

УДК 532.546

ОБ ОЦЕНКАХ РАСХОДА ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

ЕНТОВ В. М., КОСТЕРИН А. В., СКВОРЦОВ Э. В.

В ряде задач теории фильтрации основной интерес заключается в отыскании интегральных характеристик течения для областей, представляющих собой укрупненные трубки тока. (Такую область можно представить себе как результат непрерывной деформации цилиндра, боковая поверхность которого непроницаема, а осевая поверхность представляет собой поверхности постоянного напора — вход и выход фильтрационного потока. В плоском случае цилиндру соответствует прямоугльник.)

Чаще всего определению подлежит зависимость расхода Q фильтрационного потока от перепада напора H . В некоторых случаях удается получить верхние и нижние оценки для расхода, варьируя область фильтрации, поле фильтрационных сопротивлений или вид закона фильтрации [1–4].

В данной работе ставится задача отыскания формы области фиксированного объема (в плоском случае — площади), реализующей при заданных ограничениях экстремум расхода стационарного фильтрационного потока¹. Показано, что требование экстремальности приводит к дополнительному локальному условию на неизвестной части границы. Указан класс плоских задач, для которых возникающая краевая задача с неизвестной границей эффективно решается. Приведены примеры.

1. Рассмотрим установившееся течение однородной жидкости в области G с границей $\partial G = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_0$. Внутри области течения вектор скорости фильтрации w и напор h удовлетворяют системе уравнений [3, 4]

$$\operatorname{div} w = 0, \quad \nabla h = -\Phi(w, \rho)w/w \quad (1.1)$$

Здесь $\Phi(w, \rho)$ — монотонно возрастающая неотрицательная функция w , задающая вид закона фильтрации. Параметр $\rho(x)$ характеризует заданную неоднородность поля фильтрационных сопротивлений. Решение системы (1.1) отыскивается при краевых условиях

$$\begin{aligned} h(x) &= H_i, \quad x \in \Gamma_i, \quad i=1, 2 \\ w_n(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь H_i — заданные постоянные значения напора на «входе» и «выходе» фильтрационного потока, $H_1 - H_2 = H > 0$, w_n — нормальная составляющая скорости фильтрации на границе Γ_0 .

Для решения задачи (1.1), (1.2) справедливы двойственные вариационные принципы [4].

1. Истинное поле скоростей w минимизирует на классе соленоидальных в G векторных полей u с заданным суммарным расходом Q функционал

$$D^*[u] = \int_G D(u, \rho) dV; \quad Q = \int_{\Gamma_2} u_n dS; \quad D(u, \rho) = \int_0^u \Phi(v, \rho) dv \quad (1.3)$$

¹ Частные случаи указанной задачи рассмотрены в работе [9] и докладе В. М. Ентова и А. В. Костерина на VI Всесоюзном семинаре по численным методам решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости (Фрунзе, 1982).

2. Истинное поле напоров h минимизирует на классе скалярных полей Y , удовлетворяющих условиям $Y(x)=H_i, x \in \Gamma_i$, функционал

$$R^*[Y] = \int_G R(|\nabla Y|) dV; \quad R(y) = \int_0^y \Psi(\eta, \rho) d\eta \quad (1.4)$$

Здесь $\Psi(y, \rho)$ — функция, обратная $\Phi(w, \rho)$. Величины $D(u)$ и $R(y)$ представляют собой потенциал диссипации и дополнительный потенциал диссипации, а $D^*[u]$ и $R^*[Y]$ — полный потенциал диссипации и полный дополнительный потенциал диссипации. На решении справедливы формулы

$$D^*[w] + R^*[h] = QH, \quad dD^*/dQ = H, \quad dR^*/dH = Q \quad (1.5)$$

Зафиксируем H , выберем на поверхности входа или выхода участок $\Gamma_0 \subset \Gamma_i$ и будем варьировать границу области на этом участке. Применяя к функционалу (1.4) известную формулу для вариации интеграла с переменной областью интегрирования [5], получим

$$\delta R^*[h] = \int_G \left[-\nabla \left(\Psi(|\nabla h|) \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right) \delta^* h dV + \int_{\Gamma} \Psi(|\nabla h|) \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \mathbf{n} \delta^* h dS + \int_{\Gamma} R(|\nabla h|) \mathbf{n} \delta x dS \right] \quad (1.6)$$

