

УДК 532.542:532.526

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА СТЕНКАХ ПЛОСКОГО КАНАЛА

РУБАН А. И., ТИМОШИН С. Н.

Рассматривается взаимодействие пограничного слоя с невязкой частью течения при ламинарном установившемся движении совершенного газа в плоском симметричном канале при больших характерных числах Рейнольдса. Область взаимодействия располагается на большом расстоянии от начального сечения канала и имеет продольный размер, по порядку величины превышающий ширину канала. Показано, что при сверхзвуковых скоростях потока в основной части канала возмущения, вносимые в пограничный слой, затухают по экспоненциальному закону вверх по потоку от источника возмущений. В случае дозвукового течения, как и в несжимаемой жидкости, распространение возмущений вверх по потоку отсутствует.

Явление распространения возмущений в пограничном слое вверх по потоку от источника возмущений встречается во многих задачах динамики жидкости и газа при больших числах Рейнольдса. Рациональное математическое описание этого явления было получено в рамках асимптотической теории взаимодействия пограничного слоя с невязкой частью течения (см. обзоры [1, 2]). В настоящей работе рассматривается один из возможных режимов взаимодействия при стационарном движении совершенного газа в плоском симметричном канале (обзор различных типов взаимодействия для внутренних течений несжимаемой жидкости дан в [2]). Основное внимание уделяется особенностям сверхзвукового и дозвукового режимов течения в достаточно длинных каналах.

1. Физические причины, приводящие к взаимодействию пограничного слоя с потенциальной частью течения, могут быть самыми разнообразными. Для наглядности в настоящей работе предполагается, что взаимодействие обусловлено малой деформацией стенок канала; вне деформированного участка стенки канала параллельны. Характерные линейные размеры деформации стенки подбираются совпадающими с соответствующими масштабами вязкого подслоя области взаимодействия.

Предположим, что в начальном сечении канала параметры газа имеют однородные распределения, а вектор скорости направлен вдоль оси симметрии. Характерное число Рейнольдса Re , посчитанное по ширине входного сечения канала d и значениям параметров газа на входе, будем считать величиной, гораздо большей единицы. При этих условиях вдоль стенок канала образуются вязкие пограничные слои, окружающие равномерный поток в ядре канала. Будем считать, что расстояние от начального сечения канала до области взаимодействия L удовлетворяет условию $L \ll Re d$ при $Re \gg 1$, так что в окрестности деформированного участка невозмущенные пограничные слои занимают малую часть канала.

Введем прямоугольную декартову систему координат xz , начало которой расположено на середине входного сечения канала, а ось x направлена вниз по потоку вдоль линии симметрии (фигура). Продольную и поперечную составляющие вектора скорости в указанной системе координат обозначим через u и v , для давления, плотности и динамического коэффициента вязкости газа примем обозначения p , ρ и μ соответственно. Параметры газа на входе в канал отметим нижним индексом нуль; в частности, при $x=0$, $u=u_0$, $v=0$. Введем характерное число Рейнольдса $Re = \rho_0 u_0 d \mu_0^{-1} \gg 1$. Кроме того, будем считать, что число Маха в началь-

ном сечении M_0 отличается от единицы на конечную величину. Отношение удельных теплоемкостей газа обозначим через γ .

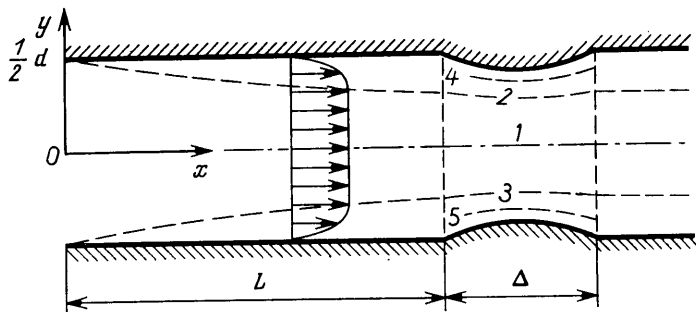
Если Δ — продольный размер деформированного участка канала, то форму канала можно описать следующими соотношениями:

$$y = \pm \frac{1}{2} d, \quad 0 \leq x \leq L, \quad x \geq L + \Delta$$

$$y = \pm \left[\frac{1}{2} d + hf \left(\frac{x-L}{\Delta} \right) \right], \quad L \leq x \leq L + \Delta$$

Здесь h — характерный поперечный масштаб деформации, а f — функция, характеризующая форму деформации стенок канала.

