

УДК 532.517.4

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА

ЛУЩИК В. Г., ПАВЕЛЬЕВ А. А., ЯКУБЕНКО А. Е.

Одним из направлений разработки методов расчета турбулентных потоков является развитие моделей турбулентности, включающих уравнения переноса для характеристик турбулентности. К настоящему времени литература по этому вопросу включает сотни работ, обзор большей части которых можно найти в [1, 2]. Большинство авторов используют однопараметрические [3, 4] и двухпараметрические модели [5, 6], которые наряду с уравнениями переноса содержат алгебраические соотношения. В [7–12] разрабатывались модели турбулентности, не включающие алгебраические соотношения между характеристиками турбулентности, входящими в модель. Эти модели обладают как общими чертами, так и существенными различиями, которые рассмотрены в [13]. Трехпараметрические модели, включающие члены с вязкостью [12], использовались для расчета широкого класса течений несжимаемой жидкости в приближении пограничного слоя [12–14].

Проводились расчеты установившегося течения в кольцевых, плоских и круглых каналах при различных числах Рейнольдса, перехода к турбулентности в пограничном слое при большом уровне внешних возмущений, пограничных слоев со вдувом и отсосом, а также при положительном и отрицательном градиентах давления. Во всех случаях наблюдалось удовлетворительное количественное согласование результатов расчетов и экспериментов.

Отметим некоторые качественные результаты, полученные в этих расчетах [12, 13]¹.

1. При развитии течения в кольцевом канале отмечено несовпадение нулевых значений $-(u'v')$ и du/dy .

2. При расчете течения на начальном участке круглой трубы получено непотное изменение средней скорости на оси.

3. При расчете пограничного слоя со вдувом и отсосом получена соответствующая эксперименту зависимость для коэффициента трения, а также ламинаризация при отсосе.

4. При расчете пограничного слоя с торможением потока определялось положение точки, в которой du/dy на стенке равно нулю. По этим расчетам установлено условие безотрывного обтекания, близкое к экспериментальному.

5. Расчеты показывают, что при уменьшении числа Рейнольдса в канале течение приближается к ламинарному.

6. Расчет перехода к турбулентности в пограничном слое при большой интенсивности внешних возмущений (3–4%) показывает, что до некоторого числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса, трение на стенке соответствует ламинарному режиму течения, а затем энергия турбулентности и трение в пограничном слое начинают возрастать и происходит переход к развитому турбулентному режиму течения.

7. При расчете следа за тонкой пластиной вначале рассчитывался пограничный слой на пластине, а начиная с задней кромки, условие прилипания на стенке заменялось равенством нулю производных. Полученные в расчете распределения скорости и турбулентных характеристик совпадают с экспериментальными данными на расстояниях от кромки, равных ~ 400 толщинам потери импульса.

¹ Изложение перечисленных в [12] результатов содержится в материалах: Лущик В. Г., Якубенко А. Е. Расчет турбулентного течения несжимаемой жидкости на входном участке круглой трубы.— Отчет Ин-та механики МГУ, 1978, № 2083, 31 с. Асташенкова Г. Г., Лущик В. Г., Якубенко А. Е. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости на проницаемой поверхности.— Отчет Ин-та механики МГУ, 1979, № 2185, 40 с. Лущик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Исследование сдвиговых течений в каналах и пограничных слоях с использованием трехпараметрической модели турбулентности.— Отчет Ин-та механики МГУ, 1981, № 2553, 106 с.

8. Рассчитывалось течение у стенки, когда скорость в начальном сечении вблизи стенки возрастает линейно в слое конечной толщины от нуля на стенке до значения скорости в центральной части канала. В эксперименте такой профиль скорости создавался входным устройством, размер ячейки которого много меньше толщины слоя с градиентом скорости. В этом случае градиент скорости у стенки возрастает по длине, а градиент средней скорости на участке перехода к развитому турбулентному течению изменяется поперек слоя немонотонно, что соответствует экспериментальным данным.

9. Расчеты развития в слое смешения турбулентности, масштаб которой значительно меньше поперечного размера слоя с градиентом скорости, показывают, что масштаб турбулентности и интенсивность возмущений возрастают до значений, определяемых поперечным размером слоя смешения и разностью скоростей. При одной и той же величине масштаба турбулентности, но различной начальной ширине слоя с градиентом скорости темп нарастания слоя смешения выше при меньшей начальной ширине слоя смешения. Вдали от начала при низком уровне турбулентной энергии во внешнем потоке темп нарастания слоя смешения приблизительно в 1,5 раза меньше величин, наблюдавшихся в эксперименте.

Выполненные расчеты показывают, что трехпараметрическая модель турбулентности может быть использована для расчета различных пограничных слоев и течений в каналах. При расчете свободных турбулентных течений модель может использоваться для расчета развития начальной турбулентности в потоках с градиентом скорости. Однако в тех случаях, когда в свободных потоках развиваются волны неустойчивости, что особенно характерно для течений с малой начальной интенсивностью пульсаций, а также вдали от начала, где смешение в значительной степени зависит от перемежаемости, данная модель дает заниженные скорости расширения свободных сдвиговых потоков.

1. Постановка задачи и основные уравнения. В данной работе будет рассмотрено применение трехпараметрической модели для расчета течений с теплообменом. Так как течения с теплообменом обычно сопровождаются ускорением или замедлением потока, а в сжимаемых потоках и сильным изменением плотности, то необходимо учесть в уравнениях переноса для характеристик турбулентности члены, описывающие влияние продольных деформаций потока. Эти вопросы рассматривались в [15, 16] применительно к использовавшимся в этих работах моделям турбулентности. Другим важным вопросом, рассмотренным в этой работе, является определение турбулентных тепловых потоков, в том числе и для таких течений, в которых координаты точек с нулевыми значениями $\langle u'v' \rangle$ и $\partial u/\partial y$ могут не совпадать.

Расчет в приближении пограничного слоя двумерных турбулентных течений газов постоянного состава, но переменной температуры требует определения средних значений двух компонент скорости, давления и температуры.