Здесь $\delta h = \delta^* h + (\nabla h) \delta x$, причем $\delta^* h$ и δx — независимые вариации, δx — смещение точки области при варьировании, \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе области Γ . В неизменных точках границы Γ имеем $\mathbf{n} \delta x = 0$, на непроницаемой границе

$$\mathbf{n} \Phi(|\nabla h|) \nabla h / |\nabla h| = w_n = 0$$

на входной и выходной поверхностях $\delta h = 0$, а на их неизменной части $\delta^* h = 0$. Поэтому вариация (1.6) преобразуется к виду

$$\delta R^*[h] = - \int_G \nabla \left(\Psi(|\nabla h|) \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right) \delta^* h dV + \int_{\Gamma_0} [R(|\nabla h|) - \Psi(|\nabla h|) |\nabla h|] \mathbf{n} \delta x dS \quad (1.7)$$

Потребуем теперь, чтобы вариация (1.7) обращалась в нуль при независимом варьировании поля h и области, причем так, чтобы объем области оставался неизменным. Поскольку при этом

$$\delta V = \int_{\Gamma_0} \mathbf{n} \delta x dS = 0 \quad (1.8)$$

то из (1.7) имеем

$$\nabla [\Psi(|\nabla h|) \nabla h / |\nabla h|] = 0, \quad x \in G \quad (1.9)$$

$$\Psi \partial h / \partial n = 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad h = H_i, \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2 \quad (1.10)$$

$$[\Psi(|\nabla h|) |\nabla h| - R(|\nabla h|)] = \lambda = \text{const}, \quad x \in \Gamma_0 \quad (1.11)$$

Таким образом, краевая задача с неизвестной границей (1.9)–(1.11) (называемая далее задачей H) служит для отыскания неизвестного участка входной или выходной границы Γ_0 и распределения напора в соответствующей области G , исходя из условий экстремальности полного дополнительного потенциала диссипации R^* при фиксированном значении объема области. Если область однородна ($\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$), то условие

экстремальности (1.11) означает просто, что на неизвестном участке границы модуль градиента напора $|\nabla h|$ постоянен

$$|\nabla h|_{\Gamma_0} = g = \text{const}, \quad x \in \Gamma_0 \quad (1.12)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что необходимые условия экстремума функционала (1.3) на соленоидальных полях u с заданным суммарным расходом Q при условии, что варьируется участок γ_0 непроницаемой боковой границы, а объем области V фиксирован, имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi w/w &= -\nabla h, \quad \nabla w = 0, \quad x \in G \\ w_n &= 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad h = \text{const}, \quad x \in \Gamma_i \\ R(|\nabla h|) &= \text{const}, \quad x \in \gamma_0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Задача при условиях (1.13) далее называется задачей Q .

Последнее условие в (1.13) служит для отыскания неизвестного участка границы γ_0 . Если среда однородна, то она означает, что неизвестный участок границы является участком поверхности тока, на котором модуль скорости фильтрации постоянен.

2. Рассмотрим вопрос о характере достигаемого в задаче экстремума, ограничиваясь частным случаем однородной плоской области фильтрации и линейного закона фильтрации ($\Phi = \rho w$, $\rho = \text{const}$). При этом задача H может быть сформулирована в виде

$$\begin{aligned} \Delta h &= 0, \quad x \in G \\ \frac{\partial h}{\partial n} &= 0, \quad x \in \Gamma_G; \quad h = H_i, \quad x \in \Gamma_i, \quad i=1, 2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$w = \lambda, \quad x \in \Gamma_0 \quad (2.2)$$

Постоянная λ определяется из условия

$$\iint_G dx dy = S_0 \quad (2.3)$$

где S_0 — заданная площадь области фильтрации.

Справедлива теорема. Пусть $h_0(x, y)$ — решение задачи (2.1)–(2.3) для трубки тока G_0 с выпуклым участком Γ_0 . Тогда вторая вариация функционала R^* на этом решении положительна, и оно реализует локальный минимум расхода.

