

УДК 532.546

## ГРАВИТАЦИОННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ НЕФТИ И ВОДЫ В ПЛАСТАХ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

БЕДРИКОВЕЦКИЙ П. Г., МАРОН В. И.

Рассматривается разделение фаз с различной плотностью в пористой среде в поле силы тяжести. При описании процесса сегрегации в пласте большой мощности пренебрегаем капиллярным давлением по сравнению с гравитационным перепадом давления, вызванным разностью плотностей фаз. В такой постановке задача носит модельный характер, но она допускает полное аналитическое исследование с качественным анализом процесса на основе точных решений. Полученные в работе точные решения задач гравитационной сегрегации в пластах ограниченной мощности носят неавтономный характер, что отличает их от полученных ранее результатов для неограниченного пласта [1].

Учет капиллярности дает более полную картину явления. Соответствующее описание и анализ на основе численных решений даны в [2, 5].

Особенность рассматриваемых в работе задач состоит в том, что для квазилинейного гиперболического уравнения первого порядка, описывающего процесс сегрегации, формулируются два краевых условия. Эти условия соответствуют непроницаемости кровли и подошвы пласта.

1. Процесс гравитационной сегрегации двух несмешивающихся нежимаемых жидкостей в пластах большой мощности в крупномасштабном приближении описывается следующим гиперболическим уравнением [1]:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s)}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$t = \frac{k(\rho_1 - \rho_2)g}{\mu_1 m H} \tau, \quad x = \frac{z}{H}, \quad f(s) = \frac{f_1(s)f_2(s)}{\mu_0 f_1 + f_2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Здесь  $\tau$  — время,  $z$  — вертикальная координата, отсчитываемая вниз от кровли пласта,  $k$  — проницаемость,  $\rho_i$  — плотности фаз (индекс  $i=1$  относится к воде,  $i=2$  — к нефти),  $g$  — ускорение свободного падения,  $\mu_i$  — вязкости фаз,  $m$  — пористость,  $H$  — мощность пласта,  $s$  — водонасыщенность,  $f_i$  — фазовые проницаемости,  $f$  — объемный поток водной фазы.

При учете капиллярного скачка давления между нефтяной и водной фазами, величина которого зависит от водонасыщенности и свойств пористой среды, процесс капиллярно-гравитационной сегрегации описывается нелинейным параболическим уравнением [2, 5]. Безразмерный параметр при старшей производной равен отношению капиллярного давления к гравитационному перепаду давления, вызванному разностью плотностей фаз в столбе высотой  $H$ . В пласте большой мощности гравитационный перепад значительно больше капиллярного скачка давления между фазами. Предполагая равенство давлений в фазах, приходим к гиперболическому уравнению (1.1).

На фиг. 1 приведен график кривой  $f=f(s)$ .

Аналогично описывается процесс гравитационного разделения фаз в тонких наклонных пластах. При этом  $g$  заменяется на  $g \sin \alpha$ .

2. Рассмотрим процесс гравитационного разделения нефти и воды в пласте, ограниченном кровлей и подошвой. Начальные условия соответствуют расположению слоя воды единичной толщины над слоем нефти толщины  $l$

$$t=0: s=1, -1 < x < 0; s=0, 0 < x < l \quad (2.1)$$

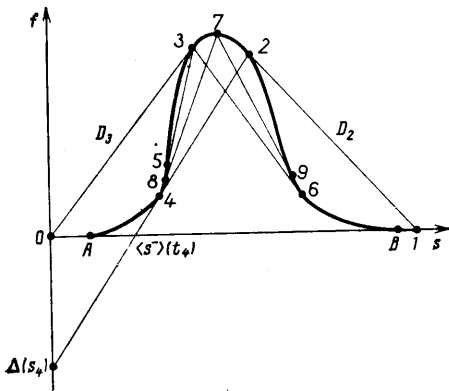
Точке  $x=0$  соответствует положение границы раздела между водой и нефтью в начальный момент времени.

На кровле пласта  $x=-1$  и на подошве пласта  $x=l$  задается условие непроницаемости для каждой из фаз

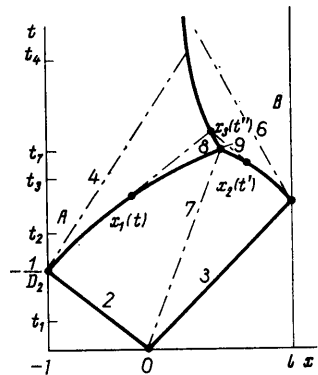
$$x=-1, t>0: f(s)=0 \quad (2.2)$$

$$x=l, t>0: f(s)=0 \quad (2.3)$$

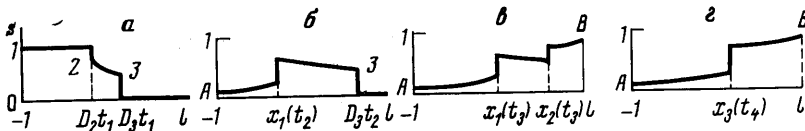
В момент  $t=0$  происходит распад разрыва начального условия (2.1).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение задачи о распаде разрыва автомodelьно, оно зависит от комплекса  $x/t=\xi, s(x, t)=s(\xi)$  [1]

$$s=1, \quad 0 < \xi < D_2 = \frac{f_2}{s_2 - 1} = f'_s(s_2) \quad (2.4)$$

$$\xi = f'_s(s), \quad D_2 < \xi < D_3 = \frac{f_3}{s_3} = f'_s(s_3) \quad (2.5)$$

$$s=0, \quad D_3 < \xi < \infty \quad (2.6)$$

Это решение описывает процесс гравитационной сегрегации в неограниченном пласте.