В зависимости от расстояния между начальным сечением канала и деформированным участком реализуются различные режимы взаимодей-



ствия. Если $L \ll d Re^{3/5}$, то продольный размер области взаимодействия мал по сравнению с шириной канала [3, 4], т. е. вблизи верхней и нижней стенок канала независимо друг от друга существуют две области взаимодействия; движение газа в каждой из этих областей описывается известной трехслойной схемой взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком (см., например, [1, 2]).

Если $L \sim d Re^{3/5}$, то $\Delta \sim d$ и пристеночные вязкие слои начинают взаимодействовать не только с потенциальной областью течения, но и друг с другом посредством потенциальной области. Подобный режим течения в случае несжимаемой жидкости изучался в [3, 4]. Не составляет большого труда формальное распространение такого режима взаимодействия на случай конечных чисел Маха. Впрочем, свойства дозвукового и сверхзвукового режимов взаимодействия в этом случае оказываются схожими, что объясняется главным образом наличием перепада давления поперек основной части канала.

В настоящей работе предполагается, что

$$d Re^{3/5} \ll L \ll d Re \quad (1.1)$$

При таких ограничениях на величину L решение для невязкой части течения оказывается достаточно простым и различия между до- и сверхзвуковым режимами течения становятся особенно рельефными.

Предположим, что расстояние L известно и установим порядки основных величин в области взаимодействия. Толщина невозмущенного пограничного слоя перед областью взаимодействия по порядку величины равна $\delta = (Ld Re^{-1})^{1/2}$. Область взаимодействия распадается на пять подобластей (фигура). В основной части канала (область 1) под воздействием деформации стенок генерируются слабые возмущения однородного потока газа. Вблизи твердых границ потока имеются завихренные слои толщиной порядка δ (области 2, 3), где возмущения также носят линейный характер. В областях 1, 2 и 3 действие сил вязкости пренебрежимо мало; для того чтобы удовлетворить условиям прилипания, на стенках канала вводятся

вязкие подобласти 4 и 5, толщину которых обозначим через h , $h \ll \delta$. Продольная составляющая вектора скорости в вязком подслое имеет порядок $u \sim u_0 h \delta^{-1}$. Обозначим через p' переменную часть давления в области взаимодействия и, полагая, что деформация стенок канала создает нелинейные возмущения в вязком подслое, из условия баланса градиента давления, вязких и конвективных членов в продольном уравнении импульсов системы уравнений Навье – Стокса находим, что

$$\frac{\rho_0 u_0^2}{\Delta} \left(\frac{h}{\delta} \right)^2 \sim \frac{p'}{\Delta} \sim \mu_0 u_0 \frac{1}{h \delta} \quad (1.2)$$

Наклон линий тока, который создается на внешней границе вязкого подслоя области взаимодействия $\theta \sim v u^{-1} \sim h \Delta^{-1}$, как обычно [1, 2], передается без изменения на внешнюю границу всего пограничного слоя в целом и вызывает возмущение давления в основной части канала, которое обозначим через p'' . Порядок величины p'' можно оценить следующим образом. Так как в основной части канала $u \sim u_0$, то поперечная составляющая вектора скорости, индуцированная наклоном линий тока θ имеет порядок $v'' \sim u_0 \theta \sim u_0 h \Delta^{-1}$. Из уравнения неразрывности следует, что поправка к продольной составляющей вектора скорости имеет порядок $u'' \sim v'' \Delta d^{-1} \sim u_0 h \delta^{-1}$ (предполагается, что продольный размер области взаимодействия по порядку величины не меньше ширины канала). Наконец, из условия баланса инерционных членов и градиента давления в уравнении импульсов в проекции на ось абсцисс находим, что $p'' \sim \rho_0 u_0 u'' \sim \rho_0 u_0^2 h \delta^{-1}$. Режим взаимодействия пограничного слоя с невязкой частью течения реализуется при условии, что перепад давления p' , действующий в вязком подслое, совпадает по порядку величины с давлением, индуцированным наклоном линий тока θ , т. е. $p' \sim p'' \sim \rho_0 u_0^2 h \delta^{-1}$. Тогда из этого соотношения и (1.2) следует, что такой режим течения реализуется при