Доказательство. Следуя [6], перейдем от функционала с переменной областью интегрирования к функционалу с фиксированной областью. Пусть $t = \xi + i\eta = -iW(z) = \psi + ikh_0$, где $W(z)$ — комплексный потенциал течения, соответствующий решению $h_0(x, y)$, ψ — функция тока, $k = \rho^{-1}$ — коэффициент фильтрации, $z = x + iy$.

Поскольку любое плоское течение может быть локально продолжено через свободную границу [7], аналитическая функция $t(z)$ определена в некоторой области $G^+ = G_0 \cup G_1$, причем $\bar{G}_0 \cap \bar{G}_1 = \Gamma_0$. Будем производить локальные вариации линии Γ_0 , не покидая области G^+ . Всем областям G , получающимся при таком варьировании, соответствует фиксированный прямоугольник Ω в плоскости (ξ, h) .

С помощью отображения $t(z)$ определим функцию $\eta(\xi, h)$ равенством

$$h = h[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$$

где $h(x, y)$ — решение задачи (2.1) для трубки тока G . В новых переменных функционал R^* принимает вид

$$J(\eta) = \iint_{\Omega} \frac{1 + \eta_{\xi}^2}{\eta_h} d\xi dh \quad (2.4)$$

а площадь S_0 области фильтрации определяется выражением

$$S_0 = \int_{\Omega} \int f(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial h} d\xi dh \quad (2.5)$$

где $f = |dz/dt|^2$; функция $t(z)$ определена выше.

Зависимость функции η от параметра варьирования ε введем следующим образом. Пусть Γ_0 и Γ_* — допустимые кривые, G и G_* — ограниченные ими области, имеющие площадь S_0 , \mathbf{n}_0 — местная нормаль в точке \mathbf{x}_0 кривой Γ_0 . Кривая Γ_* может быть задана уравнением

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{x}_0 + \gamma(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}_0$$

где γ — скалярный параметр. Тогда кривая Γ_ε с уравнением

$$\mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \gamma(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}_0$$

является допустимой при любом $\varepsilon \in [0, 1]$. Решение задачи (2.1) для трубки тока G_ε , соответствующей кривой Γ_ε , определяет функцию $\eta(\xi, h, \varepsilon)$.

Обозначим

$$\alpha(\xi, h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial h / \partial \varepsilon, \quad \beta(\xi, h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial^2 \eta / \partial \varepsilon^2, \quad \overset{\circ}{\eta} = \eta(\xi, h, 0)$$

Непосредственные вычисления показывают, что вторая вариация функционала (2.4) может быть представлена в виде

$$\delta^2 J = 2 \int_{\Omega} \int \frac{1}{\eta_h^3} [(\alpha_\xi \overset{\circ}{\eta}_h - \alpha_h \overset{\circ}{\eta}_\xi)^2 + \alpha_h^2] d\xi dh - \int_{\delta_0} \beta \frac{1 + \overset{\circ}{\eta}_\xi^2}{\eta_h^2} d\xi$$

где δ_0 — образ линии Γ_0 в плоскости $(\xi, h)^2$. На исходном решении $\overset{\circ}{\eta} = kh_0$, поэтому $\eta_h = k$, и для положительности $\delta^2 J$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma = - \int_{\delta_0} \beta \frac{1 + \overset{\circ}{\eta}_\xi^2}{\eta_h^2} d\xi \geq 0.$$

Докажем его для выпуклой линии Γ_0 . На свободной границе имеем

$$\frac{1 + \overset{\circ}{\eta}_h^2}{\eta_h^2} = \left(\frac{\partial h_0}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial \eta} \right)^2 = \left| \frac{\partial z}{\partial t} \right|^2 \left[\left(\frac{\partial h_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial y} \right)^2 \right] = \left(\frac{\lambda}{k} \right)^2 f$$