На фиг. 1 точки с координатами  $(s_i, f_i), f_i=f(s_i)$  обозначены через  $i=0, 1, 2, \dots, 9$ .

Точки 2 и 3 получены проведением касательных к кривой  $f(s)$  из точек 1 и 0 соответственно;  $D_2$  и  $D_3$  — наклоны касательных. На скачках выполняются условия Гюгоньо (баланса массы воды) и Жуге равенства скорости разрыва и характеристики за разрывом [1, 3].

Условиям непроницаемости на кровле и подошве пласта удовлетворяют начальные значения насыщенностей:  $s(-1, t)=1, s(l, t)=0$ . Поэтому

до моментов подхода фронта всплывающей нефти к кровле пласта  $t < -1/D_2$  и подхода фронта опускающейся воды к подошве пласта  $t < l/D_3$ , решение задачи (2.1)–(2.3) совпадает с (2.4)–(2.6).

На фиг. 2 приведена динамика скачков насыщенности на плоскости  $(x, t)$ , на фиг. 3 – распределение насыщенности по вертикали в различные моменты времени. В любой момент времени  $t_1 < -1/D_2, l/D_3$  насыщенность распределена так же, как в неограниченном пласте (фиг. 3, а).

Вне расширяющейся зоны разделяющейся смеси в невозмущенных зонах воды  $s=1$  и нефти  $s=0$  давление распределено гидростатически, фазы неподвижны. Как только в невозмущенную зону вторгается другая фаза, на нефть начинает действовать выталкивающая сила. При достижении насыщенности пределами гидродинамических подвижностей фаз обе фазы приходят в движение.

В момент  $t = -1/D_2$  фронт всплывающей нефти достигнет кровли пласта. За фронтом к кровле подходит водонефтяная смесь с насыщенностью  $s_2$ . Происходит распад следующего разрыва

$$x = -1, \quad t > -\frac{1}{D_2} : f(s) = 0; \quad x > -1, \quad t = -\frac{1}{D_2} : s = s_2 \quad (2.7)$$

Из графика функции  $f(s)$  видно, что граничное условие  $f=0$  неоднозначно определяет величину насыщенности  $s(-1, t)$ , необходимую для выбора решения задачи о распаде разрыва. Выбор осуществляется на основании того, что условию отражения ударной волны от кровли соответствует такой распад разрыва (2.7), чтобы во всех волнах образовавшейся конфигурации скорости были положительными. Если оставить на кровле пласта условие  $s=1$ , то распад (2.7) реализуется скачком со скоростью  $D_2 < 0$ , что противоречит указанному условию отражения. Поэтому на кровле пласта следует выбрать значение  $s(-1, t) = s_A$  при  $t > -1/D_2$ . Это соответствует образованию на кровле пласта слоя всплывшей нефти, оттеснившей воду вниз до величины остаточной водонасыщенности  $s_A$ .

При этом разрыв (2.7) распадается со следующей конфигурацией:

$$\frac{x+1}{t+1/D_2} = f'_s(s), \quad 0 < \frac{x+1}{t+1/D_2} < D_4 = \frac{f_2 - f_4}{s_2 - s_4} \quad (2.8)$$

$$s = s_2, \quad D_4 = f'_s(s_4) < \frac{x+1}{t+1/D_2} < \infty \quad (2.9)$$

На плоскости  $(s, f)$  решению задачи о распаде разрыва (2.7) соответствуют: центрированная волна для значений насыщенности от точки А до точки 4 на кривой  $f(s)$  (формула (2.8)), скачок из точки 4 в точку 2 и точка покоя 2 (формула (2.9)). Точка 4 получена проведением касательной к кривой  $f(s)$  из точки 2,  $D_4$  – наклон касательной. На скачке 4→2 выполняются условия Гюгонио и Жуге.

Образовавшийся разрыв 4→2 при  $t > -1/D_2$  распространяется в области центрированной волны (2.5) вдоль траектории  $x = x_1(t)$ .

