

УДК 532.526

О ТЕЧЕНИИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СЛЕДА

ТРИГУБ В. Н.

Рассмотрены решения уравнений параболического типа, описывающие развитие течения в осесимметричном следе под воздействием вязкости и неблагоприятного градиента давления. Показано, что в общем случае решение в окрестности точки торможения на оси следа является особым, причем возможность продолжения его за точку торможения исключена. Кроме того, найдены решения: регулярное в окрестности точки торможения и особое, продолжимое вниз по течению. Это особое решение является предельным для класса регулярных, имеющих минимум в распределении скорости на оси, при стремлении минимальной скорости к нулю.

1. Рассмотрим развитие тонкой осесимметричной области завихренного течения (следа за телом вытянутой формы) в потенциальном внешнем течении, происходящее под воздействием сил вязкости и градиента давления вдоль оси, вызванного некоторым осесимметричным препятствием во внешнем потоке. Полагаем, что характерная для распределения давления на оси длина l_m одного порядка с длиной, на которой проявляется действие сил вязкости в области завихренного течения. Выберем цилиндрическую систему координат (x, r) с осью x , направленной по потоку вдоль оси симметрии течения и проведем обезразмеривание длин по l_m , скоростей — по характерному для внешнего течения значению u_m , давления — по ρu_m^2 . Уравнения Навье — Стокса представим в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial Y} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \left[2 \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial u}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \\ u \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{V^2}{2Y} &= - 2Y \frac{\partial p}{\partial Y} + \varepsilon^2 \left[2Y \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \quad \varepsilon^2 = \frac{\nu}{u_m l_m} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $Y=r^2/2$, p — давление, $(u, V/r)$ — аксиальная и радиальная компоненты скорости, ν — коэффициент вязкости, $\rho = \text{const}$ — плотность.

Совершив в уравнениях (1.1) предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ при предположениях, аналогичных принятым в теории плоского пограничного слоя, приходим в главном приближении к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - p_0'(x) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$x_0 < x < x_1, \quad 0 < y < +\infty; \quad v(x, 0) = 0, \quad |u(x, 0)| < \infty$$

$$u(x, \infty) = U_\infty(x), \quad u(x_0, y) = u_{i0}(y), \quad \varepsilon^2 y = Y, \quad \varepsilon^2 v = V$$

Здесь функция $u_{i0}(y)$ — заданное начальное распределение скорости,

функция $U_e(x)$ известна из внешнего решения, $p_0'(x) = -U_e U_e'$, штрих означает дифференцирование. Введем функцию тока ψ_0 так, что $u = \partial\psi_0/\partial y$, $v = -\partial\psi_0/\partial x$, $\psi_0(x, 0) = 0$. Пусть в сечении $x=0$ профиль скорости имеет вид

$$u = U_0(y), \quad U_0 = \Psi_0'(y), \quad U_0(0) < U_0(\infty), \quad p_0'(x) = p_{00} + p_{01}x + \dots$$

при $x \rightarrow 0$. Выясним, при каких условиях разложение решения в окрестности этого сечения будет регулярным: $\psi_0 = \Psi_0(y) + xf(y) + \dots$. Из (1.2) следует

$$U_0 f' - U_0' f = -p_{00} + 2(yU_0')', \quad U_0 \int_0^y \frac{2(yU_0')' - p_{00}}{U_0^2} dy = J_0(y) \quad (1.3)$$

Решение этого уравнения $f = J(y)$, удовлетворяющее краевым условиям, существует, если U_0 нигде не обращается в нуль. С другой стороны, решение уравнения (1.3) с нулевой правой частью $f = C_1 U_0$ не удовлетворяет условию $f(0) = 0$, откуда следует, что особое решение существовать не может.

Если же $U_0(0) = 0$, то, во-первых, появляется возможность существования особого решения, во-вторых, для существования регулярного решения необходим ряд дополнительных условий, связывающих коэффициенты в разложении функции U_0 при $y \rightarrow 0$ и $p_0'(x)$ при $x \rightarrow 0$, которые в общем случае могут не выполняться. Следовательно, в общем случае при подходе к точке с нулевой скоростью на оси (под действием неблагоприятного градиента давления $p_0'(x) > 0$) решения уравнений (1.2) имеют особенность.