следовательно,

$$\sigma = - \left(\frac{\lambda}{k} \right)^2 \int_{\delta_0} \beta f d\xi$$

Далее, на основании (2.5)

$$\delta^2 S_0 = \int_{\delta_0} (\beta f + \alpha^2 f_\eta) d\xi = 0$$

поэтому

$$\sigma = \int_{\delta_0} \alpha^2 f_\eta d\xi$$

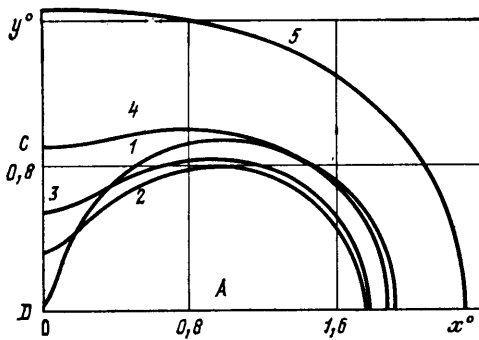
Используем связь функции $f(\xi, \eta)$ со скоростью фильтрации: $f = |dz/dt|^2 = |dz/dW|^2 = 1/w^2$. Отсюда имеем $f_\eta = -(2/w^3) \partial w / \partial \eta$. В силу выпуклости линии Γ_0 (ее центр кривизны должен лежать в области G_0) $\partial w / \partial \eta < 0$, $\partial f / \partial \eta > 0$, на δ_0 , и $\sigma > 0$. Теорема доказана.

² В работе [9] предполагалась линейная зависимость $\eta(\xi, h, \varepsilon)$ от ε , поэтому контурный интеграл в $\delta^2 J$ не был учтен.

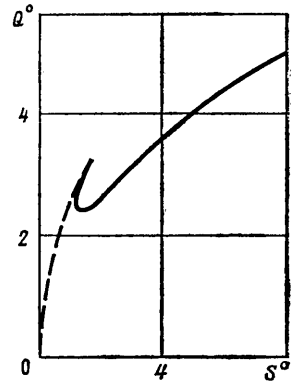
3. В качестве примера рассмотрим плоскую задачу о течении к контуру питания ($h=0$) от кругового источника AA' (скважины $h=H$) вблизи непроницаемой границы CD (фиг. 1). Форма контура питания Γ_1 неизвестна и отыскивается из условия минимальности расхода при фиксированной площади области фильтрации. Считая пласт однородным, а течение следующим законом Дарси, имеем задачу

$$\begin{aligned} \Delta h &= 0, \quad z \in G_z \\ h &= 0, \quad z \in A'A; \quad h = H, \quad \partial h / \partial n = \lambda, \quad z \in \Gamma_1 \\ \partial h / \partial n &= 0, \quad z \in CDA' \cup AB \end{aligned} \quad (3.1)$$

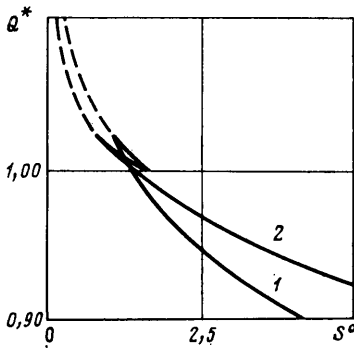
Ограничимся простейшим случаем, когда контур $A'A$ стягивается в точку, что соответствует скважине пренебрежимо малого радиуса. При



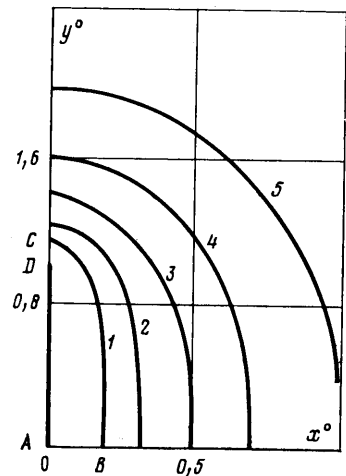
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

этом поле скоростей определяется с точностью до множителя, однако положение линии Γ_1 , отвечающее заданной площади области фильтрации, оказывается вполне определенным.