Зависимость градиента давления от продольной координаты при расчете пограничных слоев считается заданной. При расчете в приближении пограничного слоя течения в канале градиент давления вычисляется, для чего используется условие постоянного расхода по длине канала. Теплофизические свойства считаются известными функциями давления и температуры. Таким образом, для определения двух компонент скорости и температуры необходимы три уравнения. Этими уравнениями являются уравнения неразрывности, движения и энергии, которые для стационарного случая имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^i \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (r^i \rho v) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r^i} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^i \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \right) \right] \quad (1.2)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r^i} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^i \left(\rho c_p a \frac{\partial T}{\partial y} + \rho q_i \right) \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \Phi \quad (1.3)$$

Здесь x — направление вдоль стенки, y — нормальная координата, от-

считываемая от стенки, $i=0$ для плоского случая, $i=1$ для осесимметричного случая, u и v — компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно.

Для течения в трубе постоянного радиуса r_0 имеем $r=r_0-y$. Под величинами ρ , u , T и ρv подразумеваются их средние значения. Так как поперечная компонента скорости в (1.1)–(1.3) встречается только в комбинации ρv , то обычно вместо средней поперечной компоненты используется среднее значение произведения ρv . Здесь ρ — плотность, p — давление, u — продольная скорость, c_p — удельная теплоемкость, T — температура, μ — молекулярная вязкость, a — молекулярная температуропроводность. Для расчетов необходимо задать зависимость μ и a от температуры.

В систему уравнений (1.1)–(1.3) входят характеристики турбулентности $\tau = -\langle u'v' \rangle$, $q_t = -\langle v'T' \rangle$ и Φ — приток тепла за счет диссипации турбулентных пульсаций скорости, который равен диссипативному члену в уравнении переноса турбулентной энергии.

Для вычисления величин τ и q_t использован один из двух вариантов трехпараметрической модели турбулентности, разработанной авторами для несжимаемой жидкости в [11], в котором уравнения переноса записываются для энергии турбулентности E , турбулентного напряжения сдвига τ и параметра $\omega = E/L^2$ (L — масштаб турбулентности). Эти уравнения для случая ускорения потока могут быть дополнены членами, которые учитывают влияние деформации потока на характеристики турбулентности. Введение этих членов целесообразно, так как в тех участках течения, где du/dx сравнимо с du/dy , влияние новых членов может быть значительно. Это в основном относится к участкам течения вне пограничного слоя при значительном ускорении внешнего потока. Так как турбулентность при деформации становится анизотропной, то точный учет влияния деформации на E , τ и ω невозможен. Поэтому предлагается в правые части уравнений для E , τ и ω ввести члены вида $c_E E du/dx$, $c_\tau \tau du/dx$ и $c_\omega \omega du/dx$, а константы c_E , c_τ и c_ω определить из анализа задачи о быстрой осесимметричной деформации. Величину c_E предлагается определить таким образом, чтобы при быстрой осесимметричной деформации зависимость E/E_0 от u/u_0 была в некотором диапазоне изменения u/u_0 близка к зависимости, полученной при решении уравнения

$$u \frac{\partial E}{\partial x} = c_E E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{E}{E_0} = \left(\frac{u}{u_0} \right)^{c_E}$$

В диапазоне изменения u/u_0 от 1 до 5 при значении $c_E = 0,5$ поведение E/E_0 при быстрой деформации описывается с точностью 10%. Величина c_τ оценивалась в предположении, что при быстрой деформации $\tau/\tau_0 = (\langle u'^2 \rangle \langle v'^2 \rangle / \langle u_0'^2 \rangle \langle v_0'^2 \rangle)^{1/2}$. При этом $c_\tau = -0,13$. Значение c_ω оценивалось, исходя из предположения, что при быстрой деформации величина $\sqrt{EL} \approx \text{const}$. В этом случае $c_\omega = 2c_E$.

Если расширить диапазон изменения u/u_0 от 1 до 10, то с точностью до 15% изменение E/E_0 при быстрой деформации описывается при значении $c_E = 0,65$. В этом случае $c_\tau = -0,15$.

Введенные выше члены малы при $du/dy > du/dx$, а вызванные введением этих членов изменения E и ω вне пограничного слоя, по-видимому, слабо повлияют на течение в развитом турбулентном пограничном слое. Однако влияние этих членов будет более значительным при расчетах переходных режимов течения в условиях сильного ускорения внешнего потока.

С учетом введенных выше членов и переменной плотности уравнения для E , τ и ω имеют вид

$$\rho \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} \right) = -(c_\tau \mu + c_\rho \sqrt{EL}) \frac{E}{L^2} + \rho \tau \frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{r^i} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^i D_E \frac{\partial E}{\partial y} \right) + c_E \rho E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.4)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) = - (c_6 \mu + c_5 \rho \sqrt{E} L) \frac{\tau}{L^2} + c_7 \rho E \frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{r^i} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^i D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) - i \frac{D_\tau}{r^2} \tau + c_\tau \rho \tau \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.5)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = - 1,4 c_1 \mu \frac{\omega - \omega_0}{L^2} - 2 c_\rho \rho \frac{\sqrt{E}}{L} \omega +$$

$$+ \left[\frac{\tau}{E} + 2 c_4 \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \rho \omega \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r^i} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^i D_\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) +$$

$$+ c_\omega \rho \omega \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$D_\omega = \alpha_\omega \mu + a_\omega \rho \sqrt{E} L \quad (\Phi = E, \tau, \omega), \quad \omega_0 = (2 c_1 E)^{-1} \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2, \quad L = \left(\frac{E}{\omega} \right)^{1/2}$$

Значения констант следующие [11]: $c = 0,3$; $c_1 = 5\pi/4$; $c_4 = 0,04$; $c_5 = 3c$; $c_6 = 9c_1$; $c_7 = 0,2$; $\alpha_E = \alpha_\tau = 1$; $\alpha_\omega = 1,4\alpha_E$; $a_E = a_\omega = 0,06$; $a_\tau = a_E c_5 / c = 0,18$.

Так как данная модель турбулентности будет использована для течений с переменной плотностью, то в правую часть уравнений (1.4)–(1.6) могут быть добавлены члены, учитывающие влияние деформации из-за изменения плотности. Эти члены в уравнениях для E , τ и ω имеют соответственно вид

$$\frac{2}{3} E \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{2}{3} \tau \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{4}{3} \omega \frac{d\rho}{dt} \quad (1.7)$$

Константы определены из задачи о быстрой изотропной деформации. Это означает, что решения уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2}{3} \frac{E}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{4}{3} \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

описывают изменение E и $\omega = E/L^2$ при быстрой изотропной деформации. Кроме того, предполагалось, что при деформации $\tau/E = \text{const}$. При расчетах течений газа при числе Маха $M < 4$ и $\Delta T/T < 3$ добавление этих членов не влияло на результаты расчета. Укажем, что из уравнения (1.4) следует выражение для величины Φ , входящей в уравнение (1.3)

$$\Phi = (c_1 \mu + c_\rho \sqrt{E} L) E / L^2$$

Необходимо еще определить величину $q_i = -\langle v'T' \rangle = a_i \partial T / \partial y$. Для этого вводим величину $v_i = -\langle u'v' \rangle / (\partial u / \partial y)$ и считаем, что $\text{Pr}_i = v_i / a_i = 0,85$. Это значение получено в [17] для логарифмического слоя в диапазоне чисел Прандтля $0,02 \leq \text{Pr} \leq 100$.

