

УДК 532.529.5:541.115

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПРИ ГОРЕНИИ АЭРОВЗВЕСИ
НИЗКОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ**

ВАЙНШТЕЙН П. Б.

Конвективное горение аэровзвесей в общем случае описывается уравнениями механики многофазных сред [1]. Если пренебречь объемным содержанием частиц и предположить, что частицы на начальном этапе распространения конвективного фронта неподвижны, а их температура при горении постоянна, то уравнения для описания горения сводятся к уравнениям газовой динамики при распределенном подводе массы и тепла [2, 3].

В данной работе с использованием таких уравнений и модельной кинетики постоянной массовой скорости горения решается плоская одномерная задача о горении аэровзвеси в части области, ограниченной с одной стороны неподвижной стенкой. В рассмотрение вводится малый параметр, пропорциональный массовой концентрации и теплотворной способности топлива. Применяется метод срачивания асимптотических разложений [4], в соответствии с которым строится равномерно пригодное первое приближение. Полученное решение описывает распространение волн при горении аэровзвесей. Результирующая картина включает наклонную волну сжатия, распространяющуюся со скоростью звука, и следующий за ней конвективный фронт горячих продуктов реакции, скорость распространения которого гораздо меньше (в соответствии с введенным малым параметром) скорости звука.

Пусть горение происходит в части $0 \leq x \leq x_0$ полупространства. Примем, что термодинамические свойства выделяющихся продуктов реакции и основного газа совпадают. Уравнения газовой динамики при распределенном подводе массы и тепла в этом случае имеют вид [3]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = J, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -Jv \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma \frac{\partial p v}{\partial x} - (\gamma - 1)v \frac{\partial p}{\partial x} = (\gamma - 1)JQ, \quad J = J_0 \chi(x_0 - x)$$

$$Q = c_2(T_s - T_0) + Q_0 + c_p T_0$$

Здесь J_0 — постоянная массовая интенсивность горения, χ — единичная функция, равная единице при $x \leq x_0$ и нулю при $x > x_0$, T_s и Q_0 — температура и теплотворная способность горения, γ и c_p — показатель адиабаты газа и его теплоемкость при постоянном давлении. Член Jv в правой части уравнения импульсов определяет воздействие, связанное с тем, что газ в зоне горения подводится с нулевой скоростью (скоростью покоящихся частиц).

Перейдем к безразмерным переменным. Пространственную переменную обезразмерим на x_0 , скорость — на начальную скорость звука в газе a_0 , плотность — на начальную плотность газа ρ_0 . Далее, производные по размерности переменные: время — на x_0/a_0 , давление на $-\rho_0 a_0^2$, интенсивность горения — на J_0 . Система уравнений (1) в безразмерных переменных (при сохранении для безразмерных величин обозначений), а также начальные и граничные условия исследуемой задачи примут вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{q(\gamma - 1)} \chi(1 - x), \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{q(\gamma-1)} v\chi(1-x) \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma \frac{\partial pv}{\partial x} - (\gamma-1)v \frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon\chi(1-x) \left(\varepsilon = \frac{(\gamma-1)J_0 x_0 q}{\rho_0 a_0}, q = \frac{Q}{a_0^2} \right)$$

$$t=0: v=0, \rho=1, p=1/\gamma; x=0: v=0 \quad (t \geq 0) \quad (3)$$

Здесь ε, q — определяющие безразмерные параметры.

Рассмотрим случай низких концентраций топлива (малых интенсивностей горения J_0), когда $\varepsilon \ll 1$.