На плоскости  $(s, f)$  точка  $s^+(x_1)$  лежит на кривой  $f(s)$  левее точки 2, точка  $s^-(x_1)$  – правее точки 4. Хорда  $s^+ - s^-$  касается кривой в точке  $s^-$ . Для указанных значений  $s^-$  и  $s^+$  имеем

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{f(s^+) - f(s^-)}{s^+ - s^-} > f'_s(s^+) = \frac{x_1(t)}{t}$$

Скорость разрыва больше скоростей характеристик в центрированной волне. Поэтому линия разрыва  $x_1$  пересекает эти характеристики (фиг. 2). Характеристики центрированной волны приносят на разрыв  $x_1$  значения насыщенности  $s^+(x_1(t))$ . Поэтому справедливо равенство

$$\frac{x_1(t)}{t} = f'_s(s^+(x_1)) \quad (2.10)$$

На разрыве  $x_1$  выполняются условия Гюгонио и Жуге

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{f(s^+(x_1)) - f(s^-(x_1))}{s^+(x_1) - s^-(x_1)} = f_s'(s^-(x_1)) \quad (2.11)$$

Рассматривая второе равенство (2.11) как трансцендентное уравнение относительно величины  $s^-(x_1(t))$ , выразим  $s^- = s^-(s^+)$ . Найдем скорость разрыва  $x_1(t)$  из равенства (2.10)

$$\frac{dx_1}{dt} = f_s''(s^+) \frac{ds^+}{dt} t + f_s'(s^+) \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.11), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $ds^+/dt$ . Разделяя в нем переменные и учитывая условие  $s^+(-1/D_2) = s_2$ , получаем зависимость  $s^+(t) = s^+(x_1(t))$  в неявном виде

$$\int_{s_2}^{s^+(t)} \frac{f_s''(s^+) ds^+}{f_s'(s^-(s^+)) - f_s'(s^+)} = \ln(-D_2 t) \quad (2.13)$$

Затем по формуле (2.10) находится траектория  $x_1(t)$ .

На фиг. 2 рассмотрен случай, когда фронт всплывающей нефти достигнет кровли пласта раньше, чем фронт опускающейся воды достигнет подошвы. На фиг. 3, б приведено распределение насыщенности по вертикали в момент  $t_2$ , когда отражение от кровли уже произошло, а от подошвы еще нет:  $-1/D_2 < t_2 < l/D_3$ . К кровле пласта примыкает зона всплывшей нефти с заземленной водой  $0 < x < x_1(t)$ . Насыщенность в этой зоне возрастает от величины  $s_A$  до  $s^-(x_1)$ . Со временем всплывающая нефть скапливается под кровлей, нефтенасыщенность в этой зоне возрастает. В зоне смеси, которую еще не достигла отраженная от кровли волна оттесненной воды,  $x_1(t) < x < D_3 t$ , насыщенность падает от  $s^+(x_1)$  перед фронтом  $x_1$  до  $s_3$  за фронтом опускающейся воды. Перед фронтом  $x > D_3 t$  нефть неподвижна,  $s=0$ .

В момент  $l/D_3$  фронт опускающейся воды достигнет подошвы пласта. Характеристика, следующая за этим фронтом, приносит на подошву значение насыщенности  $s_3$ . Происходит распад разрыва

$$x=l, \quad t > \frac{l}{D_3} : f(s)=0; \quad x < l, \quad t = \frac{l}{D_3} : s=s_3$$

Как и при распаде разрыва (2.7), для построения однозначного решения задачи о распаде разрыва в данном случае необходимо при  $x=l$  выбрать значение насыщенности, удовлетворяющее условию непроницаемости (2.3). При этом значение  $s(l, t)$  должно быть таким, чтобы в образовавшейся конфигурации скорости всех характеристик и разрывов были отрицательны. Это условие соответствует отражению волны от подошвы пласта.

Для выполнения требуемого условия необходимо на подошве задать следующее значение насыщенности:  $s=s_B, f(s_B)=0$ . Это условие соответствует образованию на подошве пласта области, в которой вода вытеснила нефть до величины остаточной нефтенасыщенности  $1-s_B$ . При этом конфигурация распада рассматриваемого разрыва состоит из скачка  $3 \rightarrow 6$  и центрированной волны, в которой насыщенность изменяется от  $s_6$  до  $s_B$

$$s=s_3, \quad -\infty < \frac{x-l}{t-l/D_3} < D_6 = \frac{f_3 - f_6}{s_3 - s_6} \quad (2.14)$$

$$\frac{x-l}{t-l/D_3} = f_s'(s), \quad D_6 = f_s'(s_2) < \frac{x-l}{t-l/D_3} < 0$$

Точка 6 получена проведением касательной к кривой  $f(s)$  из точки 3, наклон касательной  $D_6$  равен скорости скачка  $3 \rightarrow 6$ .