2. Исследование особенностей, возникающих при решении задачи Коши для нелинейных параболических уравнений, проводилось в ряде работ [4–5], относящихся к различным задачам теории пограничного слоя. В основе этих работ лежит метод, изложенный при исследовании свойств решений уравнений Прандтля в окрестности точки нулевого трения [1]. Согласно [1], центральной областью, управляющей поведением течения при $x \rightarrow 0$, является область, где инерционные и диссипативные члены в первом из уравнений (1.2) являются величинами одного порядка. Для осесимметричного следа решение в этой области представляется асимптотическим разложением (2.1), подстановка которого в (1.2) приводит к задаче (2.2) для функции ϕ_0

$$\psi_0 = (-x)\phi_0(\eta) + (-x)^\theta \phi_1(\eta) + (-x)^{2\theta-1} \phi_2(\eta) + O((-x)^2) \quad (2.1)$$

$$x \rightarrow -0, \quad \eta = y(-x)^{-1/2} = O(1), \quad 1 < \theta \leq 3/2$$

$$2(\eta\phi_0'')' - \phi_0\phi_0'' - 1/2\phi_0'^2 = p_{00} \quad (2.2)$$

$$\phi_0(0) = 0, \quad |\phi_0'(0)| < \infty$$

где требуется также, чтобы при $\eta \rightarrow \infty$ функция ϕ_0 не нарастала экспоненциально. Всем этим условиям удовлетворяет решение

$$\phi_0 = \alpha\eta^2 + \sqrt{2p_{00} - 8\alpha}\eta \quad (2.3)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1/2p_{00}$ — произвольная постоянная, которая определяется решением полной задачи (1.2).

Исходя из (2.3) и принципа сращиваемых асимптотических разложений, решение при $\eta = O(1)$, $x \rightarrow -0$ ищем в виде

$$\psi_0 = \Psi_0(y) + (-x)^{1/2} f_1(y) + O(-x) \quad (2.4)$$

Решая задачу для f_1 и производя сращивание (2.4) и (2.3), получаем

$$f_1 = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{2p_{00} - 8\alpha} U_0(y), \quad \Psi_0(y) = \alpha y^2 + O(y^2), \quad y \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

Таким образом, в общем случае ($\alpha \neq 0$) особенность в окрестности точки торможения для осесимметричного следа имеет характер, полностью отличный от особенности в плоском следе, изученной в [4]. Вместе с тем в частном случае ($\alpha = 0$) разложения в окрестности особой точки для плоского и осесимметричного следа сходны [4]. Интересно, что из вида решения (2.3) следует верхнее ограничение на коэффициент α во всяком особом решении: $0 \leq \alpha < 1/4 p_{00}$.

В центральной области справа от особой точки решение следует искать в виде разложения

$$\psi_0 = x\varphi_0^*(\eta) + x^2\varphi_1^*(\eta) + x^{2\theta-1}\varphi_2^*(\eta) + O(x^2) \quad (2.6)$$

$$x \rightarrow +0, \quad \eta = yx^{-1/2} = O(1), \quad 1 < \theta \leq 3/2$$

Уравнению для главного члена разложения (2.6)

$$2(\eta\varphi_0^{*''})' + \varphi_0^*\varphi_0^{*''} + 1/2\varphi_0^{*'}{}^2 = p_{00}$$

и условиям на оси удовлетворяет функция

$$\varphi_0^* = \alpha^*\eta^2 + \sqrt{8\alpha^* - 2p_{00}}\eta \quad (2.7)$$

По виду решения (2.7) заключаем, что при $y = O(1)$, $x \rightarrow +0$

$$\psi_0 = \Psi_0(y) + x^{1/2}f_1^*(y) + O(x) \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (1.2) и производя сращивание разложения (2.8) с решением для центральной области (2.7), получим

$$\alpha^* = \alpha, \quad f_1^* = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{8\alpha - 2p_{00}} U_0(y) \quad (2.9)$$

Из (2.9) видно, что условие существования особого решения слева от точки торможения $0 \leq \alpha < 1/4 p_{00}$ исключает возможность существования особого решения справа (подкоренное выражение будет отрицательным) и наоборот. Следовательно, для осесимметричного следа решение в окрестности точки торможения является в общем случае особым ($v = O((-x)^{-1/2})$, $x \rightarrow -0$), причем, как и в работах [1, 4], такое решение не может быть продолжено за особую точку.