$$\Delta = O(\text{Re}^{-1/2} L^{5/2} d^{-3/4}) \quad (1.3)$$

причем $p' \sim \rho_0 u_0^2 \varepsilon^2$, $h \sim d \varepsilon^2$, где $\varepsilon = \delta d^{-1}$ – относительная толщина пограничного слоя перед деформацией. Подчеркнем, что в силу (1.1) и (1.3) продольный размер области взаимодействия Δ гораздо больше ширины канала d , но мал по сравнению с расстоянием от входа в канал до области взаимодействия L .

2. Асимптотический анализ решения уравнений Навье – Стокса в области взаимодействия выполним в безразмерных переменных. Положим

$$x_1 = \frac{x-L}{\Delta}, \quad y_1 = \frac{y}{d}, \quad u_1 = \frac{u}{u_0}, \quad v_1 = \frac{v}{u_0}$$

$$p_1 = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \quad \rho_1 = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\text{Re} \gg 1, \quad \varepsilon = \left(\frac{L}{d \text{Re}} \right)^{1/2} \ll 1, \quad \Delta d^{-1} = \text{Re} \varepsilon^5 \gg 1, \quad h_1 = h d^{-1} \varepsilon^{-2} = O(1)$$

Предполагая, что течение симметрично относительно продольной оси, ограничимся изучением области течения, расположенной ниже линии $y=0$.

В основной части канала в области взаимодействия ($x_1 = O(1)$, $y_1 = O(1)$), в согласии со сделанными выше оценками, представим решение в виде

$$u_1 = 1 + \varepsilon^2 u_{10}(x_1, y_1) + \dots, \quad v_1 = \text{Re}^{-1} \varepsilon^{-3} v_{10}(x_1, y_1) + \dots \quad (2.1)$$

$$p_1 = \frac{1}{\gamma M_0^2} + \varepsilon^2 p_{10}(x_1, y_1) + \dots, \quad \rho_1 = 1 + \varepsilon^2 \rho_{10}(x_1, y_1) + \dots$$

В разложениях (2.1) опущены слагаемые, обусловленные вытесняющим действием невозмущенных пограничных слоев. Как следует из работ [3, 4], подобные члены не оказывают влияния на движение в вязких подслоях области взаимодействия в главном приближении.

Подстановка разложений (2.1) в уравнения Навье — Стокса показывает, что неизвестные коэффициенты разложений удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{10}}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial p_{10}}{\partial y_1} = 0, \quad \rho_{10} = M_0^2 p_{10} \end{aligned}$$

Отсюда и из условия симметрии течения находим

$$p_{10} = p_{10}(x_1), \quad u_{10} = -p_{10}(x_1), \quad v_{10} = y_1(1 - M_0^2) \frac{dp_{10}(x_1)}{dx_1}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим движение в вихревом слое, который представляет собой основную часть невозмущенного пограничного слоя на нижней стенке канала. Здесь решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= O(1), \quad y_2 = \varepsilon^{-1} \left(\frac{1}{2} + y_1 \right) = O(1) \\ u_1 &= u_{20}(y_2) + \varepsilon u_{21}(x_1, y_2) + \dots, \quad v_1 = \text{Re}^{-1} \varepsilon^{-3} v_{21}(x_1, y_2) + \dots \\ p_1 &= \frac{1}{\gamma M_0^2} + \varepsilon^2 p_{21}(x_1, y_2) + \dots, \quad \rho_1 = \rho_{20}(y_2) + \varepsilon \rho_{21}(x_1, y_2) + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя разложения (2.3) в уравнения Навье — Стокса и решая полученную таким образом систему уравнений для коэффициентов разложения с учетом условия сращивания с решением (2.1), (2.2), находим

$$\begin{aligned} u_{21} &= \frac{1}{2} (1 - M_0^2) p_{10}(x_1) \frac{du_{20}(y_2)}{\partial y_2}, \quad v_{21} = -\frac{1}{2} (1 - M_0^2) \frac{dp_{10}(x_1)}{dx_1} u_{20}(y_2) \\ p_{21} &= p_{10}(x_1) \end{aligned}$$