Определение a_i с помощью введения турбулентного числа Прандтля означает, что зависимость a_i от граничных условий такая же, как и для v_i , для которого такая зависимость находится из уравнений переноса для характеристик турбулентности, входящих в модель. Область применения трехпараметрической модели с предположением $\text{Pr}_i = \text{const}$ должна быть определена из сравнения результатов расчетов с экспериментом.

Однако введение v_i приводит к тому, что в расчетах эта величина может обращаться в ∞ в тех точках, где $\partial u / \partial y = 0$, а $\langle u'v' \rangle \neq 0$. Рассмотрим область течения, в которой $\partial u / \partial y = 0$, а $\partial T / \partial y \neq 0$. Тогда $-\langle v'T' \rangle$ при больших числах $R_i = \sqrt{E} L / \nu$ может зависеть только от E , L и $\partial T / \partial y$ и из анализа размерностей следует, что $-\langle v'T' \rangle = \gamma \sqrt{E} L \partial T / \partial y$. Здесь γ — экспериментальная константа.

Будем считать, что это выражение для $-\langle v'T' \rangle$ справедливо не только при $du/dy=0$, но и при малых du/dy , для которых v_t может быть определено как $-\langle u'v' \rangle / (du/dy)$. Тогда при $z=L|du/dy|/\sqrt{E}$, меньших некоторого малого значения, например 0,1, будем считать $a_t = \gamma\sqrt{EL}$, а γ равным величине β/Pr_t ($\beta = v_t / (\sqrt{EL})$) при $z=0,1$. Величина z , при которой изменяется определение a_t , должна слабо влиять на результаты расчетов, так как область между нулевыми значениями $-\langle u'v' \rangle$ и du/dy , как правило, очень мала. При малых z и при больших числах R_t , как следует из расчетов [11], $\beta=0,23$. При малых R_t величина β является функцией R_t [11]. Однако несовпадение нулей $-\langle u'v' \rangle$ и du/dy обычно наблюдается в потоках с немонокотонными, несимметричными профилями скорости, когда в окрестности точки, в которой $du/dy=0$, имеются области с различными градиентами скорости. А в этом случае турбулентное число Рейнольдса, как правило, не мало.

Определение $-\langle v'T' \rangle$ как $a_t \partial T / \partial y$, приводит, естественно, к совпадению нулевых значений $-\langle v'T' \rangle$ и $\partial T / \partial y$, чего может не наблюдаться при течениях с немонокотонными и несимметричными профилями температуры. В тех случаях, когда этот эффект существен, величину $-\langle v'T' \rangle$ следует определить, записывая для нее уравнение переноса.

При заданных теплофизических свойствах система уравнений (1.1) — (1.6), дополненная выражением для q_t , является замкнутой системой уравнений. Граничные условия для u , ρv и T зависят от типа задачи, а условия на стенке для E , τ и ω имеют вид $E=0$, $\tau=0$, $\partial E / \partial y = 0$.

Приведенная выше система уравнений позволяет рассчитывать течения в канале при наличии направленной вдоль потока силы тяжести. Расчет пограничных слоев с учетом силы тяжести, действующей в направлении, перпендикулярном стенке, потребовало бы введения в уравнения для E , τ и ω соответствующих членов, что не входило в задачу этой статьи.

Распространение этой модели на расчет течений смесей газов потребовало бы добавления уравнения для концентраций и определения величины $-\langle v'c' \rangle$, что может быть сделано аналогично определению $-\langle v'T' \rangle$.

Ниже приведены результаты расчетов полей температур в каналах при $\Delta T/T \ll 1^2$ и в сверх- и дозвуковых течениях с переменной плотностью³.

2. Сжимаемые пограничные слои. В данном разделе будут приведены результаты расчета турбулентного пограничного слоя при течении газа с теплообменом при числах Маха $M > 1$ с использованием трехпараметрической модели турбулентности.

Расчеты проводились с помощью системы уравнений пограничного слоя однородного газа на плоской пластине. При $x=0$ задавались равномерные профили скорости, температуры, энергии турбулентных пульсаций и масштаба турбулентности. Турбулентное касательное напряжение в начальном сечении задавалось равным нулю. Для величин динамической вязкости μ и числа Прандтля Pr использовались выражения, справедливые для воздуха: $\mu/\mu_0 = (T/T_0)^{0,7}$, $Pr=0,7$, $c_p = \text{const}$. Турбулентное число Прандтля $Pr_t = 0,85$. Значения чисел Маха в начальном сечении варьировались от 0 (случай течения несжимаемой жидкости) до 4.

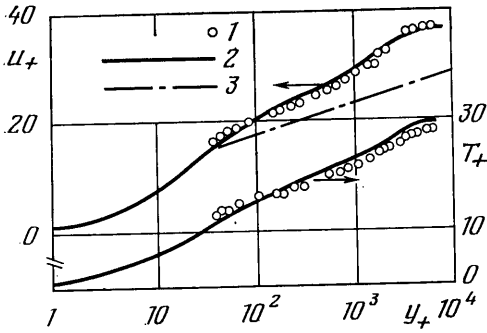
В результате проведения серии расчетов при $M \leq 4$ и $\Delta T/T < 2,5$ оказалось, что добавление в уравнения модели турбулентности членов (1.7) не влияет на результаты расчетов. Отсутствие влияния членов с градиен-

² Луцик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Исследование сдвиговых течений в каналах при наличии теплообмена с использованием трехпараметрической модели турбулентности.— Отчет Ин-та механики МГУ, 1982, № 2692, 41 с.