3. Рассмотрим подробнее единственный случай, не исключающий возможности продолжения решения через точку торможения

$$\alpha = 1/4 p_{00}, \quad \varphi_0 = 1/4 p_{00}(y^2/(-x)), \quad \varphi_0^* = 1/4 p_{00}(y^2/x)$$

Наличие в разложении градиента давления величины $O(-x)$ приводит к появлению в разложении (2.1) члена $O((-x)^2)$. Исследуем, могут ли в (2.1) присутствовать собственные функции с более низким порядком затухания $O((-x)^0)$, $1 < \theta \leq 2$.

Краевая задача для φ_1 имеет вид

$$2(\eta\varphi_1'')' - 1/4 p_{00}\eta^2\varphi_1'' + 1/2\theta p_{00}(\eta\varphi_1' - \varphi_1) = 0 \quad (3.1)$$

$$\varphi_1(0) = 0, \quad |\varphi_1'(0)| < \infty$$

φ_1 не возрастает экспоненциально при $\eta \rightarrow \infty$. При любом значении θ уравнение (3.1) имеет три линейно независимых решения, разложения которых при $y \rightarrow 0$ начинаются соответственно с 1, $\eta \ln \eta$, η . Первые два из них не удовлетворяют условиям на оси, а третье тождественно равняется η . Следовательно, решение задачи (3.1) существует при всех θ и имеет вид $\varphi_1 = a_0\eta$, где a_0 — произвольная постоянная, которую считаем положительной, поскольку скорость на оси больше нуля при $x < 0$. Наличие собственной функции φ_1 приводит из-за нелинейности уравнений (1.2) к появлению в разложении (2.1) члена $O((-x)^{2\theta-1})$. Для функции φ_2 по-

лучаем

$$2(\eta\varphi_2'')' - \frac{1}{4}p_{00}\eta^2\varphi_2'' + \frac{1}{2}p_{00}(2\theta-1)(\eta\varphi_2' - \varphi_2) = -(p_{01} + a_0^2) \quad (3.2)$$

$$\varphi_2(0) = 0, \quad |\varphi_2'(0)| < \infty$$

коэффициент p_{01} в правой части присутствует только при $\theta = 3/2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$F(y) = -\frac{2(p_{01} + a_0^2)}{p_{00}(2\theta-1)} \eta \int_0^\eta \left[1 - M\left(1-2\theta, \frac{1}{2}, \frac{1}{16} p_{00}\eta^2\right) \right] \frac{d\eta}{\eta^2}$$

где $M(a, b, z)$ — функция Куммера [6], удовлетворяет уравнению (3.2) и граничным условиям на оси. Поскольку из трех линейно независимых решений уравнений (3.2) с нулевой правой частью лишь одно (η) удовлетворяет условиям на оси, общее решение (3.2), удовлетворяющее условиям на оси, имеет вид

$$\varphi_2 = b_0\eta + F(\eta) \quad (3.3)$$

Функция $M(a, b, z)$ при $z \rightarrow +\infty$ в общем случае возрастает экспоненциально и, следовательно, решение (3.3) не может удовлетворять условиям срачивания с областью, где $y = O(1)$. Исключением являются значения $\theta = (n+1)/2$, $n=1, 2, 3, \dots$. Первое из них $\theta=1$ не подходит ($\theta > 1$), а при $\theta = 3/2$ для центральной зоны окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{1}{4}(-x)p_{00}\eta^2 + (-x)^{3/2}\varphi_1(\eta) + (-x)^2\varphi_2(\eta) + O((-x)^{5/2}) \\ x \rightarrow 0, \quad \eta &= y(-x)^{-1/2} = O(1), \quad \varphi_1 = a_0\eta \\ \varphi_2 &= b_0\eta - (p_{01} + a_0^2)(\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{576}p_{00}\eta^4) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из вида (3.4) и принципа срачиваемых асимптотических разложений следует, что при $x \rightarrow 0$, $y = O(1)$ решение (1.2) представляется разложением $\psi_0(x, y) = \Psi_0(y) + (-x)f_1(y) + \dots$, подставляя которое в (1.2) и производя срачивание с (3.4), находим

