

**МЕХАНИКА  
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**  
**№ 2 • 1986**

УДК 532.517.4

**К ТЕОРИИ ЛАМИНАРНЫХ БЕЗЫМПУЛЬСНЫХ СЛЕДОВ**

**КОРОБКО В. И., ШАШМИН В. К., ШУЛЬМАН З. П.**

Анализ автомодельных законов затухания скоростного поля в безымпульсном плоском следе вязкой несжимаемой жидкости за гидродинамическим движителем впервые выполнен в [1]. Турублентные следы в ближней и дальней областях течения исследованы в [2] на основе интегрального метода расчета. В [3] получены асимптотические законы вырождения концентрации пассивной примеси температуры и полей скоростей, позволяющие оценить влияние чисто молекулярной диффузии и конвективного переноса на распределение концентрации пассивной примеси в следе.

В публикуемой работе найдены предельные автомодельные решения задачи о закрученном безымпульсном следе вязкой несжимаемой жидкости, а также автомодельные решения задачи о развитии плоского безымпульсного следа в неоднородной по температуре (концентрации пассивной примеси) среде.

1. Рассмотрим предельные автомодельные решения, описывающие осесимметричный закрученный безымпульсный след далеко вниз по потоку. Безымпульсный след кроме количества движения  $K=0$  [1–3] характеризуется моментом количества движения

$$G = 2\pi\rho \int_0^\infty uwr^2 dr \quad (1.1)$$

След с условием  $G=0$  возникает за движущимся свободным вращающимся телом, из которого истекает закрученная струя. При этом сила тяги равна силе сопротивления среды.

Уравнения движения и неразрывности в приближении пограничного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= v \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw) \right] \\ \frac{w^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (ru) + \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассмотрим граничные условия

$$u=u_\infty, \quad w=P=0 \quad (r=\infty); \quad v = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r} = w = 0 \quad (r=0)$$

Здесь  $x, r$  — осевая и радиальная координаты;  $u, v, w$  — соответственно осевая, радиальная и тангенциальная составляющие скорости;  $P$  — избыточное давление,  $u_\infty$  — скорость спутного потока. Согласно [3], автомодельные переменные и осевая составляющая избыточной скорости  $u_1$

в следе имеют вид

$$X=x, \quad \eta=r\left(\frac{vx}{u_\infty}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad u_1=u-u_\infty=Au_\infty\left(1-\frac{1}{4}\eta^2\right)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)X^{-2} \quad (1.3)$$

Представим скорость  $w$  и давление  $P$  в следующем виде:

$$w=u_\infty b(\eta)X^{\alpha_2}, \quad P=\rho u_\infty^2 h(\eta)X^{\alpha_3} \quad (1.4)$$

Переходя к автомодельным переменным (1.3) в (1.2), для функции  $b(\eta)$ , описывающей распределение скорости  $w$ , получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$b''+b'\left(\eta^{-1}+\frac{1}{2}\eta\right)-b(\eta^{-2}+\alpha_2)=0$$

Это уравнение заменой  $t=-\eta^2/4$  сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Его решение, удовлетворяющее граничным условиям, записывается через вырожденную гипергеометрическую функцию [4]

$$b=c\eta\exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)\Phi\left(\frac{3}{2}+\alpha_2, 2, \frac{\eta^2}{4}\right) \quad (1.5)$$

Исследуя выражение (1.5), получаем, что условие  $w\rightarrow 0$  при  $\eta\rightarrow\infty$  выполняется степенным образом при  $\alpha_2<0$  и экспоненциально, если  $3/2+\alpha_2$  равно целому отрицательному числу или нулю, т. е.  $\alpha_2=-3/2, -5/2, -7/2$  и т. д. Следовательно, граничные условия не определяют значение  $\alpha_2$ . В результате подстановки выражений  $u$ ,  $w$  в интегральное условие (1.1) получаем, что условие  $G=0$  выполняется при  $\alpha_2=-5/2$ . Для определения постоянной  $c$  в выражении (1.5) рассмотрим уравнение для  $w$  в области, удаленной вниз по потоку

$$u_\infty \frac{\partial w}{\partial x} = v \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw) \right] \quad (1.6)$$