Будем искать решение (2), (3) в виде предельных разложений

$$\rho(x, t, \varepsilon) = R_{0m}(x, t) + \varepsilon R_{1m}(x, t) + \dots, \quad v(x, t, \varepsilon) = \varepsilon V_{1m}(x, t) + \dots \quad (4)$$

$p(x, t, \varepsilon) = P_{0m}(x, t) + \varepsilon P_{1m}(x, t) + \dots$, которые соответствуют пределу m ($\varepsilon \rightarrow 0, t, x$ фиксированы). Подставляя (4) в (2), (3), для нулевого приближения получим $R_{0m}=1, P_{0m}=1/\gamma$. Уравнения первого (акустического) приближения имеют вид

$$\frac{\partial R_{1m}}{\partial t} + \frac{\partial V_{1m}}{\partial x} = \frac{1}{q(\gamma-1)} \chi(1-x), \quad \frac{\partial V_{1m}}{\partial t} + \frac{\partial P_{1m}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial P_{1m}}{\partial t} + \frac{\partial V_{1m}}{\partial x} = \chi(1-x)$$

$$(t=0: R_{1m}=0, V_{1m}=0, P_{1m}=0; x=0: V_{1m}=0)$$

В скобках даны начальные и граничные условия. Второе и третье уравнения (5) эквивалентны неоднородному волновому уравнению. Применяя к последним двух уравнениям (5) преобразование Лапласа по t и по x (S, σ — соответствующие параметры), используя граничные условия, а также условие ограниченности решения при $x \rightarrow \infty$, для изображений получим

$$P_{1m*} = \frac{\sigma[1 - \exp(-S)]}{(\sigma^2 - S^2)S^2} - \frac{1 - \exp(-\sigma)}{\sigma(\sigma^2 - S^2)}$$

$$V_{1m*} = \frac{\exp(-S)}{(\sigma^2 - S^2)S} - \frac{\exp(-\sigma)}{\sigma(\sigma^2 - S^2)}$$

Переходя к оригиналам [5], получим решение (5) в виде

$$V_{1m} = 0,5(t+x-1)\chi(t+x-1) - 0,5(t-x-1)\chi(t-x-1) -$$

$$- 0,5(t+x-1)\chi(t+x-1)\chi(x-1) + 0,5(t-x+1)\chi(t-x+1)\chi(x-1) \quad (6)$$

$$P_{1m} = t - 0,5(t+x-1)\chi(t+x-1) - 0,5(t-x-1)\chi(t-x-1) -$$

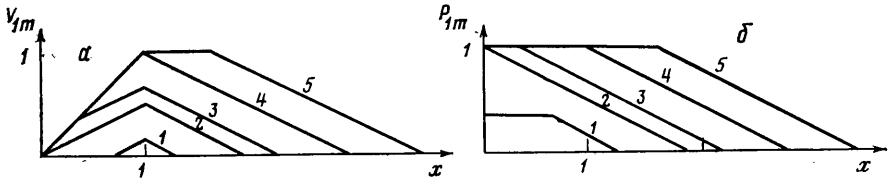
$$- t\chi(x-1) + 0,5(t+x-1)\chi(t+x-1)\chi(x-1) +$$

$$+ 0,5(t-x+1)\chi(t-x+1)\chi(x-1)$$

$$R_{1m} = P_{1m} - \left(1 - \frac{1}{q(\gamma-1)} \right) t\chi(1-x)$$

На фиг. 1 представлены соответствующие (6) распределения скорости и давления по пространству ($a - V_{1m}, b - P_{1m}$) в моменты времени $1/3, 1, 4/3, 2, 8/3$ (кривые 1-5). В начальные моменты времени (линии 1, 2) в зоне горения ($0 \leq x \leq 1$) повышается давление. Одновременно от границы зоны горения ($x=1$) вправо и влево со скоростью звука ($dx/dt=1$) уходят волна сжатия и волна разрежения. При этом формируется треугольный профиль скорости газа. В момент времени 2 волна разрежения отражается от стенки ($x=0$) в виде волны сжатия (линии 3, 4). После прохождения

