными, диффузионными и неравновесными эффектами) соответствуют разрывные распределения насыщенностей фаз и концентраций компонентов [5–10]. Показано, что условие устойчивости плоского фронта, отвечающего некоторому скачку, не зависит от типа скачка [11, 12] и при постоянстве суммарного потока определяется, как и в более простых случаях, соотношением между суммарными подвижностями фаз на скачке. Увеличение суммарного потока в направлении вытеснения оказывает дестабилизирующее, а уменьшение – стабилизирующее влияние на устойчивость фронта. Обзор других направлений исследования устойчивости фильтрационных течений дан в [13].

Процесс вытеснения нефти с применением активного воздействия в простейшем случае моделируется фильтрацией трехкомпонентной системы, состоящей из вытесняемого компонента (нефти), основного вытесняющего или нейтрального компонента (воды или газа) и активного компонента, под которым понимается вещество или физический фактор, например температура, переносимые потоком и оказывающие влияние на вязкости фаз, фазовые проницаемости и условия фазового равновесия. Обозначим через s_j насыщенность и $\mathbf{v}_j$ скорость фильтрации j-й фазы ($j=1,\ldots,n$), а через X_{ij} – массовую концентрацию i-го компонента в j-й фазе, считая, что число фаз n равно 1, 2 или 3, а индекс i принимает значения 1 для нейтрального, 2 для вытесняемого и 3 для активного компонентов. Будем считать плотности ρ_j и вязкости μ_j фаз, а также условия фазового равновесия не зависящими от давления p. Движение такой трехкомпонентной системы в пористой среде описывается уравнениями закона фильтрации фаз и сохранения в потоке каждого компонента [5, 6]

$$\mathbf{v}_j=-k(f_j/\mu_j)\nabla p \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{1}$$

$$m\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{j=1}^{n}\rho_j s_j X_{ij}+A_i\Big)+\operatorname{div}\Big(\sum_{j=1}^{n}\rho_j\mathbf{v}_j X_{ij}\Big)=0 \qquad (i=1,2,3) \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j=1, \qquad \sum_{i=1}^{3} X_{ij}=1 \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{3}$$

$$\rho_j=\rho_j(X_{1j}, X_{2j}, X_{3j}), \qquad \mu_j=\mu_j(X_{1j}, X_{2j}, X_{3j}) \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{4}$$

Здесь t — время; m — пористость; k — проницаемость; f_j — относительная проницаемость для j-й фазы (при $n=1$ формально полагаем $f_j=1$); mA_i — масса i-го компонента, сорбированного в единице объема пористой среды; далее будем считать, что всегда $A_1=A_2=0$ и сорбироваться (или поглощаться породой при тепловом воздействии) может только активный компонент.

Система (1)—(3) с уравнениями состояния (4) замыкается условиями фазового равновесия. В данном случае имеется n жидких фаз и одна твердая фаза, отвечающая породе и активному компоненту в сорбированном состоянии. Согласно правилу фаз Гиббса, число независимых концентраций X_{ij} равно $3-n$, поэтому условия фазового равновесия сводятся к $4n-3$ соотношениям, связывающим концентрации X_{ij}, и еще к одному соотношению, определяющему количественные характеристики адсорбции

$$F_r(X_{ij})=0 \quad (r=1,\ldots,4n-3), \quad A_3=A_3(s_j, X_{ij}) \tag{5}$$

Исследование процессов вытеснения, описываемых решениями системы уравнений (1)—(5) при соответствующих начальных и граничных условиях, показывает, что распределения насыщенности и концентрации компонентов в потоке являются разрывными. Разрывы (скачки) могут сопровождаться изменением числа фаз в потоке и суммарной скорости фильтрации $\mathbf{V}=\mathbf{v}_1+\ldots+\mathbf{v}_n$. Последнее может иметь место в случае фазовых переходов (например, испарении или конденсации), тепловом расширении и при нарушении аддитивности парциальных объемов компонентов при их смещении [5, 9—11].