Остается рассмотреть движение в вязком пристеночном слое, который имеет толщину того же порядка, что и поперечный масштаб деформации стенок канала. Положим

$$\begin{aligned} x_1 &= O(1), \quad y_3 = \varepsilon^{-2} \left(\frac{1}{2} + y_1 \right) = O(1) \\ u_1 &= \varepsilon u_{30}(x_1, y_3) + \dots, \quad v_1 = \text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2} v_{30}(x_1, y_3) + \dots \\ p_1 &= \frac{1}{\gamma M_0^2} + \varepsilon^2 p_{30}(x_1, y_3) + \dots, \quad \rho_1 = \rho_w + \dots, \quad \mu_1 = \mu_w + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Постоянные ρ_w и μ_w , равные соответственно безразмерным плотности и динамическому коэффициенту вязкости газа вблизи твердых границ канала перед областью взаимодействия, предполагаются отличными от нуля. Подстановка разложений (2.4) в уравнения Навье — Стокса дает систему уравнений пограничного слоя в несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \rho_w \left(u_{30} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_1} + v_{30} \frac{\partial u_{30}}{\partial y_3} \right) + \frac{\partial p_{30}}{\partial x_1} &= \mu_w \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial u_{30}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{30}}{\partial y_3} &= 0, \quad \frac{\partial p_{30}}{\partial y_3} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эта система уравнений должна быть дополнена условиями прилипания на твердой поверхности, условиями срачивания с потоком перед областью взаимодействия, а также условиями срачивания с вихревым слоем, расположенным над вязким подслоем

$$u_{30}=v_{30}=0 \quad (y_3=h_1 f(x_1)) \quad (2.6)$$

$$u_{30}-\lambda_w y_3 \rightarrow 0, \quad v_{30} \rightarrow 0, \quad p_{30} \rightarrow 0 \quad (x_1 \rightarrow -\infty) \quad (2.7)$$

$$\lambda_w = \left. \frac{du_{20}(y_2)}{dy_2} \right|_{y_2=0} = \text{const}$$

$$u_{30}-\lambda_w y_3 \rightarrow \frac{1}{2} \lambda_w (1-M_0^2) p_{10}(x_1), \quad (2.8)$$

$$p_{30} \rightarrow p_{10}(x_1) \quad (y_3 \rightarrow +\infty)$$

3. Сформулированная выше краевая задача (2.5)–(2.8) обладает двумя характерными особенностями. Во-первых, толщина вытеснения вязкого подслоя пропорциональна давлению, действующему в вязком подслое. Кроме того, коэффициент пропорциональности в этом соотношении при переходе через скорость звука меняет знак.

Традиционный способ исследования общих свойств задачи о взаимодействии заключается в решении линеаризованной системы уравнений. Для этого предположим, что $h_1 \ll 1$; решение задачи (2.5)–(2.8) будем искать в виде

$$u_{30} = \lambda_w y_3 + h_1 U(x_1, y_3) + O(h_1^2)$$

$$v_{30} = h_1 V(x_1, y_3) + O(h_1^2), \quad p_{30} = h_1 P(x_1) + O(h_1^2)$$

Краевая задача для неизвестных коэффициентов первого приближения имеет вид

$$\rho_w \lambda_w \left(y_3 \frac{\partial U}{\partial x_1} + V \right) + \frac{dP}{dx_1} = \mu_w \frac{\partial^2 U}{dy_3^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_3} = 0 \quad (3.1)$$

$$U = -\lambda_w f(x_1), \quad V = 0 \quad (y_3 = 0)$$

$$U \rightarrow \frac{1}{2} \lambda_w (1-M_0^2) P \quad (y_3 \rightarrow +\infty)$$