$$f_1 = \frac{2a_0}{p_{00}}U_0 - J_0, \quad \Psi_0 = 1/4p_{00}y^2 + 1/576p_{00}(p_{01} + a_0^2)y^4 + \dots, \quad y \rightarrow 0$$

Принципиальным является вопрос о возможности продолжения решения (3.4) за точку торможения. Непосредственной подстановкой в (1.2) можно убедиться, что разложение (2.6) при $\theta = 3/2$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{1}{4}p_{00}x\eta^2 + x^{3/2}\varphi_1^*(\eta) + x^2\varphi_2^*(\eta) + O(x^{5/2}) \\ \varphi_1^* &= a_0^*\eta, \quad \varphi_2^* = b_0^*\eta + (p_{01} + a_0^{*2})(\frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{576}p_{00}\eta^4) \end{aligned} \quad (3.5)$$

где a_0^* , b_0^* — произвольные постоянные, удовлетворяет (1.2) и граничным условиям на оси. Из (3.5), проводя срачивание с областью $y = O(1)$, получаем

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \Psi_0(y) + xf_1^*(y) + \dots, \quad y = O(1), \quad x \rightarrow 0 \\ f_1^* &= \frac{2a_0^*}{p_{00}}U_0 + J_0, \quad a_0^{*2} = a_0^2 \end{aligned}$$

Последнее условие может быть выполнено двумя способами: $a_0^* = \pm a_0$. Случай $a_0^* = -a_0$ соответствует регулярному переходу через точку торможения, за точкой торможения начинается область обратных токов. Вторая возможность $a_0^* = a_0$ приводит к особому решению, продолжимому за точку торможения (после точки торможения вновь начинается разгон). Скорость на оси $u(x, 0) = a_0|x| + \dots$ имеет разрыв производной, а функция $v(x, y)$ сама терпит разрыв

$$v(+0, y) - v(-0, y) = -\frac{4a_0}{p_{00}}U_0(y)$$

Таким образом, ситуация в случае $a_0^* = -a_0$ весьма сходна с изученной в работе [5], где было обнаружено особое решение уравнения Прандтля, продолжимое за точку нулевого трения.

4. В работе [5] было показано, что особое, продолжимое за точку нулевого трения решение реализуется как предельное для класса регулярных решений, имеющих минимум в распределении трения, при стремлении минимального трения к нулю. Покажем, что найденное в настоящей работе особое продолжимое решение является предельным для класса регулярных решений, имеющих минимум в распределении скорости на оси, при стремлении минимальной скорости к нулю. Рассмотрим изменения в течении, вызванные малыми возмущениями распределения давления $p(x) = p_0(x) + \delta p_1(x)$ и начального профиля скорости $u_i(y) = u_{i0}(y) + \delta u_{i1}(y)$, $\delta \rightarrow 0$, при условии, что невозмущенные распределения $p_0(x)$ и $u_{i0}(y)$ приводят к построенному выше продолжимому решению $\psi = \psi_0(x, y)$, особому в точке $x=0$. Представив функцию тока в виде $\psi = \psi_0(x, y) + \delta \psi_1(x, y) + \dots$, получим для ψ_1 следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} = -p_1' + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\psi_1(x, 0) = 0, \quad \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, 0) \right| < \infty, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, \infty) = u_{e1}(x), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x_0, y) = u_{i1}(y)$$

$$p_1' = -(U_e(x) u_{e1}(x))'$$

Решение (4.1) в слое $\eta = y(-x)^{-1/2} = O(1)$, $x \rightarrow -0$ представим разложением

$$\psi_1 = (-x)^0 \psi_{11}(\eta) + (-x)^{0+1/2} \psi_{21}(\eta) + \dots \quad (4.2)$$