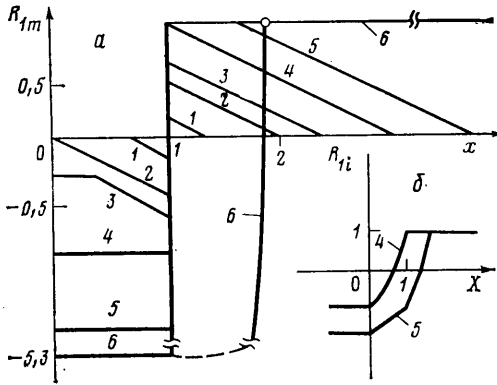
волны разрежения давление в зоне горения растет медленнее, чем в начальные моменты времени, так как сказывается истечение газа в область $x > 1$. После прохождения отраженной волны сжатия давление в зоне горения перестает увеличиваться, так как устанавливается равновесие между массой выделяющегося и истекающего в область $x > 1$ газа. В результате формируется волна сжатия с наклонным фронтом (толщина фронта равна 2), которая распространяется вправо со скоростью звука



Фиг. 1

(линии 4, 5). Рассмотренная волновая картина, полученная как результат численного интегрирования полной системы уравнений механики многофазных сред, описана в [6, 7].

Согласно (6), распределение плотности вне зоны горения ($x > 1$) совпадает с распределением давления. Распределение плотности в зоне горения зависит от безразмерного параметра q , минимальное значение которого $q_{min} = 1/(\gamma - 1)$. В задачах горения параметр q велик. При больших q плотность в зоне горения уменьшается. На фиг. 2, а даны распределения R_{1m} в те же моменты времени при предельно больших q ($q \rightarrow \infty$).



Фиг. 2

Найденные разложения v и p равномерно пригодны. Разложение ρ оказывается неравномерным по двум причинам. Во-первых, при больших t и $x < 1$ возникает неравномерность, связанная с наличием в третьем соотношении (6) секулярного

слагаемого, пропорционального εt . Во-вторых, полученное разложение оказывается неравномерным при $x = 1$. Это связано с тем, что в акустическом приближении в решении возникает неподвижный ($x = 1$) контактный разрыв, а имеющийся во втором приближении член $V_{1m} \partial R_{1m} / \partial x$ становится неограниченным. В действительности происходит движение конвективного фронта, разделяющего холодный и горячий газ, а плотность в окрестности $x = 1$ имеет непрерывное распределение.

Для построения решения, пригодного для ρ при $x = 1$, рассмотрим предел i ($\varepsilon \rightarrow 0$, t , X фиксированы), где $X = (x - 1) / \varepsilon$. Будем искать решение (2), (3) в виде предельных разложений

$$\rho(x, t, \varepsilon) = R_{0i}(X, t) + \varepsilon R_{1i}(X, t) + \dots \quad (7)$$

$$v(x, t, \varepsilon) = \varepsilon V_{1i}(X, t) + \varepsilon^2 V_{2i}(X, t) + \dots$$

$$p(x, t, \varepsilon) = P_{0i}(X, t) + \varepsilon P_{1i}(X, t) + \dots$$

Граничные условия для функций, входящих в (7), получаются из сращения разложений (7) и (4). Для предела, промежуточного по отношению к пределам m и i , имеем $X_\eta = (x - 1) / \eta(\varepsilon)$, t — фиксированы, где

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta/\varepsilon = \infty$. В этом пределе $x \rightarrow 1$, $X \rightarrow \pm\infty$, t фиксировано.

Подставляя в (6) $x=1$, получим для (7) следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} R_{0i}(\pm\infty, t) &= 1, \quad P_{0i}(\pm\infty, t) = 1/\gamma, \quad R_{1i}(\infty, t) = V_w(t) \\ R_{1i}(-\infty, t) &= V_w(t) - (1 - 1/q(\gamma - 1))t, \quad V_{1i}(\pm\infty, t) = V_w(t) \\ P_{1i}(\pm\infty, t) &= V_w(t), \quad V_w(t) = 0,5t - 0,5(t-2)\chi(t-2) \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (7) в (2) в нулевом по ε приближении, получим

$$\frac{\partial R_{0i}}{\partial t} + \frac{\partial R_{0i} V_{1i}}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial P_{0i}}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial P_{0i}}{\partial t} + \gamma P_{0i} \frac{\partial V_{1i}}{\partial X} = 0$$

Из последних уравнений и (8) следует решение $R_{0i}=1$, $V_{1i}=V_w(t)$, $P_{0i}=1/\gamma$. При этом $V_w(t)$ определяет скорость конвективного фронта, которая при $t \leq 2$ пропорциональна времени, а при $t > 2$ постоянна и равна ε . Таким образом, скорость конвективного фронта в $1/\varepsilon$ раз меньше скорости волны сжатия.