Образовавшийся разрыв распространяется в области центрированной волны (2.5) вдоль траектории  $x_2(t')$  (фиг. 2). На плоскости  $(s, f)$  точка  $s^-(x_2)$  лежит правее точки 2, точка  $s^+(x_2)$  — левее точки 6. На разрыве  $x_2(t')$  выполняются условия Гюгонио и Жуге, скорость разрыва равна скорости  $s^+(x_2)$  — характеристики. Поэтому хорда  $s^+ - s^-$  касается кривой  $f(s)$  в точке  $s^+(x_2)$ . Наклон хорды равен скорости разрыва. Из фиг. 1 видно, что для указанных значений  $s^-$  и  $s^+$  скорость разрыва меньше скорости характеристики в центрированной волне. Поэтому линия разрыва  $x_2$  пересечет эти характеристики. Они приходят на разрыв  $x_2$  и приносят на него значения

$$\frac{x_2(t')}{t'} = f_{s'}(s^-(x_2)) \quad (2.15)$$

Взаимодействие разрыва  $x_2$  с центрированной волной (2.5) описывается формулами, аналогичными (2.10), (2.11). Выражая из условий Гюгонио и Жуге  $s^+ = s^+(s^-)$  и подставляя в выражение для скорости разрыва с учетом (2.15), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $ds^-/dt$ . Разделяя в нем переменные и учитывая условие  $s^-(l/D_3) = s_3$ , получим зависимость  $s^-(t') = s^-(x_2(t'))$

$$\int_{s_3}^{s^-(t')} \frac{f_{s''}(s^-) ds^-}{f_{s'}(s^+(s^-)) - f_{s'}(s^-)} = \ln \frac{D_3 t'}{l} \quad (2.16)$$

Затем из формулы (2.16) находится траектория  $x_2(t')$ .

Найдем момент  $t_7$  столкновения отраженных от кровли и подошвы волн, соответствующий пересечению линий разрывов  $x_1(t)$  и  $x_2(t')$ . Значение насыщенности, которое характеристика центрированной волны приносит в точку пересечения, обозначим через  $s_7$  (фиг. 2). Подставим в равенства (2.13) и (2.15) условия столкновения  $t = t' = t_7$ ,  $s^+(x_1(t_7)) = s^-(x_2(t_7)) = s_7$  и найдем величины  $t_7$  и  $s_7$ . Значения  $s_8 = s^-(x_1(t_7))$  и  $s_9 = s^+(x_2(t_7))$  находятся из условия Жуге. Это соответствует проведению касательных к кривой  $f(s)$  из точки 7 (фиг. 1). Точки 8 и 9 являются точками касания.

В момент  $t_7$  происходит распад скачка с тыла догоняющего разрыва на фронт догоняемого [3]. Образуется скачок 8→9. Траектория движения этого разрыва,  $x_3(t'')$ , является границей раздела всплывающей нефти и опускающейся воды.

На фиг. 3, в приведено распределение насыщенности по вертикали в момент  $t_3$  после отражения от подошвы, но до столкновения фронтов  $x_1$  и  $x_2$ . В зоне нефти, накапливающейся под кровлей, водонасыщенность растет от  $s_A$  до  $s^-(x_1)$ . Затем она скачком возрастает на фронте до величины  $s^+(x_1)$  и плавно убывает в зоне разделяющейся смеси до величины  $s^-(x_2)$ . На фронте  $x_2$  насыщенность скачком возрастает до величины  $s^+(x_2)$  и плавно растет в зоне воды, накапливающейся на подошве, до величины  $s_B$ . Со временем зоны накапливаемой воды над подошвой и всплывшей нефти под кровлей расширяются и в момент  $t_7$  сомкнутся.

Характеристики, уходящие с разрывов  $x_1$  и  $x_2$ , приходят на разрыв  $x_3$  и приносят значения насыщенности  $s^-(x_1)$  и  $s^+(x_2)$

$$\frac{x_3(t'') - x_1(t)}{t'' - t} = f_{s'}(s^-(x_1)), \quad s^-(x_1(t)) = s^-(x_3(t'')) \quad (2.17)$$

$$\frac{x_3(t'') - x_2(t')}{t'' - t'} = f_{s'}(s^+(x_2)), \quad s^+(x_2(t')) = s^+(x_3(t'')) \quad (2.18)$$

Исключая из равенств (2.17), (2.18) величину  $x_3(t'')$  и подставляя в

полученное выражение формулы (2.10), (2.15), получим уравнение

$$f_s'(s^+(x_1))t + f_s'(s^-(x_1))(t''-t) = f_s'(s^-(x_2))t' + f_s'(s^+(x_2))(t''-t') \quad (2.19)$$

Для получения первого интеграла движения разрыва  $x_3$  в области распространения простых волн проинтегрируем уравнение баланса объема воды (1.1) по области плоскости  $(x, t)$ , ограниченной контуром  $\Gamma: (0, 0) \rightarrow (x_1(t), t) \rightarrow (x_3(t''), t'') \rightarrow (x_2(t'), t') \rightarrow (0, 0)$ . Согласно формуле Грина, интеграл от левой части (1.1) по этой области равен интегралу от дифференциальной формы  $\theta_s = fdt - sdx$  по контуру  $\Gamma$ . Форма  $\theta_s$  имеет смысл объемного потока воды.

Интеграл от  $\theta_s$  вдоль отрезка  $(0, 0) \rightarrow (x_1(t), t)$  равен

$$[f(s^+(x_1)) - s^+(x_1)f_s'(s^+(x_1))]t$$

Комплекс  $\Delta(s) = f(s) - sf_s'(s)$ , который встречается во многих формулах, возникающих при решении задач о взаимодействии волн [6, 7], имеет следующую геометрическую интерпретацию на плоскости  $(s, f)$ . Если через точки с координатами  $(s, f(s))$  провести касательную к кривой  $f(s)$ , то ордината точки пересечения касательной с осью  $s=0$  равна величине  $\Delta(s)$ .