Рассмотрим в линейном приближении устойчивость по отношению к малым возмущениям плоского фронта вытеснения, отвечающего некоторому скачку. Не уточняя конкретного типа скачка, будем считать, что он распространяется в направлении оси x с постоянной скоростью U и имеет координату X. Будем считать также известными значения всех переменных по обе стороны скачка: $s_j^\pm$, $X_{ij}^\pm$, $n^\pm$ и $p^\pm$; здесь индексами минус и плюс обозначены переменные соответственно за и перед скачком. Величины $s_j^\pm$, $X_{ij}^\pm$, $p^\pm$ не произвольные; они удовлетворяют интегральным законам сохранения на скачке и дополнительным условиям устойчивости скачка [14, 15] (см. также [11, 12]). Ограничимся случаем малых возмущений, характерный масштаб которых в направлении оси y значительно больше, чем в направлении вытеснения. Для возмущенного потока будем иметь

$$\begin{gathered} X(y,t)=X^\circ(t)+X^*(y,t), \qquad X^\circ=Ut \\ p=p^\circ+p^*, \qquad s_j=s_j^\circ+s_j^*, \qquad X_{ij}=X_{ij}^\circ+X_{ij}^* \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь первые слагаемые соответствуют невозмущенным значениям переменных, а вторые — их возмущениям.

Заметим прежде всего, что малые возмущения насыщенностей и концентраций компонентов в фазах распространяются без искажений вдоль характеристик соответствующей одномерной системы уравнений (1)—(5) $dx/dt=\xi_i$ ($i=1, 2, 3$) [14, 15]. Характеристические скорости могут при этом как совпадать, так и отличаться от скорости скачка U. Первые ($\xi_i^\pm=U$) отвечают так называемым контактным характеристикам, вторые — характеристикам, приходящим на скачок, если $\xi_i^->U$ ($\xi_i^+<U$), или уходящим со скачка, для которых $\xi_i^-<U$ ($\xi_i^+>U$). Конкретное число характеристик каждого типа для любого скачка тесно связано с условиями его устойчивости, однако в дальнейших рассуждениях никак не используется. В самом деле, можно убедиться, что возмущения, возникающие в некоторый момент времени в окрестности скачка и переносимые далее вдоль приходящих и уходящих характеристик, оказывают влияние на распространение скачка лишь в течение конечного отрезка времени. Действительно, возмущения, приносимые на скачок, «поглощаются» им [4], а возмущения, уносимые с фронта, отвечающего скачку, не влияют на его дальнейшее распространение. Указанное обстоятельство позволяет исключить из рассмотрения возмущения s_j^* и X_{ij}^*, распространяющиеся вдоль приходящих и уходящих характеристик, и учитывать лишь те возмущения, которые переносятся со скоростью, равной скорости невозмущенного фронта U. Другими словами, s_j^* и X_{ij}^* либо равны нулю, либо удовлетворяют уравнениям $\partial s_j^*/\partial t+U\partial s_j^*/\partial x=0$, $\partial X_{ij}^*/\partial t+U\partial X_{ij}^*/\partial x=0$, общие решения которых имеют вид

$$s_j^*=s_j^*(x-Ut,\ y),\qquad X_{ij}^*=X_{ij}^*(x-Ut,\ y) \tag{7}$$

Выразим компоненты скоростей фаз через возмущения переменных

$$v_{jx}=v_{jx}^\circ+v_{jx}^*,\qquad v_{jy}=v_{jy}^\circ+v_{jy}^*$$
$$v_{jx}^\circ=-kM_j^\circ\partial p^\circ/\partial x,\qquad v_{jy}^\circ=0,\qquad M_j=f_j/\mu_j \tag{8}$$
$$v_{jx}^*=-kM_j^\circ\frac{\partial p^*}{\partial x}-kM_j^*\frac{\partial p^\circ}{\partial x}\qquad v_{jy}^*=-kM_j^\circ\frac{\partial p^*}{\partial x}$$