Умножая обе части уравнения (1.6) на  $r^4$  и интегрируя по частям, получим, что в следе с интегральными условиями  $K=G=0$  сохраняется момент четвертого порядка

$$\int_0^\infty r^4 w dr = N = \text{const} \quad (1.7)$$

Полученное соотношение позволяет выразить значение постоянной  $c$  через интегральную характеристику следа  $N$ . Из уравнения системы (1.2), связывающего  $w$  и  $P$ , находим значение  $\alpha_3=-5$  и дифференциальное уравнение для  $h(\eta)$ :  $\eta h'(\eta)=b^2(\eta)$ . Его решение, удовлетворяющее граничным условиям  $h(\infty)=h'(0)=0$ , записывается в явном виде:  $h(\eta)=-c^2 \exp(-\eta^2/4)(\eta^4-5\eta^2+11)$ .

Таким образом, предельные автомодельные законы вырождения скоростей и давления в закрученном безыmpульсном следе с интегральными условиями сохранения  $K=G=0$  имеют вид

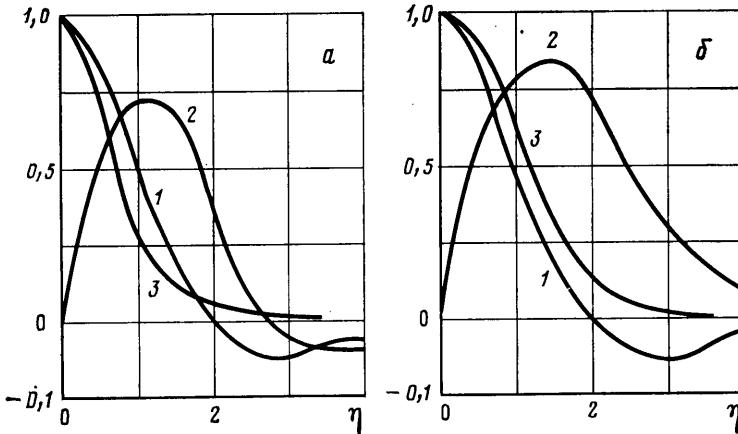
$$u_1=u_\infty A\left(1-\frac{\eta^2}{4}\right)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)X^{-2}, \quad w=u_\infty c\eta\left(1-\frac{\eta^2}{8}\right)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)X^{-5/2} \quad (1.8)$$

$$P=-\rho u_\infty^2 c(\eta^4-5\eta^2+11)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)X^{-5}$$

На фиг. 1, а представлены результаты расчетов по формулам (1.8) изменения поперек следа величин  $u_1^*=u_1/(u_\infty A)$ ,  $w^*=w/(u_\infty c)$  и  $P^*=-P/(11\rho u_\infty^2 c)$  (кривые 1, 2 и 3). Циркуляция  $w^*$  на периферии следа переходит через нулевое значение и меняет знак, так как тело, из которого

вытекает закрученная струя, закручивается в другую сторону и происходит взаимодействие закрученного следа от тела с вытекающей струей.

2. Рассмотрим случай истечения закрученной струи из тела, когда сила тяги равна силе сопротивления, а момент количества движения струи  $G=\text{const} \neq 0$  (тело не вращается). В этом случае развитие струи уже опре-



Фиг. 1

деляется интегральной характеристикой  $G$ . Вводя автомодельные переменные  $X=x$ ,  $\eta=r(vx/u_\infty)^\beta$  и подставляя выражение (1.4) в уравнение для  $w$  системы (1.2) и в интегральное условие  $G=\text{const}$ , получим значения  $\beta=-^1/_2$ ,  $\alpha_2=-^3/_2$ . Решение (1.5) при данном  $\alpha_2$  для составляющей скорости  $w$  записывается в виде

$$b(\eta)=c_1\eta \exp(-\eta^2/4) \quad (2.1)$$

В данном случае уже не выполняется интегральное соотношение (1.7) и значение константы  $c_1$  находится из условия  $G=\text{const}$ . Подставляя выражения для  $w$  и  $P$  (1.4) в третье уравнение системы (1.2), определяем степень затухания давления  $\alpha_3=-3$ . С учетом (2.1) решение для  $h(\eta)$  принимает вид