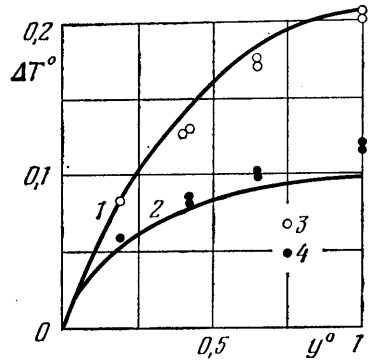
³ Луцик В. Г., Павельев А. А., Сизов В. И., Якубенко А. Е. Исследование неизоэнтальпических течений в каналах и сверхзвуковых пограничных слоях с использованием обобщенной трехпараметрической модели турбулентности.— Отчет Ин-та механики МГУ, 1984, № 3060, 58 с.

гами плотности в уравнении для турбулентной вязкости при расчетах течений с $M < 5$ отмечалось в [18].

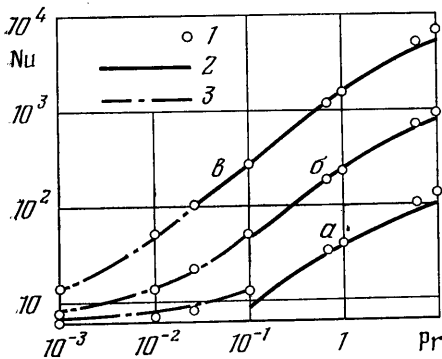
Расчет пограничного слоя при $M < 1$ для $T_w/T_e = 0,5$ показал, что величина коэффициента аналогии Рейнольдса $F/2 = St/c_f$ не зависит от числа Рейнольдса и равна примерно 0,6, что хорошо согласуется с теоретическими и экспериментальными значениями [19, 20]. На фиг. 1 приведены рассчитанные профили скорости $u_+ = u/v_*$ и температуры $T_+ = \rho_w v_* c_{pw} (T_w - T)/q_w$ (кривые 2) в зависимости от $y_+ = \rho_w v_* y / \mu_w$ на охлаждаемой стенке при $T_w/T_e = 0,45$ и $Re = 5,2 \cdot 10^3$. На фиг. 1 представлены также результаты эксперимента (точки 1) из работы [21] при тех же значениях T_w/T_e и Re .



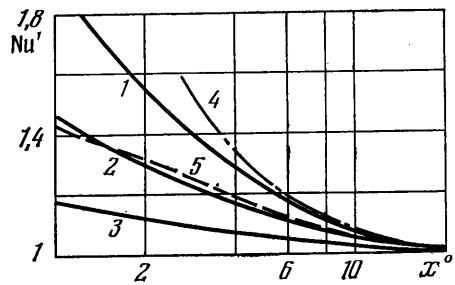
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Кривая 3 соответствует распределению скорости при течении газа с постоянными свойствами.

Анализ результатов расчетов (фиг. 1) показывает хорошее согласование между измеренными и рассчитанными с использованием трехпараметрической модели турбулентности профилями скорости и температуры.

Расчеты пограничного слоя для чисел Маха $M \leq 4$ дали хорошее совпадение с результатами эксперимента [22] как по интегральным характеристикам, таким, как c_f и St , так и по локальным характеристикам, построенным в специальных координатах, предложенных Ван Дристом [23].

К сожалению, отсутствие экспериментальных данных по пульсационным характеристикам пограничного слоя с до- и сверхзвуковыми скоростями в условиях существенной неизотермичности не позволяет провести детальное сравнение полученных результатов расчетов с экспериментом для течений такого типа.

3. Теплообмен в трубе при течении жидкости с постоянными физическими свойствами. Предположение о постоянстве физических свойств среды при наличии теп-

лообмена в ней, т. е. при переменной температуре, является продуктивным в методическом отношении, так как позволяет существенно упростить решение задачи, поскольку уравнение энергии при этом может быть решено независимо от уравнения движения. Это с достаточной точностью можно делать лишь в случае $\Delta T/T \ll 1$. С другой стороны, тепловой поток не должен быть слишком малым, чтобы по сравнению с ним можно было пренебречь тепловыделением за счет диссипации кинетической энергии под действием молекулярной вязкости. Тем не менее существует достаточно широкий интервал условий теплообмена, при которых допущение о пассивности температуры оказывается вполне приемлемым [17].

Ниже для развитого течения, т. е. на фоне не меняющихся по длине трубы характеристик течений (профиля продольной составляющей скорости $u(r)$) и турбулентности (профиля турбулентного трения $\tau(r)$), полученных в результате решения системы (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) с отброшенными конвективными членами, рассмотрено уравнение энергии (1.3) со следующими граничными условиями:

$$\rho c_p u(r) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial r} \right], \quad \lambda = \frac{\mu c_p}{Pr}, \quad \lambda_t = \frac{\rho c_p}{Pr_t} \frac{\tau(r)}{\partial u / \partial r} \quad (3.1)$$

$$x=0: T=T_0=\text{const}, \quad r=0: \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r=r_0: \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = q_w \quad (3.2)$$

Решение уравнения (3.1) с граничными условиями (3.2) получено для двух случаев.

Первому случаю, который в литературе получил наименование стабилизированного теплообмена, соответствует теплообмен вдали от начала участка обогрева. На фиг. 2 в качестве иллюстрации полученных результатов приведено сравнение расчетных профилей температур $\Delta T^* = \lambda(T_w - T) / 2q_w r_0$ в зависимости от расстояния до стенки трубы $y^* = y/r_0$ с экспериментальными данными [24] для ртути ($Pr=0,026$) при двух числах Рейнольдса $R=10^4$ и $5 \cdot 10^4$ (кривые 1 и 2 соответственно). Экспериментальные точки 3, 4, соответствующие указанным числам Рейнольдса, получены на расстоянии от входа в обогреваемый участок трубы (диаметром d_0) $x/d_0=19-24,4$, где теплообмен можно считать стабилизированным. Расчетные зависимости близки к экспериментальным данным. Этот расчет, как и все последующие, проведен при постоянной величине турбулентного числа Прандтля по сечению трубы, значение которого, согласно [17], принято $Pr_t=0,85$.