В первом по ε приближении получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{1i}}{\partial t} + V_w(t) \frac{\partial R_{1i}}{\partial X} + \frac{\partial V_{2i}}{\partial X} &= \frac{\chi(-\varepsilon X)}{q(\gamma - 1)} \\ \frac{\partial P_{1i}}{\partial X} &= 0, \quad \frac{\partial P_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial V_{2i}}{\partial X} = \chi(-\varepsilon X) \end{aligned} \quad (9)$$

Из второго уравнения (9) следует, что $P_{1i}=V_w(t)$. Исключая из первого и третьего уравнения (9) $\partial V_{2i}/\partial X$, получим уравнение для R_{1i} — линейное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial R_{1i}}{\partial t} + V_w(t) \frac{\partial R_{1i}}{\partial X} = V_w'(t) - \left(1 - \frac{1}{q(\gamma - 1)}\right) \chi(-\varepsilon X) \quad (10)$$

Решение (10), (8) при $X < 0$ дает однородное по X распределение R_{1i} . При $X > 0$ решение представляет собой бегущую волну. В этом случае граничное условие при $X = \infty$ (8) должно сноситься на фронт волны, определяемой характеристикой (10): $0,25t^2 - X = 0$ при $t \leq 2$, $t - 1 - X = 0$ при $t \geq 2$. При этом влияние первоначального искривления фронта ограничивается характеристикой $t - 2 - X = 0$. В результате решение (10), удовлетворяющее начальным и граничным условиям, имеет вид

$$\begin{aligned} X \leq 0: \quad R_{1i} &= V_w(t) - \left(1 - \frac{1}{q(\gamma - 1)}\right) t \\ X \geq 0: \quad R_{1i} &= 0,5t - 2 \left(1 - \frac{1}{q(\gamma - 1)}\right) \sqrt{0,25t^2 - X}; \quad t \leq 2, \quad 0,25t^2 \geq X \\ R_{1i} &= -2 \left(1 - \frac{1}{q(\gamma - 1)}\right) \sqrt{t - 1 - X} + 1; \quad t \geq 2, \quad 2 \geq t - X \geq 1 \\ R_{1i} &= - \left(1 - \frac{1}{q(\gamma - 1)}\right) (t - X) + 1; \quad t \geq 2, \quad t - X \geq 2 \end{aligned} \quad (11)$$

На фиг. 2, б представлены распределения $R_{1i}(X)$ в моменты времени 4, 5. Из представленных данных следует, что в начальные моменты времени (до $t=2$) конвективный фронт криволинеен. При $t > 2$ фронт имеет криволинейный ($t - 2 \leq X \leq t - 1$) и прямолинейный участки ($0 \leq X \leq t - 2$), причем протяженность криволинейного участка постоянна и равна единице (в переменных $x, t - \varepsilon$).

Решение (11), так же как решение (6), неравномерно при больших t .

Однако в данном случае в отличие от (6) оно оказывается неравномерным как при $X < 0$ ($x < 1$), так и при $X > 0$ ($x > 1$) в области прямолинейности конвективного фронта.

Складывая последнее равенство в (6) и (11) и вычитая общую часть [4], получим для ρ первоначально пригодное (равномерное по x) асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + \varepsilon R_{1m} + \Phi & (12) \\ x \leq 1: \quad \Phi &= 0 \\ x \geq 1: \quad \Phi &= -2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{q(\gamma-1)} \right) \sqrt{0,25t^2 - \frac{x-1}{\varepsilon}}; \\ & t \leq 2, \quad 0,25t^2 \geq \frac{x-1}{\varepsilon} \\ \Phi &= -2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{q(\gamma-1)} \right) \sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\varepsilon}}; \quad t \geq 2, \quad \varepsilon \leq \xi \leq 2\varepsilon \\ \Phi &= - \left(1 - \frac{1}{q(\gamma-1)} \right) \xi; \quad t \geq 2, \quad \xi \geq 2\varepsilon, \quad \xi = \varepsilon t - x + 1 \end{aligned}$$