Выполняя интегрирование по всем сторонам контура  $\Gamma$ , получим

$$\Delta(s^+(x_1))t + \Delta(s^-(x_1))(t''-t) = \Delta(s^-(x_2))t' + \Delta(s^+(x_2))(t''-t') \quad (2.20)$$

Из системы шести трансцендентных уравнений, состоящей из уравнений (2.13), (2.16), (2.19) и (2.20), а также двух условий Жуге для разрывов  $x_1$  и  $x_2$  (2.11) для любого момента времени  $t'' > t_7$  однозначно определяются величины  $t, t', s^-(x_1), s^+(x_1), s^-(x_2), s^+(x_2)$ . Последовательностью действий по исключению неизвестных эта система сведется к системе двух трансцендентных уравнений на  $s^+(x_1)$  и  $s^-(x_2)$ .

Заметим, что задача о распаде разрыва для квазилинейного гиперболического уравнения с нелинейной функцией потока решена в [8]. Близкие задачи возникают в теории подземного хранения газа [4].

Отметим, что получение первых интегралов движения и средних значений искомым функций путем интегрирования дифференциальных форм потоков по подвижным контурам, а также геометрическая интерпретация сохраняющихся величин на фазовой плоскости  $(s, f)$  характерно для многих неавтономных задач о взаимодействии простых и ударных волн. Так, в [6] получен первый интеграл движения тыла оторочки растворителя в ходе вытеснения нефти. В [7] получен первый интеграл движения фронта вытеснения и скачка температуры при вытеснении нефти горячей водой из нетеплоизолированного пласта.

При увеличении  $t''$  точка  $s^-(x_3)$  на кривой  $f(s)$  движется от точки 8 к точке 4, точка  $s^+(x_3)$  — от точки 9 к точке 6.

При достижении величиной  $s^-(x_3)$  значения  $s_4$  линия разрыва  $x_3$  пересечет все характеристики простой волны, приходящие на линию  $x_3$  слева, и войдет в область распространения центрированной волны (2.8). Для описания движения  $x_3$  начиная с этого момента необходимо в формулах (2.19), (2.20) положить  $t = -1/D_2, s^+(x_1) = s_2$ .

Как только насыщенность  $s^+(x_3)$  достигнет значения  $s_6$ , линия разрыва  $x_3$  пересечет все характеристики простой волны, уходящие с разрыва  $x_2$ . Разрыв  $x_3$  войдет в область распространения центрированной волны (2.14). Начиная с этого момента в формулах (2.19), (2.20) полагаем  $t' = l/D_3, s^-(x_2) = s_3$ .

На фиг. 3,  $g$  приведено распределение насыщенности по вертикали в момент  $t_k > t_7$ . Насыщенность возрастает от  $s_A$  на кровле пласта до  $s^-(x_3)$  на границе раздела фаз. Затем насыщенность скачком возрастает до  $s^+(x_3)$  и монотонно растёт до  $s_B$  на подошве пласта.

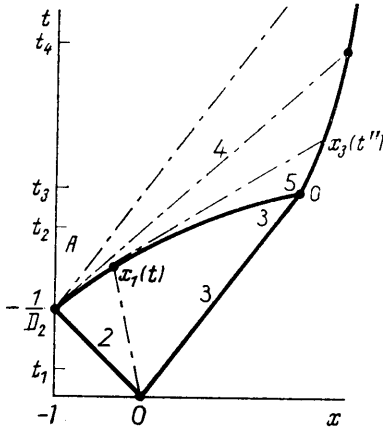
При  $t'' \rightarrow \infty$  скорость разрыва  $x_3$  стремится к нулю. При этом имеем  $s^- \rightarrow s_A$ ,  $s^+ \rightarrow s_B$ . Граница раздела стабилизируется. Ее положение находится из условия баланса объема воды в пласте

$$s_A(x_3(\infty)+1) + s_B(l-x_3(\infty)) = 1$$

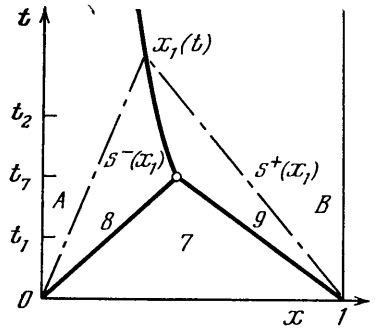
При сегрегации в слоисто-неоднородном пласте функции  $f(s)$  своя для каждого пропластка. На границах решения спиваются условиями непрерывности потока фаз  $f_i(s^-) = f_{i+1}(s^+)$ .

3. Рассмотрим задачу гравитационного разделения в полубесконечном пласте, ограниченном кровлей. Начальные условия выполняются при  $-1 < x < \infty$ . Точке  $x=0$  соответствует положение границы раздела между водой и нефтью в начальный момент времени.

