МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1986

УДК 532.013.4 : 536.25

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ДВУХСЛОЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ НАЛИЧИИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

НЕПОМНЯЩИЙ А. А., СИМАНОВСКИЙ И. Б.

Конвективная неустойчивость равновесия в слоистой системе, обусловленная термокапиллярным эффектом, исследовалась в [1–5]. В этих работах показано, что возмущения, вызывающие кризис равновесия, могут нарастать как монотонным, так и колебательным образом. В [6] для слоя со свободной поверхностью установлено стабилизирующее влияние поверхностно-активного вещества (ПАВ) на термокапиллярную неустойчивость. Влияние ПАВ на возникновение термокапиллярной конвекции для слоев бесконечной толщины изучалось в [7–9].

В настоящей работе исследуется возникновение термокапиллярной конвекции в системе двух слоев конечной толщины при наличии ПАВ. Конвекция, обусловленная подъемной силой, не рассматривается. Установлено, что основным результатом воздействия ПАВ является не стабилизирующее влияние на монотонную моду неустойчивости, а появление нового типа колебательной неустойчивости.

1. Пусть пространство между двумя горизонтальными твердыми пластинами, на которых поддерживается различная температура (разность температур равна θ), заполнено двумя слоями несмешивающихся вязких жидкостей. Начало координат помещено на границе раздела; оси x, y направлены горизонтально, ось z — вертикально вверх. Уравнения твердых границ: $z=a_1$ и $z=-a_2$. Коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности и температуропроводности соответственно равны η_m, ν_m, $\varkappa_m$, χ_m ($m=1$ для верхней жидкости, $m=2$ для нижней).

Влияние искривления границы раздела, существенное только для возмущений с очень большой длиной волны [10, 11], не рассматривается; граница предполагается плоской и недеформируемой ($z=0$).

Пусть на границе раздела сосредоточено ПАВ, понижающее коэффициент поверхностного натяжения. Считаем, что концентрация ПАВ невелика, так что его молекулы образуют «поверхностный газ». Явления адсорбции и десорбции ПАВ не учитываются. Перенос ПАВ вдоль границы раздела описывается уравнением [12]

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(v_x\Gamma)+\frac{\partial}{\partial y}(v_y\Gamma)=D_0\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y^2}\right) \tag{1.1}$$

где v_x, v_y — компоненты скорости жидкости на границе, D_0 — коэффициент поверхностной диффузии ПАВ. В равновесии концентрация ПАВ на границе постоянна: $\Gamma=\Gamma_0$.

Введем обозначения: $\eta=\eta_1/\eta_2$, $\nu=\nu_1/\nu_2$, $\varkappa=\varkappa_1/\varkappa_2$, $\chi=\chi_1/\chi_2$, $a=a_2/a_1$. В качестве единиц длины, времени, скорости, температуры и поверхностной концентрации выберем соответственно a_1, a_1^2/ν_1, ν_1, θ и Γ_0. Безразмерный градиент температуры dT_0/dz в равновесии равен $A_1=-s/(1+\varkappa a)$ в верхней жидкости и $A_2=-s\varkappa/(1+\varkappa a)$ в нижней, где $s=-1$ при подогреве сверху, $s=1$ при подогреве снизу.

Перейдем к исследованию устойчивости равновесия. Вследствие изотропности задачи в горизонтальной плоскости достаточно рассматривать только двумерные возмущения функции тока ψ_m', температуры T_m' и концентрации ПАВ Γ' вида

$$(\psi_1', T_1', \psi_2', T_2', \Gamma')=(\psi_1(z), T_1(z), \psi_2(z), T_2(z), \Gamma)\times$$
$$\times\exp[ikx-(\lambda+i\omega)t] \qquad (1.2)$$

наложенные на состояние равновесия. Здесь k — волновое число, $\lambda+i\omega$ — комплексный декремент.

Линеаризованные уравнения конвекции для возмущений имеют вид

$$(\lambda+i\omega)D\psi_m=-d_mD^2\psi_m$$

$$-(\lambda+i\omega)T_m-ik\psi_mA_m=\frac{C_m}{P}DT_m \qquad (1.3)$$

$$D=\frac{d^2}{dz^2}-k^2,\quad d_1=C_1=1,\quad d_2=\frac{1}{\nu},\quad C_2=\frac{1}{\chi},\quad P=\frac{\nu_1}{\chi_1}$$