Для построения решения, пригодного для ρ при больших значениях времени t , рассмотрим предел ε ($\varepsilon \rightarrow 0$, τ , x фиксированы), где $\tau = \varepsilon t$. Будем искать решение (2), (3) в виде предельных разложений

$$\begin{aligned} \rho(x, t, \varepsilon) &= R_{0\varepsilon}(x, \tau) + \varepsilon R_{1\varepsilon}(x, \tau) + \dots, \\ p(x, t, \varepsilon) &= P_{0\varepsilon}(x, \tau) + \varepsilon P_{1\varepsilon}(x, \tau) + \dots & (13) \\ v(x, t, \varepsilon) &= \varepsilon V_{1\varepsilon}(x, \tau) + \dots \end{aligned}$$

Начальные условия для функций, входящих в (13), получаются из сращения разложений (4), (12) и (13). Для промежуточного предела $t_\eta = \eta(\varepsilon)t$, x фиксированы, где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta/\varepsilon = \infty$, имеем $t \rightarrow \infty$,

$\tau \rightarrow 0$. В этом пределе равномерно пригодные для v и p разложения (4) дают начальные условия $P_{0\varepsilon}(x, 0) = 1/\gamma$, $P_{1\varepsilon}(x, 0) = 1$, $V_{1\varepsilon}(x, 0) = x + (1-x)\chi(1-x)$. Разложение (12) дает начальные условия $R_{1\varepsilon}(x, 0) = 1$ и $R_{0\varepsilon}(x, 0) = 1$ при $x \leq 1$. При $x \geq 1$ начальное условие для $R_{0\varepsilon}$, согласно (12), ставится при $\tau = 2\varepsilon$

$$R_{0\varepsilon} = 1 - 2 \left(1 - \frac{1}{q(\gamma-1)} \right) \sqrt{\varepsilon(\varepsilon - x + 1)}; \quad 1 \leq x \leq 1 + \varepsilon, \quad R_{0\varepsilon} = 1; \quad x \geq 1 + \varepsilon$$

В интервале времени $0 \leq \tau \leq 2\varepsilon$ ($0 \leq t \leq 2$) справедливо разложение (12).

Подставляя (13) в (2) в нулевом по ε приближении, получим $\partial P_{0\varepsilon} / \partial x = 0$. В первом приближении получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{0\varepsilon}}{\partial \tau} + \frac{\partial R_{0\varepsilon} V_{1\varepsilon}}{\partial x} &= \frac{1}{q(\gamma-1)} \chi(1-x), \quad \frac{\partial P_{1\varepsilon}}{\partial x} = 0 & (14) \\ \frac{\partial P_{0\varepsilon}}{\partial \tau} + \gamma P_{0\varepsilon} \frac{\partial V_{1\varepsilon}}{\partial x} &= \chi(1-x) \end{aligned}$$

Из ограниченности $V_{1\varepsilon}$ при $x \rightarrow \infty$ и начальных условий следует, что $P_{0\varepsilon} = 1/\gamma$, $V_{1\varepsilon} = x + (1-x)\chi(x-1)$. Согласно (13) и начальному условию, из (14) следует $P_{1\varepsilon} = P_{1\varepsilon}(\tau)$, причем $P_{1\varepsilon} \sim 1 + \varepsilon$.