К настоящему времени накоплен достаточно большой объем информации (см., например, в [17]), подтверждающий, что профили температуры как лабораторных, так и встречающихся в природе пристенных турбулентных течений с теплопереносом хорошо описываются логарифмической формулой на значительном интервале расстояний от стенки. В [17] путем обработки профилей температуры для развитых течений в трубах и плоских каналах по данным измерений в потоках жидких металлов, воздуха и воды получены соответствующие логарифмические зависимости. Сравнение результатов расчета профилей температуры в диапазоне чисел Прандтля $Pr=10^{-2}-1$ и Рейнольдса $R=10^4-3 \cdot 10^5$ с полученными в [17] зависимостями в пределах их применимости оказалось вполне удовлетворительным. Расчеты подтвердили тот факт, что с ростом числа Рейнольдса протяженность области, отвечающей логарифмическому закону, возрастает.

Для инженерной практики большой интерес представляет коэффициент теплоотдачи, безразмерным аналогом которого является число Нуссельта. Измерениям коэффициента теплоотдачи посвящено несравненно большее число работ, нежели измерениям профилей температур. Это позволило с большой достоверностью обобщить имеющиеся экспериментальные данные зависимостями для числа Нуссельта в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Прандтля

$$Nu=7+0,025(R Pr)^{0,8} \quad (Pr < 0,1) \quad (3.3)$$

$$Nu = \frac{R Pr (\lambda/8)}{1 + 900/R + 12,7 (\lambda/8)^{1/2} (Pr^{1/2} - 1)} \quad (Pr > 0,1) \quad (3.4)$$

$$\lambda^{-1/2} = 2 \lg (R \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (3.5)$$

Формулы (3.3) и (3.4), (3.5) предложены для жидких металлов и газов и жидкостей соответственно в [25, 26].

На фиг. 3 представлено сравнение результатов расчета (точки 1) с указанными выше зависимостями $Nu(R, Pr)$ (3.4) (кривая 2) и (3.3) (кривая 3) в диапазоне изменения чисел Прандтля $Pr=10^{-3}-10$ для трех чисел Рейнольдса: $a-R=10^4$; $b-10^5$; $c-10^6$. В указанном диапазоне чисел R и Pr соответствие можно считать вполне удовлетворительным.

При малых числах Прандтля зависимость $Nu(R, Pr)$ допускает обобщение вида $Nu(Re)$, $Re=R Pr$ [25]. В литературе содержится множество зависимостей $Nu(Re)$,

обобщающих экспериментальные данные различных авторов. Наиболее популярными являются упомянутая выше зависимость (3.3), а также зависимости [25], относящиеся к случаю $q_w = \text{const}$, при котором были проведены расчеты

$$\text{Nu} = 4,36 + 0,16 \text{Pe} \quad (30 \leq \text{Pe} < 300); \quad \text{Nu} = 7,5 + 0,005 \text{Pe} \quad (300 \leq \text{Pe} \leq 10^4)$$

Сравнение результатов расчетов для трех чисел Прандтля $\text{Pr} = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ с указанными зависимостями $\text{Nu}(\text{Pe})$ действительно подтверждает возможность представления коэффициента теплоотдачи в виде однопараметрической зависимости $\text{Nu}(\text{Pe})$ с точностью, по-видимому, не ниже погрешности эксперимента, представление о которой дает различие в указанных эмпирических зависимостях.

Что касается расчетов при $\text{Pr} > 10$, то малая толщина температурного подслоя требует уменьшения размера шага расчетной сетки по сравнению со случаем $\text{Pr} = 1$. Кроме того, на результаты расчетов сильное влияние будет оказывать поведение величин $\langle u'v' \rangle$ и Pr_t вблизи стенки на расстояниях, значительно меньших толщины вязкого подслоя. По этим причинам возможность использования предложенной модели при $\text{Pr} > 10$ требует дополнительного анализа.

Исследованию термической стабилизации, составляющей второй рассмотренный случай, посвящена достаточно обширная литература (см., например, в [24, 26]).

В расчетах использовалось уравнение энергии в форме (3.1) с граничными условиями (3.2) при известных полях скорости и характеристик турбулентности, которые по длине термического начального участка не изменялись.

На фиг. 4 представлены результаты расчета относительной величины локального коэффициента теплоотдачи $\text{Nu}' = \text{Nu}/\text{Nu}_\infty$ по длине начального термического участка трубы $x^* = x/d_0$ для ртути ($\text{Pr} = 0,026$) — кривая 1, воздуха ($\text{Pr} = 0,7$) — кривая 2, воды ($\text{Pr} = 6$) — кривая 3. Число Рейнольдса для всех кривых составляло $R = 5 \cdot 10^4$. Там же нанесены кривые: 4 — аппроксимирующая результаты эксперимента [24] для ртути при $R = 5 \cdot 10^4$, 5 — соответствующая эмпирической зависимости [26]

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_\infty} = 1 + 0,48 \left(\frac{x}{d_0} \right)^{-1/4} \left(1 + \frac{3600}{R\sqrt{x/d_0}} \right) \exp \left(-0,17 \frac{x}{d_0} \right) \quad (3.6)$$

обобщающей результаты измерений в диапазоне $4 \cdot 10^3 \leq R \leq 5 \cdot 10^5$, $0,7 < \text{Pr} < 1$ и $x/d_0 \geq 0,06$. Зависимость (3.6) построена на фиг. 4 для $\text{Pr} = 0,7$, $R = 5 \cdot 10^4$. Совпадение результатов расчета с экспериментальными данными для жидких металлов и воздуха вполне удовлетворительное.

По результатам расчетов зависимости $\text{Nu}(x)$ для жидких металлов была определена длина так называемого участка термической стабилизации $l_T/d_0 = f(R, \text{Pe})$, аналогичная длине начального участка гидродинамической стабилизации. Обработка экспериментальных данных показывает [27], что для жидких металлов зависимость длины начального термического участка l_T от чисел R и Pr допускает обобщение вида $l_T/d_0 = f(\text{Pe})$ аналогично зависимости $\text{Nu}(\text{Pe})$. Расчетные зависимости $l_T/d_0 = f(\text{Pe})$ для трех значений чисел $\text{Pr} = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ и числа $R = 10^4 - 10^5$, охватывающие диапазон чисел $\text{Pe} = 10 - 10^4$, можно с некоторой погрешностью описать единой зависимостью, которая близка к эмпирической зависимости [27] $l_T/d_0 = 13 [1 - \exp(-0,032 \text{Pe}/13)]$, полученной на основании обобщения опытных данных по теплообмену в жидких металлах.

Таким образом, проведенные расчеты теплообмена при течении жидкости с постоянными физическими свойствами как на начальном термическом участке, так и в условиях стабилизированного теплообмена подтвердили возможность использования трехпараметрической модели турбулентности для расчета теплообмена в предположении постоянства турбулентного числа Прандтля в диапазоне чисел $R = 10^4 - 10^6$ и $\text{Pr} = 10^{-3} - 10^1$.