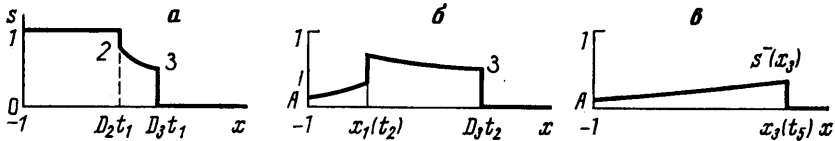
На кровле задается условие непроницаемости для обеих фаз (2.2).



Фиг. 4



Фиг. 6



Фиг. 5

До момента подхода фронта всплывающей нефти к кровле пласта  $t < -1/D_2$  (фиг. 4) распределение насыщенности по вертикали такое же, как в случае неограниченного пласта (фиг. 5, а).

После отражения от кровли фронт оттесненной воды  $x_1(t)$  пройдет область распространения центрированной волны и в момент  $t_3$  догонит фронт опускающейся воды  $x = D_3 t$ . В этот момент имеем  $s^+ = s_3$ ,  $s^- = s_5$ . Величина  $t_3$  находится из формулы (2.13).

Распределение насыщенности по вертикали при  $-1/D_2 < t < t_3$  такое же, как в случае сегрегации в ограниченном пласте до момента подхода фронта опускающейся воды к подошве пласта (Фиг. 5, б).

В момент  $t_3$  образуется скачок  $5 \rightarrow 0$ . При  $t > t_3$  он распространяется вдоль траектории  $x_3(t'')$  (2.17) в области простой волны, пересекая все ее характеристики. В момент  $t_4$ , как только  $s^-(x_3) = s_4$ , разрыв  $x_3$  войдет в область центрированной волны. При движении  $x_3$  в простой волне при  $t_3 < t < t_4$  насыщенность за разрывом уменьшается от  $s_5$  до  $s_4$ .

Для нахождения траектории  $x_3(t'')$  при  $t'' > t_4$  проинтегрируем формулу  $\theta$  по контуру  $(0, 0) \rightarrow (-1, 0) \rightarrow (-1, -1/D_2) \rightarrow (x_3(t''), t'') \rightarrow$

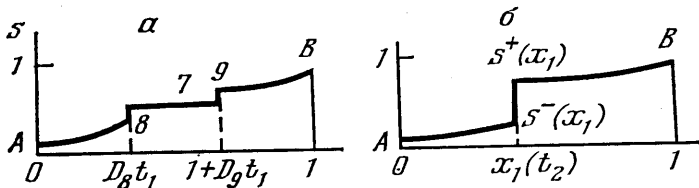
$\rightarrow (x_1(t_3), t_3) \rightarrow (0, 0)$ . Получим зависимость  $x = x_3(t'')$  в виде

$$-1 = \Delta(s^-(x_3)) (t'' - 1/D_2), \quad x_3(t'') = f_{s'}(s^-(x_3)) (t'' - 1/D_2) \quad (3.1)$$

Для нахождения средней водонасыщенности  $\langle s^- \rangle(t'')$  в области над границей раздела  $x_3(t'')$  при  $t'' > t_4$  проинтегрируем  $\theta_s$  по контуру  $(0, 0) \rightarrow (-1, 0) \rightarrow (-1, t'') \rightarrow (x_3(t''), t'') \rightarrow (x_1(t_3), t_3) \rightarrow (0, 0)$

$$\langle s^- \rangle(t'') = -\Delta(s^-(x_3)) / f_{s'}(s^-(x_3)) \quad (3.2)$$

Из формул (3.1), (3.2) следует, что если на плоскости  $(s, f)$  отложить по вертикали от точки  $(0, 0)$  отрезок длиной  $-(t'' - 1/D_2)^{-1}$  и провести касательную к кривой  $f(s)$ , то точка касания определит величину  $s^-(x_3)$ . Абсцисса точки пересечения касательной с осью  $f=0$  будет равна  $1/x_3(t'')$ .



Фиг. 7

и определит положение фронта опускающейся воды. Эта абсцисса равна также величине средней насыщенности  $\langle s^- \rangle(t'')$ .

На фиг. 1 приведены построения по определению величин  $t_4$ ,  $\langle s^- \rangle(t_4)$ .

Из приведенных геометрических построений видно, что с ростом времени  $t''$  величина отрезка  $\Delta(s^-)$  уменьшается, абсциссы точек касания  $s^-(x_3)$  и пересечения касательной с осью  $f=0$   $\langle s^- \rangle(t'')$  уменьшаются. При  $t'' \rightarrow \infty$  имеем  $s^- \rightarrow s_A$ ,  $\langle s^- \rangle \rightarrow s_A$ . Предельное положение границы раздела находится из условия баланса объема воды в пласте в ходе процесса разделения фаз:  $s_A x_3(\infty) = 1$ .

На фиг. 5, в приведено распределение насыщенности при  $t_5 > t_4$ . Насыщенность возрастает от  $s_A$  на кровле пласта до  $s^-(x_3)$  на фронте оттесненной от кровли воды. Со временем вся вода в пласте окажется защемленной, водонасыщенность будет стремиться к величине  $s_A$ .