Здесь P — число Прандтля. Обозначая дифференцирование по z штрихом, запишем условия на твердых границах и границе раздела

$$z=1:\ \psi_1=\psi_1'=T_1=0;\ z=-a:\ \psi_2=\psi_2'=T_2=0 \qquad (1.4)$$

$$z=0:\ \psi_1=\psi_2=0,\ \psi_1'=\psi_2',\ T_1=T_2,\ \varkappa T_1'=T_2' \qquad (1.5)$$

$$\eta\psi_1''-ik(\mathrm{Mr}\,T_1+B\Gamma)=\psi_2'',\quad \mathrm{Mr}=-\frac{\partial\sigma}{\partial T}\frac{\theta a_1}{\eta_2\nu_1},\quad B=-\frac{\partial\sigma}{\partial\Gamma}\frac{\Gamma_0a_1}{\eta_2\nu_1} \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.1) после обезразмеривания и линеаризации принимает вид

$$(\lambda+i\omega-D_sk^2)\Gamma=ik\psi_1'(0),\quad D_s=\frac{D_0}{\nu_1} \qquad (1.7)$$

Исключая Γ из (1.6), (1.7), получаем граничное условие

$$z=0:\ \eta\psi_1''-ik\left(\mathrm{Mr}\,T_1+\frac{ikB}{\lambda-D_sk^2+i\omega}\psi_1'\right)=\psi_2'' \qquad (1.8)$$

Граница устойчивости равновесия определяется условием $\lambda=0$.

2. Для случая $B=0$ (отсутствие ПАВ) поставленная краевая задача решалась в [5]. Было установлено, что в зависимости от параметров жидкостей, способа подогрева и волнового числа возникновения термокапиллярной конвекции может быть обусловлено как монотонными, так и колебательными возмущениями.

Рассмотрим сначала влияние ПАВ на монотонную моду неустойчивости. Как будет показано, наличие ПАВ приводит к расщеплению монотонной нейтральной кривой на две: монотонную и колебательную. При этом монотонная нейтральная кривая лежит в области существенно более высоких значений числа Mr, чем колебательная.

Для случая монотонной неустойчивости ($\lambda=\omega=0$) краевая задача (1.3)—(1.5), (1.8) допускает точное решение, аналогичное полученному в [2] для $B=0$. Выражение для порогового числа Mr имеет вид

$$\mathrm{Mr}=\mathrm{Mr}_m=\frac{sp}{q} \qquad (2.1)$$

$$s=\pm1,\quad p=4k^2\left[2\left(\eta\frac{s_1c_1-k}{s_1^2-k^2}+\frac{s_2c_2-ka}{s_2^2-k^2a^2}\right)+\frac{B}{kD_s}\right](1+\varkappa a)(s_1c_2+s_2c_1\varkappa)$$

$$q=\varkappa P\left[\chi\frac{s_1(s_2^3-k^3a^3c_2)}{s_2^2-k^2a^2}-\frac{s_2(s_1^3-k^3c_1)}{s_1^2-k^2}\right]$$

$$s_1=\operatorname{sh} k,\ c_1=\operatorname{ch} k,\ s_2=\operatorname{sh} ka,\ c_2=\operatorname{ch} ka$$

Положение разрывов нейтральной кривой, определяемое нулями функции $q(k)$, не изменяется при наличии ПАВ. Приведем асимптотику выражения (2.1) в длинноволновом пределе ($k\to0$)

$$\mathrm{Mr}=-\frac{80s(1-\varkappa a)^2(1+a\eta+aB/4D_s)}{Pa^2\varkappa(1-\chi a^2)}k^{-2} \tag{2.2}$$

Из формул (2.1), (2.2) видно, что присутствие поверхностно-активного вещества всегда приводит к смещению монотонной нейтральной кривой в сторону больших Mr, определяемому комбинацией B/D_s. Поскольку для реальных ПАВ величина D_s обычно мала, уже при умеренных значениях B это смещение значительно. В [6] это обстоятельство интерпретировалось как сильная стабилизация термокапиллярной неустойчивости.

Эффект стабилизации монотонной неустойчивости при наличии ПАВ обусловлен тем, что для монотонных возмущений тангенциальные силы, вызываемые неоднородностью температуры и распределения ПАВ, направлены противоположно [13]. Это обстоятельство, однако, не исключает возможности колебательной неустойчивости, если возмущения температуры и концентрации ПАВ колеблются со сдвигом фазы.