4. Теплообмен в трубе при течении среды с переменными физическими свойствами. Рассматриваются течение и теплообмен на начальном гидродинамическом и тепловом участке трубы. Исходными для расчета являются уравнения (1.1) — (1.6) со следующими граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0, \quad \rho v = \tau = 0 \quad (r=0) \quad (4.1)$$

$$u = \rho v = E = \tau = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \tau} = 0 \quad (r=r_0) \quad (4.2)$$

$$q_w = \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{либо} \quad T = T_w \quad (r=r_0) \quad (4.3)$$

$$u=u_0, \quad p=p_0, \quad T=T_0, \quad E=E_0, \quad \tau=\tau_0, \quad (4.4)$$

$$\omega=\omega_0 \quad (L=L_0) \quad (x=0, \quad 0 < r < r_0)$$

Величины u_0 , T_0 , E_0 , τ_0 и ω_0 (или L_0), которые в общем случае являются функциями радиальной координаты, в данном случае задавались константами, а $\tau_0=0$.

Задача (1.1)–(1.6), (4.1)–(4.4) решалась в безразмерном виде методом прогонки с итерациями. В расчетах использовалась неравномерная сетка по радиусу и по длине трубы. Сходимость итерационного процесса контролировалась по сходимости величины градиента давления $P = -dp/dx$ так, чтобы $|1 - P_{N-1}/P| \leq 10^{-3}$.

В качестве теплоносителя рассматривался воздух, термодинамические и переносные свойства которого в зависимости от температуры при нормальном давлении были взяты из [28] и в виде таблиц с шагом по температуре $\Delta T = 100$ К были введены в программу.

Расчеты проводились при числе Маха $M=0$, т. е. течение полагалось существенно дозвуковым, число Рейнольдса на входе в трубу $R=$

Условие на стенке	Тепловой режим	T_0 , К	T_w , К	q_w°	x_k°	Вариант
$T_w = \text{const}$	Нагрев	300	1000	—	325	1
		300	600	—	130	2
	Охлаждение	1000	500	—	95	3
		1000	300	—	225	4
		2000	300	—	65	5
		3000	300	—	65	6
$q_w = \text{const}$	Нагрев	300	—	400	150	7
		300	—	200	230	8
		300	—	100	300	9
	Охлаждение	1000	—	-50	200	10
		1000	—	-70	100	11
		1000	—	-100	65	12

$=\rho_0 u_0 d_0 / \mu_0 = 10^5$ ($d_0 = 2r_0$ — диаметр трубы). Характеристики турбулентности на входе, постоянные по сечению трубы, были следующими: $E_0/u_0 = 0,001$; $\omega_0/(r_0 u_0^2) = 0,05$ ($L_0/r_0 = 0,14$). Турбулентное число Прандтля Pg_t , как и в случае среды с постоянными физическими свойствами, принималось постоянным и равным 0,85. Профили скорости и температуры на входе были однородными.

Для обоих вариантов граничного условия (4.3) рассматривались как нагрев, так и охлаждение газа. Характеристики рассчитанных вариантов представлены в таблице. Номера вариантов, указанных в таблице, соответствуют номерам кривых, построенных по результатам расчета. Варианты 1, 4, 9, 10 рассчитывались также при постоянных физических свойствах, соответствующих температуре на входе в трубу, и имеют нумерацию 1°, 4°, 9°, 10°. Конечное расчетное сечение $x_k^\circ = x/d_0$, указанное в таблице, соответствует расстоянию в калибрах (d_0) от входа в трубу, до которого продолжался расчет. Безразмерный тепловой поток $q_w^\circ = q_w d_0 / \lambda_0 T_0$. «Включение» граничных условий на стенке трубы производилось не скачкообразно на входе в трубу, а было растянуто по длине, так что номинальных значений температура стенки или тепловой поток достигали на расстоянии $x_H^\circ = x/d_0 \approx 5$ от входа в трубу.

Для всех вариантов расчета (см. таблицу) получено изменение по длине коэффициента сопротивления λ и числа Нуссельта Nu , определенных в соответствии с [26]

$$\lambda = 8 \frac{\tau_w \rho_f}{\langle \rho u \rangle^2}, \quad Nu = \frac{d_0 q_w}{\lambda_f (T_w - \langle T \rangle)}, \quad \langle T \rangle = \frac{2}{\rho_0 u_0 T_0 r_0^2} \int_0^{r_0} \rho u T r dr \quad (4.5)$$

Здесь $\langle T \rangle$ — среднemasсовая температура жидкости, $\langle \rho u \rangle$ — средняя массовая скорость, которая в рассматриваемом случае постоянства сечения трубы ($d_0 = \text{const}$) и расхода жидкости не изменяется по длине и равна соответствующей величине на входе $\rho_0 u_0$. Индексы w и f означают, что величина соответствует условиям на стенке или берется при среднemasсовой температуре $\langle T \rangle$.

Для вариантов 1° , 4° , 9° , 10° , рассчитанных при постоянных физических свойствах, соответствующих температуре на входе в трубу (см. таблицу), характер изменения коэффициента сопротивления по длине трубы $\lambda(x)$ аналогичен полученному ранее [12]. Выход на развитое течение происходит примерно на 50 калибрах трубы, что соответствует эксперименту. Аналогичный характер имеет зависимость $Nu(x)$ для постоянных физических свойств среды, а небольшое расслоение зависимости для вариантов 1° , 4° , 9° , 10° , полученное в расчетах, объясняется различием в числах Прандтля, соответствующих разным температурам на входе в трубу (см. таблицу).

Для среды с переменными физическими свойствами при нагреве (варианты 1, 2, 7–9) коэффициент сопротивления возрастает, а число Нуссельта падает. При охлаждении (варианты 3–6, 10–12) имеет место обратная картина. Число Рейнольдса при этом за счет изменения теплофизических свойств при нагреве падает, а при охлаждении возрастает.