Подставляя (8) в (2), получим, что возмущения v_{jx}^* и v_{jy}^* удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^{n}\rho_j^\circ\mathbf{v}_j^*X_{ij}^\circ\right)=\Omega_i\qquad(i=1,2,3) \tag{9}$$

$$\Omega_i=-m\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\rho_j^\circ s_j^\circ X_{ij}^*+\rho_j^\circ s_j^*X_{ij}^\circ+s_j^\circ X_{ij}^\circ\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\rho_j}{\partial X_{kj}}\right)^\circ X_{kj}^*\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial A_i}{\partial X_{kj}}\right)^\circ X_{kj}^*+\left(\frac{\partial A_i}{\partial s_k}\right)^\circ s_k^*\right]\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\rho_j^\circ\mathbf{v}_j^\circ X_{ij}^*+\mathbf{v}_j^\circ X_{ij}^\circ\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\rho_j}{\partial X_{kj}}\right)^\circ X_{kj}^*\right]\right\}$$

В силу соотношений (7) Ω_i можно представить в виде

$$\Omega_i=\frac{\partial\Phi_i}{\partial x},\qquad\Phi_i=\sum_{j=1}^{n}\left[a_js_j^*+b_{ij}X_{ij}^*+\sum_{k=1}^{3}(d_ks_k^*+c_{kj}X_{kj}^*)\right] \tag{10}$$

где a_j, b_{ij}, c_{kj}, d_k — некоторые постоянные.

Складывая уравнения (9) и используя (3), (8) и (10), получаем, что всюду, кроме фронта, p^* удовлетворяет уравнению

$$\nabla p^*=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad\Phi=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j's_j^*+\sum_{i=1}^{3}b_{ij}'X_{ij}^*\right) \tag{11}$$

Здесь a_j' и b_{ij}' — постоянные, которые выражаются через невозмущенные значения переменных, производных ρ_j, M_j и A_i по s_j и X_{ij}, а также $\partial p^\circ/\partial x$, поэтому Φ — однородная линейная форма s_j^* и X_{ij}^* ($j=1,\ldots,n$; $i=1, 2, 3$).

Разлагая возмущения p^*, s_j^* и X_{ij}^* в интеграл Фурье

$$\varphi^*(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l^*(x, t)\, e^{ivl}\, dl \qquad (12)$$

пользуясь стационарностью возмущений s_j^* и X_{ij}^* относительно фронта и выбирая s_{jl}^*, X_{ijl}^*, а следовательно, и Φ_l в виде $\Phi_l = \omega \exp[\beta(x-Ut)]$, находим общее выражение для фурье-компонент возмущения давления

$$p_l^* = A \exp(lx') + B \exp(-lx') + C \exp(\beta x') \qquad (13)$$

$$C = \omega\beta/(\beta^2 - l^2), \qquad x' = x - Ut$$

В силу требования затухания возмущений при $x' \to \pm\infty$ из (13) получаем

$$\begin{aligned} p_l^* &= (p_l^*)^+ = B \exp(-lx') - C^+ \exp(-\beta^+ x') \qquad (x'>0) \\ p_l^* &= (p_l^*)^- = A \exp(lx') + C^- \exp(\beta^- x') \qquad (x'<0) \end{aligned} \qquad (14)$$

$$C^\pm = \omega\beta^\pm / [(\beta^\pm)^2 - l^2], \quad \beta^\pm > 0$$

Теперь воспользуемся условиями непрерывности на скачке давления и потоков компонентов

$$[p] = 0, \quad mU_n\left[\sum_{j=1}^{n} \rho_j s_j X_{ij} + A_i\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} \rho_j v_{jn} X_{ij}\right] \; (i = 1, 2, 3) \qquad (15)$$

Здесь U_n и v_{jn} — скорости скачка и j-й фазы в направлении нормали к фронту, а квадратные скобки обозначают разности величин перед («плюс») и за («минус») скачком.