Анализ показывает, что включение B действительно может приводить к появлению колебательной нейтральной кривой. Длинноволновая асимптотика для колебаний может быть получена с помощью разложений по параметру k. Представим решение краевой задачи при $k\to0$ в виде ряда

$$\psi_m=\sum_{n=0}^{\infty}k^n\psi_m^{(n)},\quad T_m=\sum_{n=1}^{\infty}k^nT_m^{(n)},\quad \omega=\sum_{n=1}^{\infty}k^n\omega^{(n)},\quad \mathrm{Mr}=\sum_{n=-2}^{\infty}k^n\mathrm{Mr}^{(n)} \tag{2.3}$$

Подставим разложения (2.3) в (1.3)–(1.5), (1.8) и приравняем члены, имеющие одинаковый порядок по k. Уравнения нулевого порядка имеют вид

$$\psi_1^{(0)\mathrm{IV}}=0,\quad i\psi_1^{(0)}\frac{s}{1+\varkappa a}=\frac{1}{P}T_1^{(1)''},\quad 0\leqslant z\leqslant1 \tag{2.4}$$

$$\psi_2^{(0)\mathrm{IV}}=0,\quad i\psi_2^{(0)}\frac{s\varkappa}{1+\varkappa a}=\frac{1}{\chi P}T_2^{(1)''},\quad -a<z<0$$

$$z=1:\ \psi_1^{(0)}=\psi_1^{(0)'}=T_1^{(1)}=0;\quad z=-a:\ \psi_2^{(0)}=\psi_2^{(0)'}=T_2^{(1)}=0$$

$$z=0:\ \psi_1^{(0)}=\psi_2^{(0)}=0,\quad \psi_1^{(0)'}=\psi_2^{(0)'},\quad T_1^{(1)}=T_2^{(1)},\quad \varkappa T_1^{(1)'}=T_2^{(1)'}$$

$$\eta\psi_1^{(0)''}-i\,\mathrm{Mr}^{(-2)}T_1^{(1)}=\psi_2^{(0)''}$$

Решение системы (2.4) имеет вид

$$\psi_1^{(0)}=a^2(z^3-2z^2+z),\quad \psi_2^{(0)}=z^3+2az^2+a^2z$$

$$T_1^{(1)}=\frac{isPa^2}{1+\varkappa a}\left[\frac{z^5}{20}-\frac{z^4}{6}+\frac{z^3}{6}-\frac{1+\varkappa\chi a^3}{20(1+\varkappa a)}z-\frac{\varkappa a(1-\chi a^2)}{20(1+\varkappa a)}\right]$$

$$T_2^{(1)}=\frac{is\varkappa\chi P}{1+\varkappa a}\left[\frac{z^5}{20}+\frac{az^4}{6}+\frac{a^2z^3}{6}-\frac{a^2(1+\varkappa\chi a^3)}{20\chi(1+\varkappa a)}z-\frac{a^3(1-\chi a^2)}{20\chi(1+\varkappa a)}\right]$$

Условие разрешимости системы (2.4) дает длинноволновую асимптотику нейтральной кривой для колебательной неустойчивости

$$\mathrm{Mr}=\mathrm{Mr}_0\simeq\mathrm{Mr}^{(-2)}k^{-2}=-\frac{s}{1-\chi a^2}\frac{80(1+a\eta)(1+a\varkappa)^2}{Pa^2\varkappa} \tag{2.5}$$

В первом порядке по k получаем следующую краевую задачу, условие разрешимости которой определяет асимптотику частоты

$$i\omega^{(1)}\psi_1^{(0)''}=-\psi_1^{(1)\mathrm{IV}},\quad -i\omega^{(1)}T_1^{(1)}+i\psi_1^{(1)}\frac{s}{1+\varkappa a}=\frac{1}{P}T_1^{(2)''},\quad 0<z<1$$

$$i\omega^{(1)}\psi_2^{(0)''}=-\frac{1}{\nu}\psi_2^{(1)\mathrm{IV}},\quad i\omega^{(1)}T_2^{(1)}+i\psi_2^{(1)}\frac{s\varkappa}{1+\varkappa a}=\frac{1}{\chi P}T_2^{(2)},\quad -a<z<0$$

$$z=1:\ \psi_1^{(1)}=\psi_1^{(1)'}=T_1^{(2)}=0;\quad z=-a:\ \psi_2^{(1)}=\psi_2^{(1)'}=T_2^{(2)}=0$$

$$z=0:\ \psi_1^{(1)}=\psi_2^{(1)}=0,\quad \psi_1^{(1)'}=\psi_2^{(1)'};\quad T_1^{(2)}=T_2^{(2)},\quad \varkappa T_1^{(2)'}=T_2^{(2)'}$$

$$i(\eta\psi_1^{(1)''}-\psi_2^{(1)''}-i\,\mathrm{Mr}^{(-2)}T_1^{(2)}-i\,\mathrm{Mr}^{(-1)}T_1^{(1)})\,\omega^{(1)}+B\psi_1^{(0)}=0$$

$$\omega\simeq\omega^{(1)}k,\quad \omega^{(1)}=\pm B^{1/2}a\left\{\frac{2}{15}(\eta a^2+\nu a^3)+\frac{1}{315}\frac{1+a\eta}{1-\chi a^2}\times\right.$$