Для случае $T_w = \text{const}$ существует предельный режим течения, когда температура жидкости становится равной температуре стенки T_w . При этом в случае нагрева, например, для варианта 1 при $T_f = T_w = 1000$ К число Рейнольдса становится равным $13 \cdot 10^3$, а число Прандтля $Pr = 0,733$. Для этих чисел R и Pr коэффициент сопротивления и число Нуссельта в соответствии с известными зависимостями (3.5) и (3.4) принимают значения $\lambda = 0,0288$, $Nu = 37,2$. Как следует из расчетов для варианта 1 даже при $x/d_0 = 300$, где $\lambda = 0,021$, $Nu = 90$, течение далеко от предельного. Это означает, что перестройка тепловой и динамической картины течения при числе Прандтля $Pr = 1$ происходит достаточно медленно.

Аналогичная ситуация имеет место и при охлаждении потока. Например, для варианта 4 предельный режим течения отвечает $T_f = T_w = 300$ К, когда $R = 767 \cdot 10^3$, $Pr = 0,707$. При этом $\lambda = 0,0122$, $Nu = 920$. В расчете при $x/d_0 = 225$ получено соответственно $\lambda = 0,015$, $Nu = 350$.

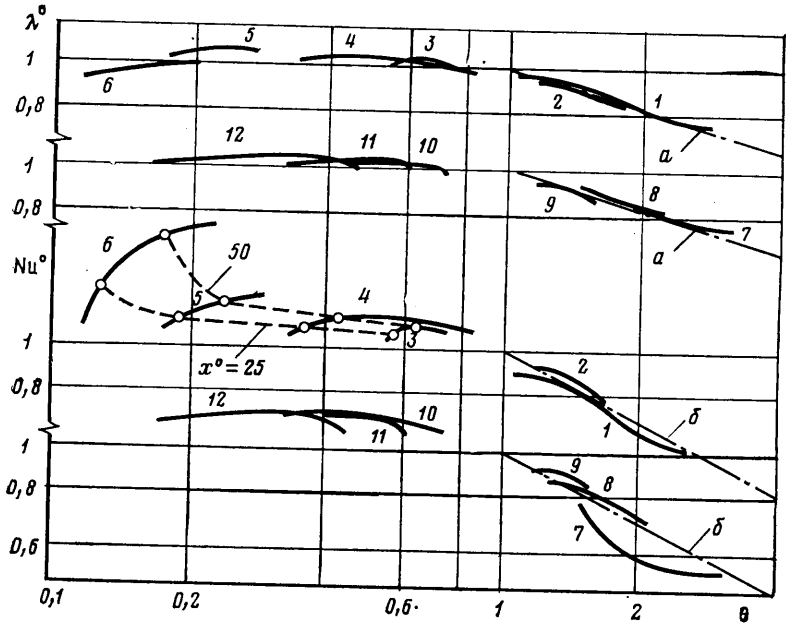
При постоянном тепловом потоке на стенке трубы $q_w = \text{const}$ такого предельного режима не существует. Результаты расчета свидетельствуют также, что на длинах вплоть до 300 калибров трубы отсутствует режим, где $\lambda = \text{const}$, $Nu = \text{const}$, что не подтверждает высказанное в [26] предположение о существовании такого режима на достаточном удалении от входа в трубу.

В литературе по теплообмену часто используется относительное число Нуссельта — отношение числа Nu при течении среды с переменными физическими свойствами к величине числа Nu_0 для среды с постоянными свойствами при тех же значениях чисел R и Pr . Для последнего используется зависимость (3.4) [26].

Для всех вариантов расчета получена зависимость $Nu^\circ = Nu/Nu_0$ от x/d_0 . Отличие кривых 1° , 4° и 9° , 10° от единицы при $x/d_0 \geq 50$, демонстрирующее степень соответствия результатов расчета формуле (3.4), не превышает 2%.

Представляет интерес построение широко используемой на практике зависимости относительных значений числа Нуссельта $Nu^\circ = Nu/Nu_0$ и коэффициента сопротивления $\lambda^\circ = \lambda/\lambda_0$ от температурного фактора $\theta =$

$=T_w/\langle T \rangle$. Поскольку значение температурного фактора θ меняется по длине трубы, то для каждого из вариантов расчета (см. таблицу) получены соответствующие кривые $Nu^\circ(\theta)$, $\lambda^\circ(\theta)$, представленные на фиг. 5. Следует отметить, что для $\lambda^\circ(\theta)$ температурный фактор при нагреве (варианты 1, 2) уменьшается по длине трубы, а при охлаждении (варианты



Фиг. 5

3–6) возрастает. В пределе для случая $T_w = \text{const } \theta \rightarrow 1$. Для случая $q_w = \text{const}$ температурный фактор как при нагреве (варианты 7–9), так и при охлаждении (варианты 10–12) уменьшается по длине трубы.

Зависимости $\lambda^\circ(\theta)$ группируются вблизи кривых $\lambda^\circ = \theta^n$, где $n=0$ в случае охлаждения и $n=-0,3$ (кривая *a*) в случае нагрева, что по характеру изменения отвечает эксперименту (ссылки см. в [26]).

Расслоение зависимостей $Nu^\circ(\theta)$ по вариантам расчета и по длине трубы более существенное. Наиболее заметно это для случая $T_w = \text{const}$ при охлаждении (варианты 3–6). Штрихом на фиг. 5 соединены точки на кривых, соответствующие длинам $x/d_0 = 25$ и 50. Как видно, только на небольшом расстоянии от входа в трубу Nu° не зависит от θ . На большом удалении от входа Nu° зависит от θ_0 . Для случая $q_w = \text{const}$ при охлаждении (варианты 10–12) Nu° от θ зависит очень слабо.

Экспериментальные данные, опубликованные в последние годы (см. в [26]), показывают, что при охлаждении двухатомных газов (воздух, азот) Nu° в пределах погрешности измерений ($\pm 10-15\%$) не зависит от θ и равно примерно единице.

При нагреве в обоих случаях $T_w = \text{const}$ и $q_w = \text{const}$ (варианты 1, 2, 7–9, фиг. 5) кривые группируются вокруг зависимости $Nu^\circ = \theta^{-0,5}$ (кривая *b*), полученной в [26] и подтвержденной экспериментом.