Если при сегрегации в ограниченном пласте (2.1) выполняется неравенство  $x_3(\infty) = 1/s_A < l$ , то решение задачи разделения водонефтяной смеси совпадает с решением в случае полуограниченного пласта. Границы опускающейся и оттесненной воды пройдут над подошвой пласта. Под границами при этом остается слой неподвижной нефти,  $s=0$ , не охваченный процессом разделения фаз.

4. Рассмотрим процесс гравитационного разделения водонефтяной смеси, которая в начальный момент времени заполняет ограниченный пласт с постоянной насыщенностью. Начальные условия имеют вид

$$s(x, 0) = s_7, \quad 0 < x < 1 \quad (4.1)$$

На кровле пласта  $x=0$  и на его подошве  $x=1$  выполняется условие непроницаемости для обеих фаз  $f(s)=0$ .

В момент  $t=0$  происходят распады разрывов в точках  $x=0$  и  $x=1$

$$x=0, t>0: f(s)=0; \quad x>0, t=0: s=s_7 \quad (4.2)$$

$$x<1, t=0: s=s_7; \quad x=1, t>0: f(s)=0 \quad (4.3)$$

Это показывает, что в рассматриваемом случае процесс гравитационного разделения начинается на кровле и подошве с последующим распространением возмущения в глубь пласта в отличие от рассмотренного выше случая сегрегации изначально разделенной смеси.

Условию накопления всплывающей нефти под кровлей пласта соответствуют положительные скорости волн, образующихся в конфигурации распада разрыва



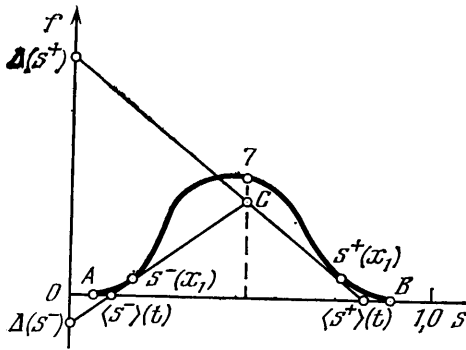
(4.2). Решение задачи о распаде этого разрыва состоит из центрированной волны  $A-8$ , скачка  $8 \rightarrow 7$  со скоростью  $D_8$  и точки покоя  $7$  [5]. Отрезок  $8-7$  касается кривой  $f(s)$  в точке  $8$  (фиг. 4).

Для того чтобы скорости волн в конфигурации распада разрыва (4.3) были отрицательны (условие накопления опускающейся воды на подошве) необходимо на подошве задать условие вытеснения нефти опускающейся водой до величины предельной насыщенности  $s(1, t) = s_B$  [5]. Распад разрыва осуществляется скачком  $7 \rightarrow 9$ , скорость которого равна  $D_9$ , и центрированной волной  $9-B$ . Наклон касательной  $7-9$  равен  $D_9$ .

При  $t > 0$  конфигурации, образовавшиеся на кровле и подошве пласта, распространяются в невозмущенной области  $s = s_7$ .

В момент  $t_7$  разрывы  $8 \rightarrow 7$  и  $7 \rightarrow 9$  столкнутся (фиг. 6). Имеем

$$D_8 t_7 - D_9 t_7 = 1$$



Фиг. 8

На фиг. 7, а приведено распределение насыщенности в момент  $t_1$  до столкновения разрывов,  $t_1 < t_7$ . Процесс разделения распространяется в невозмущенную зону смеси. В зоне всплывшей и накапливающейся под кровлей нефти насыщенность увеличивается от  $s_A$  до  $s_8$ . В средней зоне пласта, не охваченной процессом сегрегации, насыщенность равна начальной. В зоне опускающейся и накапливающейся на подошве воды насыщенность растет от  $s_9$  до  $s_B$ . Момент  $t_7$  соответствует смыканию слоя нефти под кровлей со слоем воды на подошве пласта. При  $t > t_7$  весь пласт охвачен процессом гравитационного разделения фаз.

В момент  $t_7$  образуется разрыв  $8 \rightarrow 9$ . При  $t > t_7$  он распространяется в области двух центрированных волн вдоль линии  $x_1(t)$  — границы раздела нефти и воды. Характеристики обеих волн приносят на разрыв значения насыщенности  $s^-(x_1)$  и  $s^+(x_1)$ . Имеем

$$f_s'(s^-(x_1))t - f_s'(s^+(x_1))t = 1 \quad (4.4)$$

Интегрируя форму потока водной фазы  $\theta_s$  по контуру  $(0, 0) \rightarrow (x_1(t), t) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (0, 0)$ , получим первый интеграл движения

$$\Delta(s^-(x_1))t = \Delta(s^+(x_1))t - s_7 \quad (4.5)$$

Из системы двух трансцендентных уравнений (4.4), (4.5) для любого момента времени  $t > t_7$  находятся значения  $s^-(x_1)$ ,  $s^+(x_1)$ .