Предполагая, что вместе с функцией $f(x_1)$ решение задачи (3.1) достаточно быстро затухает при $x_1 \rightarrow \pm\infty$, введем преобразование Фурье вида

$$f^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x_1} f(x_1) dx_1$$

После выполнения преобразования Фурье в краевой задаче (3.1) и решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения можно получить, что

$$P^*(\omega) = - \frac{k_0 f^*(\omega)}{k_1 + (-i\omega)^{1/2}}$$

$$k_0 = -3\lambda_w^{5/3} \mu_w^{1/3} \rho_w^{2/3} Ai'(0)$$

где k_0 — положительная постоянная, $Ai'(0) = -0,2588$ — производная функции Эйри в нуле, $k_1 = 1/2 k_0 (1-M_0^2)$.

Для выбора регулярной ветви функции $(-i\omega)^{1/2}$ в комплексной плоскости ω был сделан разрез вдоль отрицательной мнимой полуоси и предполагалось, что $-\pi/2 \leq \arg \omega \leq 3\pi/2$.

Выполняя обратное преобразование Фурье, с учетом знака величины k_1 можно получить выражение для давления вида

$$P(x_1) = -\frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) f(x_1 - s) ds \quad (3.2)$$

$$k_1 > 0: \quad g(s) = 0, \quad s < 0; \quad g(s) = \sqrt[3]{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/3} e^{-st} dt}{k_1^2 + k_1 t^{1/3} + t^{2/3}}, \quad s > 0 \quad (3.3)$$

$$k_1 < 0: \quad g(s) = -6\pi k_1^2 \exp(-k_1^3 s), \quad s < 0; \quad (3.4)$$

$$g(s) = \sqrt[3]{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/3} e^{-st} dt}{k_1^2 + k_1 t^{1/3} + t^{2/3}}, \quad s > 0$$

Здесь (3.3) и (3.4) соответственно для дозвукового и сверхзвукового течений.

Рассматривая вопрос о характере влияния деформации стенок канала на течение перед деформацией предположим, что $f(x_1) = 0$ при $x_1 < 0$. Тогда из (3.2)–(3.4) следует, что если $M_0 < 1$, то $P(x_1) = 0$ при $x_1 < 0$, в то время как при $M_0 > 1$ и $x_1 < 0$

$$P(x_1) = 3k_0 k_1^2 \exp(-k_1^3 x_1) \int_0^{+\infty} f(s) \exp(k_1^3 s) ds$$

Итак, в дозвуковом режиме взаимодействия возмущения, вносимые в пограничный слой, не оказывают влияния на течение вверх по потоку от источника возмущений; этот вывод согласуется с результатами исследования движения несжимаемой жидкости [3, 4]. Для сверхзвукового режима взаимодействия характерно затухание возмущений вверх по потоку по экспоненциальному закону.

Явление распространения возмущений вверх по потоку от области взаимодействия объясняется особым видом краевой задачи для системы уравнений пограничного слоя: в отличие от традиционного подхода Прандтля функция давления не задается внешним течением, а находится в процессе решения самой краевой задачи [5]. В рассмотренном выше примере условие взаимодействия записано в форме (2.8) и характер распространения возмущений в данном случае определяется знаком коэффициента $1 - M_0^2$ в первом из соотношений (2.8).

Авторы благодарят В. В. Сычева за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. — Успехи механики, 1979, т. 2, вып. 4, с. 57–95.
2. Smith F. T. On the high Reynolds number theory of laminar flows. — IMA J. Appl. Math., 1982, v. 28, № 3, p. 207–281.
3. Smith F. T. On entry-flow effects in bifurcating, blocked or constricted tubes. — J. Fluid Mech., 1976, v. 78, № 4, p. 709–736.
4. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О свободных колебаниях вязкой несжимаемой жидкости в полубесконечном канале. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 64–72.
5. Нейланд В. Я. К асимптотической теории взаимодействия сверхзвукового потока с пограничным слоем. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 4, с. 41–47.

Москва

Поступила в редакцию
18.VII.1985