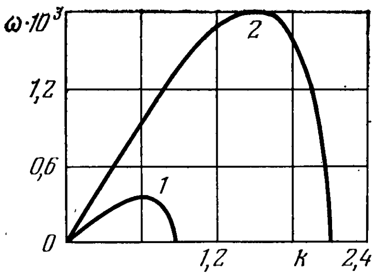
$$\left.\times\left[10P\frac{11(1-\varkappa\chi^2a^5)+53a(\varkappa-\chi^2a^3)+42\chi a^2(1-\varkappa a)}{1+\varkappa a}+19(1-\nu\chi a^4)\right]\right\}^{-1/2}\qquad(2.6)$$

Колебательная неустойчивость возникает в области $k\to0$ в том случае, когда выражение (2.6) вещественно. Заметим, что в длинноволновом пределе форма колебательной нейтральной кривой не зависит от параметра B. Сравнение формул (2.2) и (2.5) показывает, что колебательная нейтральная кривая при $B\neq0$ лежит всегда ниже монотонной. Обратим внимание на отличие длинноволновой асимптотики частоты для колебаний, вызванных ПАВ ($\omega=\omega^{(1)}k$), от асимптотики для термокапиллярных колебаний при $B=0$ ($\omega=\mathrm{const}$ при $k\to0$).

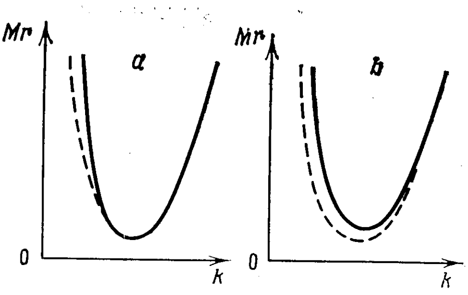
3. Для конечных k расчеты колебательных нейтральных кривых осуществлялись численно методом Рунге — Кутта.

Рассмотрим систему вода — масло DC-200 со следующим набором параметров: $P=6{,}28$; $\nu=1{,}116$; $\eta=0{,}915$; $\chi=0{,}472$; $\varkappa=0{,}169$, на границе раздела которой нанесено ПАВ со значением безразмерного параметра $D_s=10^{-3}$. В отсутствие ПАВ при $a=1$ для этой системы имеет место только монотонная термокапиллярная неустойчивость [5] при подогреве сверху. При $B\neq0$ монотонная нейтральная кривая смещается в сторону больших Mr согласно формулам (2.1). В длинноволновой области ($0<k<k_*(B)$) возникает колебательная нейтральная кривая. При $k\to0$ форма нейтральной кривой и частота колебаний описываются формулами (2.5), (2.6). При $k\to k_*(B)$ частота колебаний стремится к нулю, а колебательная нейтральная кривая «утыкается» в монотонную. На фиг. 1 показаны графики зависимости $\omega(k)$ для $B=10^{-5}$ (линия *1*) и $B=4\cdot10^{-5}$ (линия *2*). Для этих же значений B соответственно на фиг. 2, *а*, *б* приведены нейтральные кривые; сплошные линии изображают монотонные, а штриховые — колебательные нейтральные кривые. Нейтральные кривые на фиг. 2 показаны качественно, так как при данных значениях B они сливаются в масштабах графика. На фиг. 3 приведены нейтральные кривые для $B=0$; 3; 8 (линии *1*—*3*). Монотонные нейтральные кривые для $B\neq0$ лежат при существенно больших значениях Mr и на графике не приведены.

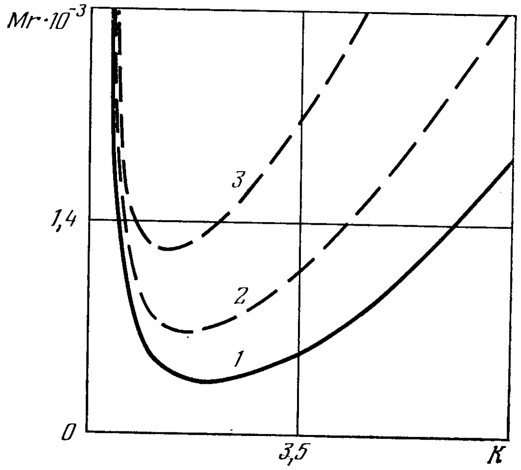
Подчеркнем, что участок монотонной нейтральной кривой в области $k<k_*$, находящийся выше колебательной нейтральной кривой, не может рассматриваться как граница монотонной неустойчивости равновесия. На фиг. 4 показан характерный вид зависимости декремента λ от Mr в области $k<k_*$ ($B=0{,}05$; $k=2{,}4$); штриховая линия соответствует колебательным, а сплошная — монотонным возмущениям. С ростом числа Mr колебательная неустойчивость возникает при $\mathrm{Mr}=\mathrm{Mr}_0=380$; при $\mathrm{Mr}>\mathrm{Mr}_d=507$ частота колебаний обращается в нуль и система обладает двумя типами монотонно нарастающих возмущений. При $\mathrm{Mr}>\mathrm{Mr}_m=2200$