Для невозмущенного фронта имеем $[p^\circ] = 0$, $U_n = U$ и $v_{jn} = v_{jx}^\circ$. Связь между возмущенными значениями переменных на скачке в линейном приближении принимает вид (16) или для фурье-компонент возмущений (17) соответственно

$$[p^*] = X^* \left[\frac{\partial p^\circ}{\partial x}\right]$$

$$m\frac{dX^*}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n} \rho_j^\circ s_j^\circ X_{ij}^\circ + A_i^\circ\right] - \left[\sum_{j=1}^{n} \rho_j^\circ v_{jx}^* X_{ij}^\circ\right] = [\Phi_i] \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (16)$$

$$[p_l^*] = X_l^* \left[\frac{\partial p^\circ}{\partial x}\right]$$

$$m\frac{dX_l^*}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n} \rho_j^\circ s_j^\circ X_{ij}^\circ + A_i^\circ\right] - \left[\sum_{j=1}^{n} \rho_j^\circ v_{jxl}^* X_{ij}^\circ\right] = [\Phi_{il}] \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (17)$$

Выражая из (8), (12) и (14) фурье-компоненты фазовых скоростей $(v^*_{xl})^\pm$ и подставляя их в (17), приходим к системе четырех уравнений относительно трех неизвестных: X_l^*, A и B. Можно убедиться, однако, что в силу условий на скачке для невозмущенного потока (15) каждое из последних трех уравнений (17) является следствием двух других. После исключения A и B система (17) сводится к уравнению для X_l^* вида

$$\frac{dX_l^*}{dt} + \lambda(X_l^* - \Lambda_l) = 0, \qquad \Lambda_l = \mathrm{const} \qquad (18)$$

$$\lambda = -\frac{kl}{m}\left(\frac{1}{M^-} + \frac{1}{M^+}\right)^{-1} \frac{[G]}{[\sigma]}\left[\frac{\partial p^\circ}{\partial x}\right], \quad M^\pm = \sum_{j=1}^{n} (M_j^\circ)^\pm$$

$$G = \frac{1}{V}\sum_{j=1}^{n} Z_{1j}{}^{\circ} v_{jx}{}^{\circ}, \quad \sigma = \sum_{j=1}^{n} Z_{1j}{}^{\circ} s_j{}^{\circ}, \quad Z_{ij} = \frac{\rho_j X_{ij}}{g_i}, \quad V = \sum_{j=1}^{n} v_{jx}{}^{\circ}$$

Здесь M — суммарная подвижность фаз, σ и G — кажущиеся объемное содержание и объемная доля нейтрального компонента в потоке, g_i — плотность индивидуального i-го компонента, V — суммарная скорость фильтрации фаз для невозмущенного потока. Постоянная Λ_l является линейной комбинацией фурье-компонент возмущений $(s_j{}^*)^{\pm}$ и $(X_{ij}{}^*)^{\pm}$ и обращается в нуль, если $(s_j{}^*)^{\pm} = (X_{ij}{}^*)^{\pm} = 0$. Уравнение (18) имеет решение

$$X_l{}^* - \Lambda_l = [X_l{}^*(0) - \Lambda_l] \exp(-\lambda t) \tag{19}$$

ограниченное при $t \to \infty$, если $\lambda > 0$.

Таким образом, движение фронта неустойчиво при $\lambda < 0$ и устойчиво при $\lambda > 0$. Заметим, что в последнем случае малые возмущения координат фронта не затухают со временем, а стремятся к некоторым постоянным значениям, определяемым возмущениями насыщенностей фаз и концентраций компонентов, которые переносятся по «контактным» характеристикам $dx/dt = U$. Так как $[G]/[\sigma] > 0$ [9], то знак λ определяется знаком разности $[\partial p^{\circ}/\partial x]$. Согласно (8), имеем $(\partial p^{\circ}/\partial x)^{\pm} = -V^{\pm}/(kM^{\pm})$, поэтому условие устойчивости принимает вид

$$\lambda = \frac{lV^-}{m}\frac{[G]}{[\sigma]}\left\{\frac{[M]}{M^- + M^+} - \frac{M^-}{M^- + M^+}\frac{[V]}{V^-}\right\} > 0 \tag{20}$$