Решение задачи строится методами теории струй [8] и имеет вид [9]

$$z = \frac{Q(1-a^4)}{\pi\lambda} \left[\frac{t}{1-a^2t^2} + \frac{1}{2a} \ln \frac{1+at}{1-at} \right] \quad (3.2)$$

$$S_0 = \frac{\pi}{4} \left[\frac{Q(1-a^4)}{\pi\lambda} \right]^2 \left[\frac{3-a^4}{(1-a^4)^2} + \frac{1}{2a^2} \ln \frac{1+a^2}{1-a^2} \right] \quad (3.3)$$

Здесь t — вспомогательная комплексная переменная, Q — расход. На фиг. 1 приведены искомые границы течения (кривые 1–5), построенные по формуле (3.2) в безразмерных координатах $x^\circ = x/l$, $y^\circ = y/l$. Соответствующие значения безразмерных параметров $Q^\circ = Q/(\lambda l)$ и $S^\circ = S_0/l^2$ даны в колонке 1 таблицы (N — номер кривой). Кривая 3 отвечает случаю наименьшего расхода. На фиг. 2 сплошной линией изображена зависимость $Q^\circ(S^\circ)$. Обращает на себя внимание неоднозначность связи между Q° и S° в интервале $1,110 < S^\circ < \pi/2$, где при фиксированной величине S° имеется два решения задачи (3.1), что свидетельствует о нетривиальности вопросов существования и единственности решения в данном случае. Можно лишь утверждать здесь, что решение задачи о минимуме расхода при фиксированной площади (если оно существует) принадлежит множе-

N	a		S°		Q°	
	1	2	1	2	1	2
1	0,990	0,99	1,372	0,297	5,809	1,262
2	0,913	0,9	1,110	0,533	4,782	1,470
3	0,832	0,7	1,203	0,906	4,602	1,780
4	0,700	0,5	1,621	1,430	4,901	2,170
5	0,500	0,3	3,144	2,537	6,419	2,846

ству решений задачи H . Заметим, что при $S^\circ > 2,361$ граница Γ_1 выпукла и, согласно доказанной теореме, на решении реализуется минимум расхода.

Штриховой линией на фиг. 2 показано решение для схемы с одномерным течением, когда искомая граница — окружность радиуса $R \leq l$. При $S^\circ = \pi/2$ кривые, соответствующие различным схемам течения, касаются друг друга.

Вернемся теперь к исходной постановке задачи (3.1). В области изменения t круговому источнику $A'A$ малого по сравнению с l радиуса r соответствует линия, близкая к окружности малого по сравнению с единицей радиуса. Это позволяет использовать формулы (3.2), (3.3) для анализа решения задачи (3.1).

Введем безразмерный параметр $Q^* = [Q/(\pi H)] \ln(l/r)$. Формула (3.2) дает возможность выразить его через параметр a и отношение l/r

$$Q^* = \ln \frac{l}{r} \left[\ln \frac{l}{rf(a)} \right]^{-1}, \quad f(a) = a^2 + \frac{1-a^4}{2} \ln \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

Безразмерная площадь вычисляется по формуле

$$S^\circ = \frac{1}{4} [2a^2 + (1-a^4)f(a)] / f^2(a)$$

В случае одномерного течения имеем

$$Q^* = \ln \frac{l}{r} \left[\ln \left(\frac{l}{r} \sqrt{\frac{2S^\circ}{\pi}} \right) \right]^{-1}$$

На фиг. 3 изображены кривые зависимостей $Q^* = Q^*(S^\circ)$ при $l/r = 10^4$ и 10^6 (соответственно 1 и 2). В интервалах $1,110 \leq S^\circ \leq \pi/2$ штриховая кривая практически сливается с верхней ветвью сплошной; на концах интервала имеются точки возврата.

В качестве второго примера рассмотрим фильтрацию от искомого контура питания BC ($h=H$) к прямолинейной щели AD ($h=0$) (фиг. 4). Пусть $y_0 = kH$, λ — модуль скорости фильтрации на искомой границе BC .