Подстановка (4.2) в (4.1) приводит для функции ψ_{11} к задаче, совпадающей с (3.1), следовательно, $\psi_{11} = a_1 \eta$. Для функции ψ_{21} получаем

$$2(\eta \psi_{21}'')' - 1/4 p_{00} \eta^2 \psi_{21}'' + (\theta + 1/2)^{1/2} p_{00} (\eta \psi_{21}' - \psi_{21}) = (\theta + 1/2) a_0 a_1 \quad (4.3)$$

$$\psi_{21}(0) = 0, \quad |\psi_{21}'(0)| < \infty$$

Общее решение уравнения (4.3), удовлетворяющее условиям на оси, имеет вид

$$\psi_{21} = b_1 \eta - \frac{2a_0 a_1}{p_{00}} \eta \int_0^\eta [1 - M(-(\theta + 1/2)^{1/2}, 1/2, 1/16 p_{00} \eta^2)] \frac{d\eta}{\eta^2}$$

Функция ψ_{21} не нарастает экспоненциально при $y \rightarrow \infty$, если $\theta + 1/2 = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Первому собственному значению $\theta = -1/2$ соответствует $f_2 = b_1 \eta$. При этом разложение (4.2) принимает вид

$$\psi_1 = -(x)^{-1/2} a_1 \eta + b_1 \eta + O((-x)^{1/2}) \quad (4.4)$$

Постоянные b_0, b_1 могут быть найдены из решения полной задачи (4.1). Соответствующее (4.4) решение при $y = O(1)$, $x \rightarrow -0$ представляется разложением

$$\psi_1 = (-x)^{-1} \frac{2a_1}{p_{00}} U_0(y) + (-x)^{-1/2} \frac{2b_1}{p_{00}} U_0(y) + O(1)$$

При наличии собственных функций (4.5) разложение для функции тока не является равномерно пригодным: в области, где $x = O(\sigma^{1/2})$, $\sigma = |\delta|$, первый член в разложении возмущения становится величиной одного порядка со вторым членом в разложении невозмущенного решения.

Для значений $s = x\sigma^{-1/2} = O(1)$ следует рассмотреть две области: область $y = O(1)$, являющуюся продолжением основной по толщине части следа, и область вблизи оси $s = y\sigma^{-1/2} = O(1)$ — продолжение центральной. В первой из них

$$\psi = \Psi_0(y) + \sigma^{1/2} \left(\frac{2A_1(s)}{p_{00}} U_0 + s J_0 \right) + \dots \quad (4.5)$$

$$A_1(s) = a_0(-s) + a_1 \text{sign}(\delta) (-s)^{-1} + \dots \quad (s \rightarrow -\infty)$$

где $A_1(s)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (4.5).

В области, расположенной в окрестности оси

$$\psi = \sigma^{1/2} 1/4 p_{00} n^2 + \sigma^{3/4} \psi_{11}(s, n) + \sigma \psi_{12}(s, n) + \dots$$

При этом для функции ψ_{11} получается линейная краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{p_{00}}{4} \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial \psi_{11}}{\partial n} - \psi_{11} \right) &= \frac{\partial}{\partial n} \left(n \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial n^2} \right) \\ \psi_{11}(s, 0) &= 0, \quad \left| \frac{\partial \psi_{11}}{\partial n}(s, 0) \right| < \infty \\ \psi_{11} &= A_1(s)n + \dots, \quad s \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.6)$$

Следующая замена переменных приводит (4.6) к задаче для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} s &= \xi p_{00}/4, \quad \psi_{11} = A_1(s)n - n \int_n^\infty \frac{q_1(\xi, n)}{n^2} dn \\ \frac{\partial q_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 q_1}{\partial n^2}, \quad q_1(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial q_1}{\partial n}(\xi, 0) = 0, \quad q_1 = o(1), \quad \xi \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