Решение первого уравнения (14) имеет вид

$$x \leq 1: \quad R_{0\varepsilon} = \left(1 - \frac{1}{q(\gamma-1)} \right) e^{-\tau} + \frac{1}{q(\gamma-1)} & (15)$$

$$x \geq 1: R_{0e} = \left(1 - \frac{1}{q(\gamma-1)} \right) e^{-2\sqrt{\varepsilon(\xi-\varepsilon)}} + \frac{1}{q(\gamma-1)}; \quad \tau \geq 2\varepsilon, \quad \varepsilon \leq \xi \leq 2\varepsilon$$

$$R_{0e} = 1 - \frac{1}{q(\gamma-1)}(e^{-\xi} + 1); \quad \xi \geq 2\varepsilon, \quad R_{0e} = 1; \quad \xi \leq \varepsilon$$

Из последних уравнений следует, что для достаточно больших моментов времени плотность в зоне горения при $q_{\min}(\gamma-1)=1$ не меняется, а при $q(\gamma-1) > 1$ уменьшается. Отметим, что, согласно (13) и начальному условию, $R_{1e} \sim 1 + \varepsilon$. Складывая (12) и (15) и вычитая общую часть, получим для ρ равномерно пригодное асимптотическое разложение

$$x \leq 1: \rho = R_{0e} + \varepsilon P_{1m} \quad (16)$$

$$x \geq 1: \rho = 1 + \varepsilon R_{1m} - 2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{q(\gamma-1)} \right) \sqrt{0,25t^2 - \frac{x-1}{\varepsilon}};$$

$$t \leq 2, \quad 0,25t^2 \geq \frac{x-1}{\varepsilon}$$

$$\rho = 1 + \varepsilon R_{1m}; \quad t \leq 2, \quad 0,25t^2 < \frac{x-1}{\varepsilon}$$

$$\rho = R_{0e} + \varepsilon R_{1m}; \quad t \geq 2, \quad \xi \geq \varepsilon$$

$$\rho = 1 + \varepsilon R_{1m}; \quad t \geq 2, \quad \xi < \varepsilon$$

На фиг. 2, а представлена полученная согласно (16) зависимость $(\rho-1)/\varepsilon$ при $t=10$ и $\varepsilon=0,1$ (линия б). Отмечено положение конвективного фронта. Фронт волны сжатия, расположенный для данного момента времени при $x=10$, находится за пределами поля фигуры.

Дадим оценку и количественный пример временного интервала, для которого справедливы уравнения (1) и построенное решение. Рассмотрим горение аэровзвеси унитарного топлива [6, 7] при низкой относительной массовой концентрации $m_{20}=0,1$, размере частиц $d_0=500$ мк и $x_0=0,2$. Тогда скорость газа при горении, согласно (6), составляет $v=0,4 \cdot 10^{-2}$. При таких условиях силовое взаимодействие газа и частиц определяется последним членом в законе трения $C_d=24/Re+4,4Re^{0,5}+0,42$ [6, 7], где $Re=\rho_0 v d_0/\mu$ — число Рейнольдса относительного обтекания. В этом случае член, описывающий силовое взаимодействие в уравнении движения частиц, пропорционален безразмерному параметру $\delta=0,315x_0\rho_0\varepsilon/\rho_2^0 d_0$ (ρ_2^0 — плотность материала частиц), который составляет $\delta=0,4 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, движение частиц становится существенным для времен $t \sim 1/\delta$ ($\sim 1,5$ с). До этих моментов времени справедливо построенное решение, в том числе асимптотика больших времен (предел ε), которая начинает выполняться для времен $t \sim 1/\varepsilon$ ($\sim 0,2$ с).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Вайнштейн П. Б., Нигматулин Р. И. О гомобарических, с однородным давлением течениях газовзвесей при наличии гетерогенных физико-химических превращениях. — Докл. АН СССР, т. 29, № 1, с. 74–77.
3. Вайнштейн П. Б. Конвективное горение аэровзвесей унитарного топлива. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 49–56.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
6. Вайнштейн П. Б., Нигматулин Р. И., Попов В. В. Переход конвективного горения аэровзвесей унитарного топлива в детонацию. — Физика горения и взрыва, 1980, № 5, с. 102–106.
7. Вайнштейн П. Б., Моргунов Ю. А. Численное исследование горения аэровзвесей унитарного топлива в ограниченных объемах. — В сб.: Нестационарные течения многофазных систем с физико-химическими превращениями. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 51–59.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1985