$$h(\eta)=-c_1^2 \exp(-\eta^2/2) \quad (2.2)$$

Подставляя выражение осевой скорости  $u_1=u_\infty f(\eta) X^{-\alpha_1}$  в первое уравнение системы (1.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $f(\eta)$ :  $f''+f'(\eta^{-1}+\eta/2)+\alpha_1 f=0$ . Его решение, удовлетворяющее граничным условиям  $f'(0)=f(\infty)=0$ , выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию [4]

$$f(\eta)=A \exp(-\eta^2/4) \Phi(1-\alpha_1, 1, \eta^2/4)$$

Возмущения, возникающие в следе, должны затухать на бесконечности с одинаковой скоростью. Циркуляция  $w$  (2.1) и давление  $P$  (2.2) затухают экспоненциально, поэтому условие  $f(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \infty$  выполняется экспоненциально при  $\alpha_1=0, 1, 2, \dots$ . Из условия  $K=0$  значение  $\alpha_1$  определяется однозначно:  $\alpha_1=2$ .

Выпишем законы вырождения скорости и давления при  $K=0$  и  $G=\text{const}$

$$u_1=u_\infty A \left(1-\frac{\eta^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) X^{-2}, \quad w=u_\infty c_1 \eta \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) X^{-3}, \quad (2.3)$$

$$P=-\rho u_\infty^2 c_1 \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) X^{-3}$$

Согласно (2.3), циркуляция  $w$  вырождается медленнее осевой скорости  $u_1$ . Возмущения в следе при  $G=\text{const}$ , возникшие от закрутки, сносятся спутным потоком, поэтому данный след характеризуется более устойчивой формой. На фиг. 1, б представлено изменение поперек следа полученных выше величин  $u_1^*=u_1/(u_\infty A)$ ,  $w^*=w/(u_\infty c_1)$  и  $P^*=-P/(\rho u_\infty^2 c_1^2)$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно).

3. Установим поведение температуры (концентрации пассивной примеси) за движущимся плоским телом в неоднородной по температуре среде. Уравнения движения, неразрывности и переноса тепла в приближении пограничного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $a$  — коэффициент температуропроводности (диффузии),  $T$  — температура (концентрация) в следе.

$$u=u_\infty, \quad T=f(\infty) \quad (y=\infty); \quad v=\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad (y=0) \quad (3.2)$$

где  $f=f(y)$  — функция, описывающая распределение температуры окружающей среды поперек оси следа.

Пусть выполняются интегральные соотношения

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u(u-u_\infty) dy = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c_p u \Delta T dy = 0$$

где  $\Delta T$  — избыточная по отношению к окружающей среде температура в следе.

Согласно [3] имеем

$$X=x, \quad \eta=y \left( 2v \frac{x}{u_\infty} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad u=u_\infty \left[ 1+A(1-\eta^2) \exp \left( -\frac{\eta^2}{2} \right) X^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.3)$$

Будем искать автомодельное распределение температуры в виде

$$T(X, \eta) = f(y) - d_1(\eta) X^\lambda \quad (3.4)$$

Подставляя в уравнение переноса тепла автомодельные распределения  $T$  и  $u$ , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения  $d_1(\eta)$

$$d_1'' + \Pr \eta d_1' - 2\lambda \Pr d_1 = 0 \quad (3.5)$$

При выводе уравнения (3.5) принято, что для распределения температуры выполняется условие  $d^2f/dy^2=0$ . Уравнение (3.5) заменой  $\eta^*=-\Pr \eta^2/2$  сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению, решение которого имеет вид [4]