Таким образом, из фиг. 5 следует, что учесть влияние переменности физических свойств среды на температуру и сопротивление при помощи лишь температурного фактора в общем случае невозможно. Однако если удовлетвориться точностью $\sim 10\%$, то зависимости $\lambda^\circ(\theta)$ можно описать обобщенными кривыми $\lambda^\circ = \theta^n$ с $n=0$ при охлаждении и $n=-0,3$ при нагреве. Зависимости $Nu^\circ(\theta)$ могут быть обобщены с точностью $\sim 20\%$ соотношением $Nu^\circ = \theta^n$ с $n=-0,5$ при нагреве как в случае $T_w = \text{const}$, так и

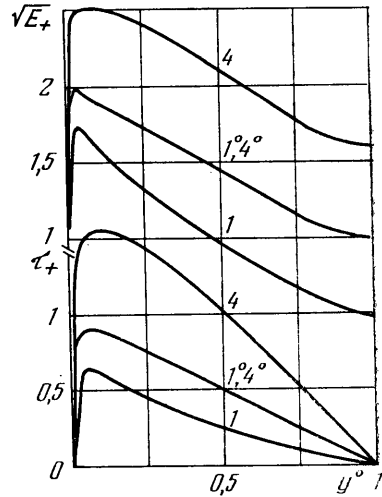
при $q_w = \text{const}$, и $n=0$ при охлаждении для случая $q_w = \text{const}$. Для случая $T_w = \text{const}$ указанное обобщение при охлаждении справедливо лишь на небольших расстояниях от входа в трубу $x/d_0 \leq 30$.

Изменение физических свойств среды оказывает существенное влияние на распределение относительной массовой скорости ru . При нагреве (вариант 1) профиль ru менее наполнен, а при охлаждении (вариант 4) более наполнен по сравнению со случаем постоянных физических свойств (варианты 1°, 4°).

Влияние переменности свойств на деформацию профилей температуры имеет ту же тенденцию, что и для профилей массовой скорости, хотя эффект менее существен.

На фиг. 6 в зависимости от $y^\circ = y/r_0$ представлены профили энергии турбулентности $\sqrt{E_+} = \sqrt{E}/v_*$ и турбулентного трения $\tau_+ = \tau/v_*^2$ в сечении $x/d_0 = 100$ для случая $T_w = \text{const}$ при нагреве (вариант 1) и охлаждении (вариант 4). Динамическая скорость v_* определена по температуре стенки $T_w (v_* = \sqrt{\tau_w/\rho})$. При охлаждении имеет место увеличение максимальных значений $\sqrt{E_+}$ и τ_+ (вариант 4), а при нагреве — уменьшение этих величин (вариант 1) по сравнению с расчетом при постоянных свойствах жидкости. Эти результаты соответствуют известным представлениям и имеют экспериментальное подтверждение.

Авторы благодарят В. И. Сизова, выполнившего расчеты, результаты которых представлены в п. 2 статьи.



Фиг. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиневский А. С., Иоселевич В. А., Колесников А. В., Лапин Ю. В., Пилипенко В. Н., Секундов А. Н. Методы расчета турбулентного пограничного слоя. — В сб.: Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа, 1978, т. 11, с. 155–304.
2. Турбулентность. М.: Машиностроение, 1980. 343 с.
3. Глушко Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. — Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4, с. 13–23.
4. Секундов А. Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5, с. 114–127.
5. Глушко Г. С. Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. — В сб.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1970, с. 37–44.
6. Jones W. P., Launder B. E. The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence. — Int. J. Heat and Mass Transfer, 1973, v. 16, № 6, p. 1119–1130.
7. Hanjalic K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. — J. Fluid Mech., 1972, v. 52, № 4, p. 609–638.
8. Hanjalic K., Launder B. E. Contribution towards a Reynolds stress closure for low-Reynolds-number turbulence. — J. Fluid Mech., 1976, v. 74, № 4, p. 593–610.
9. Павельев А. А. Развитие решеточной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 1, с. 38–47.
10. Луцик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Модель сдвиговой турбулентности. — В кн.: 4-й Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике (Апнот. докл.). Киев: Наук. думка, 1976, с. 66.
11. Луцик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 3, с. 13–25.
12. Луцик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Исследование сдвиговых течений с использованием трехпараметрической модели турбулентности. — В кн.: 5-й Все-

- союз. съезд по теоретической и прикладной механике (Аннот. докл.). Алма-Ата: Наука, 1981, с. 241–242.
13. Луцки В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Исследование перехода к турбулентности в пограничном слое при большой интенсивности внешних возмущений с помощью трехпараметрической модели.— В сб.: Проблемы современной механики. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 127–138.
 14. Ерошенко В. М., Ершов А. В., Зайчик Л. И. Расчет турбулентного течения несжимаемой жидкости в круглой трубе с отсосом через пористые стенки.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4, с. 87–93.
 15. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
 16. Ханжалик, Лондер. Учет безвихревых напряжений в уравнении диссипации турбулентной энергии.— Теорет. основы инж. расчетов, 1980, т. 102, № 1, с. 149–157.
 17. Кадер Б. А., Яглом А. М. Законы подобия для пристенных турбулентных течений.— В сб.: Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа, 1980, т. 15, с. 81–155.
 18. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомоделности. М.: Машиностроение, 1975. 94 с.
 19. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
 20. Козлов Л. В. Связь аэродинамического нагрева с поверхностным трением.— Изв. АН СССР. Мех. и маш., 1963, № 4, с. 108–111.
 21. Back L. H., Cuffel R. F., Massier P. F. Effect of wall cooling on the mean structure of a turbulent boundary layer in a low-speed gas flow.— J. Heat Mass Transfer, 1970, v. 13, № 6, p. 1029–1047.
 22. Козлов Л. В. Экспериментальное исследование поверхностного трения на плоской пластине в сверхзвуковом потоке при наличии теплообмена.— Изв. АН СССР. Мех. и маш., 1963, № 2, с. 11–19.
 23. Фернгольц Г.-Г. Внешние течения.— В кн.: Турбулентность. М.: Машиностроение, 1980, с. 56–117.
 24. Генин Л. Г., Кудрявцева Е. В., Пахотин Ю. А., Свиридов В. Г. Температурные поля и теплоотдача при турбулентном течении жидкого металла на начальном термическом участке.— Теплофизика высоких температур, 1978, т. 16, № 6, с. 1243–1249.
 25. Боришанский Е. М., Кугателадзе С. С., Новиков И. И., Федынский О. С. Жидко-металлические теплоносители. М.: Атомиздат, 1976. 328 с.
 26. Петузов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Атомиздат, 1974. 407 с.
 27. Кадер Б. А. Теплоперенос при турбулентном течении жидкого металла в каналах с различными условиями на стенке.— Атом. энергия, 1980, т. 48, № 4, с. 233–238.
 28. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963. 708 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.V.1985