Используя метод особых точек, можно получить связь между вспомогательной переменной t , комплексной координатой z и потенциалом W

в виде

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\lambda}{t^{1/2}}, \quad z(t) = \frac{Q}{2\lambda K(a)a^{1/2}} \arccos \frac{1+a^2-2at}{1-a^2} \quad (3.4)$$

где Q — расход, $K(a)$ — полный эллиптический интеграл. Отсюда можно получить уравнение границы BC и формулы, связывающие расход Q , перепад напора φ_0 и площадь области фильтрации S_0 с вспомогательным параметром a в виде

$$\frac{z(\sigma)}{l} = \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\alpha \cos(\sigma/2)}{\sqrt{1+\alpha^2 \sin^2(\sigma/2)}} + i \ln \left[\sqrt{1+\alpha^2 \sin^2(\sigma/2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \sin \frac{\sigma}{2} \right] \right\} \left(\ln \frac{1+a}{1-a} \right)^{-1}, \quad \alpha = \frac{2a^{1/2}}{1-a}, \quad t = e^{i\sigma}, \quad S^\circ = \frac{S_0}{l^2} = \frac{\pi}{2} \left(\ln \frac{1+a}{1-a} \right)^{-1}$$

$$\frac{\varphi_0}{\lambda l} = 2\sqrt{a} F \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+a}}, \sqrt{1-a^2} \right) \left(\ln \frac{1+a}{1-a} \right)^{-1}$$

$$Q^\circ = \frac{Q}{\lambda l} = 2\sqrt{a} K(a) \left(\ln \frac{1+a}{1-a} \right)^{-1}$$

Здесь F — эллиптический интеграл первого рода. Функция $S^\circ = f(a)$ монотонно убывает от бесконечности до нуля при возрастании параметра a от нуля до единицы, поэтому в рамках принятой схемы течения задача разрешима при любом значении S° .

Поскольку свободная граница выпукла при всех значениях a , полученное решение дает минимум расхода при фиксированной площади области фильтрации.

Рассмотренная задача в силу очевидных аналогий может трактоваться также, как задача об оптимальной (обеспечивающей минимум веса при фиксированном суммарном потоке тепла) форме тепловой изоляции источника в виде длинной тонкой полосы.

На фиг. 4 изображены искомые границы (кривые 1–5). Соответствующие значения безразмерных параметров даны в колонке 2 таблицы.

В приведенных примерах заданные участки границы $\Gamma = \partial G$ были полигональными. Методы теории струй позволяют решать задачи и с криволинейными известными участками границы. Далее, задача H на плоскости может быть эффективно решена в ряде случаев и для нелинейных законов фильтрации, если воспользоваться линеаризующими преобразованиями годографа или Лежандра, широко применяемыми в теории фильтрации [3]. Соответствующая экстремальная область будет реализовывать экстремум функционала R^* . Если закон фильтрации степенной, то эта область реализует также экстремум расхода фильтрационного потока при фиксированном перепаде напора, поскольку для степенного закона фильтрации $\Phi = w^s$ имеет место тождество $QH = (s+1)D^* = sR^*$.

Отметим в заключение, что развитый в данной работе подход может иметь приложения по крайней мере в двух аспектах. Прежде всего он позволяет непосредственно получить явное решение ряда оптимизационных задач, аналогичных описанной выше задаче о минимизации веса тепловой изоляции, обеспечивающей заданное тепловое сопротивление. С другой стороны, если установить строгие верхние или нижние оценки для фильтрационного расхода для класса областей заданной площади, эти методы могут быть использованы для оценки возможных фильтрационных расходов в тех случаях, когда форма области задана с некоторой неопределенностью подобно другим качественным оценкам (см. подробнее [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Положий Г. Н. Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации.— Укр. матем. журн., 1953, т. 5, № 4, с. 380—400.
2. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 136 с.
3. Бернадинер М. Г., Енгов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
4. Енгов В. М. Некоторые проблемы математической теории нелинейной фильтрации.— В кн.: Зап. науч. семинаров. Ленингр. отд-ние Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1980, т. 96, с. 30—38.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1933. 525 с.
6. Friedrichs K. Über ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freien Rande.— *Mathematische Annalen.*, 1933, В. 109, s. 60—82.
7. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
8. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
9. Костерин А. В., Скворцов Э. В. Об оценке минимального расхода при заданной площади области фильтрации.— В сб.: Исследования по подземной гидромеханике. Вып. 6. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1983, с. 47—57.
10. Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.

Москва,
Казань

Поступила в редакцию
14.I.1985