Система (4.4), (4.5) может быть решена графически (фиг. 8). Проведем касательные к кривой  $f(s)$  в точках  $s^-(x_1)$  и  $s^+(x_1)$  до пересечения с осью  $s=0$  в точках  $\Delta(s^-(x_1))$  и  $\Delta(s^+(x_1))$  соответственно. Абсцисса  $s_c$  точки  $C$  пересечения касательных равна  $s_7$ . Это дает возможность определять величины  $t$  и  $s^+(x_1)$  по заданному значению  $s^-(x_1)$ . Проведем касательную к кривой  $f(s)$  в точке  $s^-(x_1)$  до пересечения с прямой  $s=s_7$  в точке  $C$ . Проведем касательную к кривой  $f(s)$  из точки  $C$ . Абсцисса точки касания равна  $s^+(x_1)$ . Расстояние между точками пересечения касательных с осью  $s=0$  равно  $s_7/t$ , откуда определяем величину  $t$ .

Из (3.2) следует, что абсцисса точки пересечения касательной к кривой  $f(s)$  в точке  $s^-(x_1)$  с осью  $f=0$  равна средней водонасыщенности  $\langle s \rangle^-(x_1(t))$  (фиг. 8). Средняя водонасыщенность в зоне под границей  $x_1(t)$  равна абсциссе  $\langle s \rangle^+(x_1(t))$  точки пересечения касательной к кривой  $f(s)$  в точке  $s^+(x_1)$  с осью  $f=0$ .

На фиг. 7, б приведено распределение насыщенности в момент  $t_2 > t_7$ . В зоне всплывающей нефти насыщенность растет от  $s_A$  до  $s^-(x_1)$ ; в зоне опускающейся воды — от  $s^+(x_1)$  до  $s_B$ . При  $t \rightarrow \infty$  имеем  $s^- \rightarrow s_A$ ,  $s^+ \rightarrow s_B$ ,  $dx_1/dt \rightarrow 0$ . Предельное положение границы раздела  $x_1(\infty)$  определяется из условия баланса объема воды в пласте

$$s_A x_1(\infty) + s_B (1 - x_1(\infty)) = s_7$$

Отметим, что во всех рассмотренных случаях предельное состояние разделившихся фаз не зависит от начального распределения нефти и воды в пласте.

При расчете гравитационной сегрегации водонефтяной смеси  $s_7 = 0,6$  брались следующие значения  $\mu_1 = 10^{-3}$  Па·с,  $\rho_1 = 10^{-3}$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $\rho_2 = 0,8 \cdot 10^{-3}$  кг/м<sup>3</sup>,  $k = 0,01 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>,  $m = 0,1$ ,  $H = 400$  м. Фазовые проницаемости рассчитывались по формулам Чень Чжунсяна с величинами остаточной насыщенности для воды  $s_A = 0,2$  и нефти  $1 - s_B = 0,15$ . Геометрические построения дали  $s_8 = 0,48$ ,  $D_8 = 12$ ,  $s_9 = 0,76$ ,  $D_9 = 13$ . Смыкание фронтов произойдет в момент  $t_7 = 0,04$  при  $\tau = 0,04 \cdot 2 \cdot 10^9$  с =  $8 \cdot 10^7$  с. Система выходит на предельное состояние при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически. Для оценки харак-

терного времени сегрегации в качестве меры близости текущего состояния системы к предельному выбираем величину  $\langle s^- \rangle(t) - s_A = 0,1$ . Откладывая точку  $\langle s^- \rangle(t) = 0,3$  и проводя графические построения, получим характерное время разделения  $t = 0,13$ ,  $\tau = 0,13 \cdot 2 \cdot 10^9 \text{ с} = 26 \cdot 10^7 \text{ с}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
2. Швидлер М. И., Леви Б. И. Одномерная фильтрация несмешивающихся жидкостей. М.: Недра, 1970. 156 с.
3. Курант Г., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 427 с.
4. Каневская Р. Д., Лурье М. В., Максимов В. М., Филинов М. В. Точное решение задачи о циклической работе подземного хранилища газа.— Инж.-физ. журн., 1983, т. 44, № 4, с. 657–664.
5. Рыжик В. М., Хавкин А. Я. Модель учета капиллярного гистерезиса при исследовании процесса капиллярно-гравитационной сегрегации в нефтяном пласте.— В кн.: Физическое и математическое моделирование механизмов нефтегазоотдачи. М.: Наука, 1981, с. 38–44.
6. Бедриковецкий П. Г., Дорфман Я. Е. Нелинейные волны в процессах двухфазной трехкомпонентной фильтрации.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 1, с. 60–65.
7. Бедриковецкий П. Г., Каневская Р. Д., Лурье М. В. Эффекты неравновесной сорбции, растворения и теплообмена при вытеснении нефти активными жидкостями.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1324–1329.
8. Бернадинер М. Г., Енгов В. М., Уголева А. В. О развитой стадии неустойчивого вытеснения в пористой среде.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 2, с. 320–324. в. 245, 1242, р. 312–329.

Москва

Поступила в редакцию  
5.X.1984