не имеющей нетривиальных решений. Следовательно, $\psi_{11} = A_1(s)n$, а функция $A_1(s)$ остается произвольной. Определить $A_1(s)$ можно из рассмотрения задачи для функций второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{p_{00}}{4} \frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial \psi_{12}}{\partial n} - \psi_{12} \right) &= \frac{\partial}{\partial n} \left(n \frac{\partial^2 \psi_{12}}{\partial n^2} \right) - \frac{1}{2} A_1(s) A_1'(s) - \frac{p_{01}}{2} s \\ \psi_{12}(s, 0) &= 0, \quad \left| \frac{\partial \psi_{12}}{\partial n}(s, 0) \right| < \infty \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= p_{00} \frac{p_{01} + a_0^2}{576} n^4 + s \frac{p_{01} + a_0^2}{4} n^2 + A_2(s)n + \dots, \quad n \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow -\infty \\ A_2(s) &= b_0(-s)^{1/2} + \text{sign}(\delta) b_1(-s)^{-1/2} + \dots, \quad s \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь $A_2(s)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (4.8). Приведем (4.7) к более удобному для анализа виду

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= \frac{p_{00}}{576} (p_{01} + a_0^2) n^4 + s \frac{p_{01} + a_0^2}{4} n^2 + A_2(s)n + g(s) - n \int_n^\infty \frac{q_2(\xi, n)}{n^2} dn, \\ g(s) &= \frac{1}{p_{00}} (A_1^2 - s^2 a_0^2 - 2a_1 a_0) \\ \frac{\partial q_2}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 q_2}{\partial n^2}, \quad q_2(\xi, 0) = g(\xi), \quad \frac{\partial q_2}{\partial n}(\xi, 0) = 0, \quad q_2 = O(1), \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.9)$$

Задача для уравнения теплопроводности (4.9) оказывается переопределенной и для существования ее решения необходимо выполнение условия $g(s) \equiv 0$. Это условие приводит к следующему выражению для функции тока в переменных x, y :

$$\psi = \frac{p_{00}}{4} y^2 + y a_0 \sqrt{x^2 + 2\delta \frac{a_1}{a_0}} + \dots \quad (4.10)$$

Если $\delta a_1 > 0$, решение (4.10) существует везде, регулярно по x и в пределе $\delta a_1 \rightarrow 0$ переходит в найденное выше особое. Если $\delta a_1 < 0$, то при $x = -\sqrt{-2a_1\delta/a_0}$ в решении имеется особенность, описанная во втором разделе, и решение не может быть продолжено далее. Наконец, при $\delta b_0 = 0$ возможны два решения: $A_1 = -a_0 s$ и $A_1 = a_0 |s|$. Выражение (4.10) позволяет из наблюдения процесса образования особого решения при $\delta \rightarrow 0$ в каждом конкретном случае получить значения постоянных a_0, a_1 .

Полученное в настоящей работе особое решение, продолжимое за точку торможения, может быть использовано при построении асимптотической теории образования рециркуляционных зон в осесимметричном следе.

Автор благодарит В. Я. Нейланда и Вик. В. Сычева за обсуждение результатов работы и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goldstein S.* On laminar boundary-layer flow near a position of separation.— *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1948, v. 1, pt 1, p. 43–69.
2. *Stewartson K.* Is the singularity at separation removable?— *J. Fluid Mech.*, 1970, v. 44, № 2, p. 347–364.
3. *Werle M. J., Davis R. T.* Incompressible laminar boundary layers on a parabola at angle of attack: a study of the separation point.— *Trans. ASME, Ser. E. Appl. Mech.*, 1972, v. 39, № 1, p. 7–12.
4. *Сычев Вук. В.* О некоторых особенностях в решениях уравнений пограничного слоя на подвижной поверхности.— *ПММ*, 1980, т. 44, вып. 5, с. 831–838.
5. *Рубан А. И.* Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1981, № 6, с. 42–52.
6. *Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука*, 1979, с. 321.

Москва

Поступила в редакцию
8.II.1985