Из (20) следует, что увеличение скорости фильтрации (ускорение потока) при переходе через скачок в направлении вытеснения играет роль дестабилизирующего фактора. Так обстоит дело, в частности, для фронтов испарения воды и разгазирования нефти. Уменьшение скорости фильтрации в направлении вытеснения, как это имеет место при конденсации пара или растворении газа в нефти, напротив, способствует стабилизации фронта. Регулирующим фактором в этих случаях является скорость вытеснения. Действительно, на фронте испарения имеем $[M] > 0$ и $[V] > 0$, а на фронте конденсации $[M] < 0$ и $[V] < 0$. Так как величины M^+, M^- и $[V]$ в первом приближении не зависят от абсолютных значений скорости фильтрации за и перед скачком $V^{\pm}$, то в соответствии с (20) имеем

$$-\operatorname{sgn}\left[\frac{\partial p^{\circ}}{\partial x}\right] = \operatorname{sgn}\{[M](V^- - V_*{}^-)\} > 0, \quad V_*{}^- = \frac{M^-[V]}{[M]} \tag{21}$$

Для предотвращения дестабилизации фронта испарения следует повышать скорость фильтрации, а для усиления стабилизации фронта конденсации, наоборот, снижать скорость вытеснения. Граница устойчивости определяется критическим значением скорости фильтрации за скачком $V^- = V_*{}^-$, при котором объемные эффекты компенсируются различием суммарных подвижностей жидкостей.

Выше рассматривалась устойчивость фронтов при вытеснении из пористой среды трехкомпонентных систем. По-видимому, условие устойчивости (21) остается справедливым в общем случае многофазной фильтрации с произвольным числом компонентов.

Отметим в заключение, что хотя сложная фронтальная структура зоны вытеснения при применении активного воздействия на пласт определяется в основном физико-химическими факторами, условия устойчивости фронтов носят чисто гидродинамический характер и не зависят от механизма используемого метода повышения нефтеотдачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taylor G.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes.— Proc. Roy. Soc. London. A, 1950, v. 201, № 1065, p. 192—196.
2. *Saffman P. G., Taylor G.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid.— Proc. Roy. Soc. London. A, 1958, v. 245, № 1242, p. 312—329.
3. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
4. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
5. *Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С., Терзи В. П.* Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.
6. *Розенберг М. Д., Кундин С. А., Курбанов А. К., Суворов Н. И., Шовкринский Г. Ю.* Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах. М.: Недра, 1969. 453 с.
7. *Ентов В. М.* Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах (математические модели методов повышения нефтеотдачи пластов).— Успехи механики, 1981, т. 4, № 3, с. 41—79.
8. *Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н., Сомов Б. Е.* Задача о вытеснении многокомпонентной углеводородной смеси при нагнетании газа в пласт.— В сб.: Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1971, с. 107—120.
9. *Зазовский А. Ф.* О вытеснении нефти растворителями и солюбилизирующими растворами ПАВ. Препринт № 195. М.: Ин-т проблем мех. АН СССР, 1982.
10. *Зазовский А. Ф.* Двухфазная трехкомпонентная фильтрация с переменным суммарным потоком.— Изв. АН СССР. МЖГ. 1985, № 3, с. 113—120.
11. *Алишаева О. М., Ентов В. М., Зазовский А. Ф.* О структуре сопряженных скачков насыщенности и концентрации в задачах вытеснения нефти раствором активной примеси.— ПМТФ, 1982, № 5, с. 93—102.
12. *Зазовский А. Ф.* Структура скачков в задачах вытеснения нефти химреагентами, влияющими на фазовое равновесие.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 5, с. 116—126.
13. *Кац Р. М., Таранчук В. Б.* Обзор работ по исследованию устойчивости фильтрационных течений.— В кн.: Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981, с. 18—29.
14. *Гельфанд И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений.— Успехи мат. наук, 1959, т. 14, вып. 2, с. 87—158.
15. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.

Москва

Поступила в редакцию 11.VI.1985