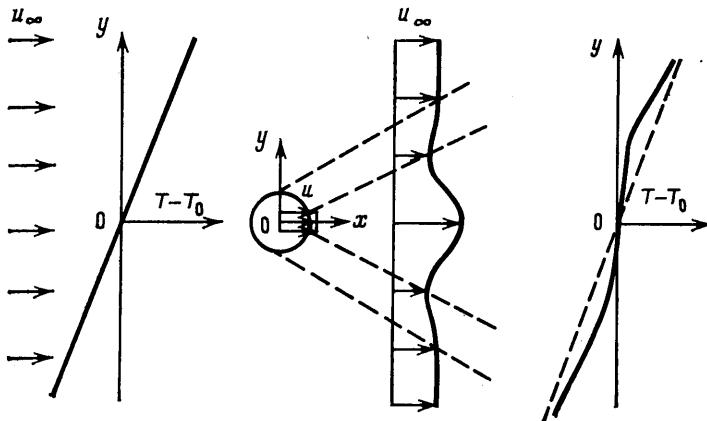
$$\begin{aligned} d_1(\eta) &= B_1 \exp \left( -\frac{\Pr}{2} \eta^2 \right) \Phi \left( \frac{1}{2} + \lambda, \frac{1}{2}, \frac{\Pr}{2} \eta^2 \right) + \\ &+ B_2 \eta \exp \left( -\frac{\Pr}{2} \eta^2 \right) \Phi \left( 1 + \lambda, \frac{3}{2}, \frac{\Pr}{2} \eta^2 \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $B_1, B_2$  — постоянные интегрирования.

Так как затухание избыточной скорости в следе при  $\eta \rightarrow \infty$  происходит экспоненциально, то и стремление  $d_1(\eta)$  тоже должно быть экспоненциальным. Для первой функции  $\Phi$  в (3.6) это выполняется при  $\lambda=-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$ , а для второй — при  $\lambda=-1, -2, -3, \dots$ . Из физического условия

знакопеременности возмущения  $d_1(\eta)$  относительно распределения температуры окружающей среды  $f(\eta)$  следует  $B_1=0$ . Тогда решение задачи описывается вторым слагаемым в (3.6) при  $\lambda=-1$  и  $d_1=B\eta \exp(-1/2 \Pr \eta^2)$ .

Рассмотрим след в среде с линейным распределением температуры



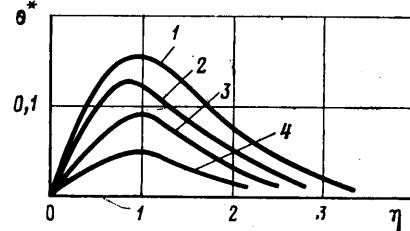
Фиг. 2

$f(y)=T_0+Ay$  (фиг. 2). Тогда  $B=df/dy$  и выражение (3.4) в автомодельных переменных (3.3) принимает вид

$$T(X, \eta) = \left[ A\eta \left( \frac{2v}{u_\infty} \right)^{1/2} X^{1/2} + T_0 \right] - A\eta \left( \frac{2v}{u_\infty} \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{\Pr}{2} \eta^2 \right) X^{-1} \quad (3.7)$$

На фиг. 3 представлено изменение избыточной температуры  $\theta^*(X, \eta) = p(y) - T(X, \eta)$  по сечениям следа для значений  $\Pr=1$ ,  $X=4,8$  и  $16$  (кривые 1, 3 и 4) и  $\Pr=2$ ,  $X=4$  (кривая 2). Избыточная температура в следе затухает по закону  $X^{-1}$ , т. е. значительно слабее скорости ( $u \sim X^{-1/2}$ ).

Из фиг. 3 и формулы (3.7) следует, что увеличение числа  $\Pr$  приводит к уменьшению перемешивания следа (кривые 1 и 2) и максимальное значение  $\theta^*(X, \eta)$  сдвигается к оси следа ( $\eta_{max}=\Pr^{-1/2}$ ). Это свидетельствует об уменьшении поперечного теплового потока. Экспериментальные исследования плоского турбулентного следа в однородном потоке с линейным распределением температуры [5] подтверждают качественно картину развития профиля температуры.



Фиг. 3

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
2. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969, с. 260–272.
3. Коробко В. И., Шашмин В. К., Шульман З. П. Развитие ламинарных струйных течений с нулевым избыточным импульсом.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 27–33.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Ч. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
5. Alexopoulos C. C., Keffer J. F. Turbulent wake in a passively stratified field.– Phys. Fluids, 1971, v. 14, № 2, p. 216–224.

Новополоцк

Поступила в редакцию  
27.XII.1984