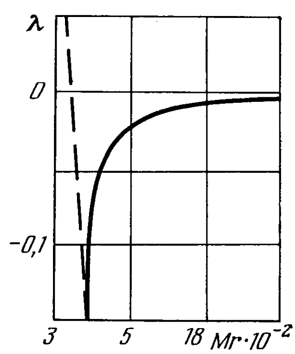
Фиг. 1



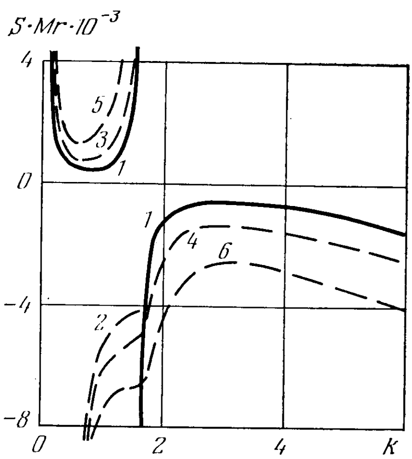
Фиг. 2



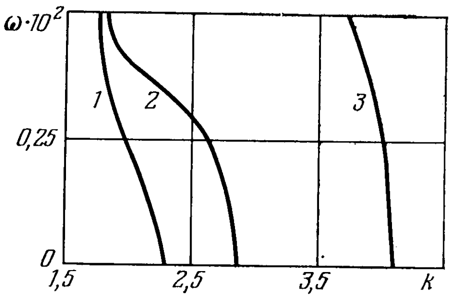
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



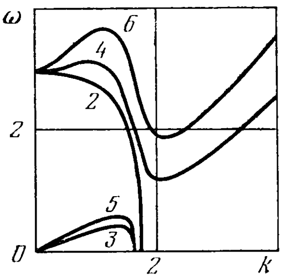
Фиг. 6

один из типов монотонных возмущений становится затухающим. Поэтому быстрое нарастание Mr_m с ростом B нельзя интерпретировать как стабилизацию монотонной неустойчивости равновесия.

Более сложный характер имеют нейтральные кривые термокапиллярной неустойчивости в отсутствие ПАВ ($B=0$) при $a=2$. В этом случае график функции $s\,\mathrm{Mr}(k)$ для монотонной моды (линия *1*, фиг. 5) имеет разрыв [5] при $k=k_1\simeq 1{,}45$: при $k<k_1$ монотонная неустойчивость реализуется при подогреве снизу ($s\,\mathrm{Mr}>0$), а при $k>k_1$ — при подогреве сверху

(s Mr<0). В области $k<k_*\simeq 1{,}72$ при подогреве сверху неустойчивость имеет колебательный характер (линия *2*, фиг. 5).

При подогреве снизу (s Mr>0) наличие ПАВ приводит к расщеплению нейтральных кривых, как и в случае $a=1$, обсуждавшемся выше; длинноволновая асимптотика частоты имеет вид $\omega\sim k$. Для подогрева сверху (s Mr<0) с ростом B точка «утыкания» колебательной нейтральной кривой в монотонную k_* смещается в сторону больших k. Графики зависимости $\omega(k)$ вблизи $k=k_*(B)$ для $B=4\cdot10^{-5}$, $6\cdot10^{-5}$ и 10^{-4} показаны на фиг. 6 (соответственно линии *1*–*3*). Длинноволновая асимптотика частоты сохраняет вид $\omega=\text{const}$, имевший место при $B=0$.



Фиг. 7

Колебательные нейтральные кривые при наличии ПАВ ($D_s=10^{-3}$) изображены на фиг. 4. Монотонные кривые лежат при существенно больших значениях Mr и на графике не приводятся. Линии *3*, *4* относятся к случаю $B=3$; линии *5*, *6* – к случаю $B=8$. Зависимость частоты от волнового числа для тех же случаев показана на фиг. 7 (нумерация линий сохраняется).

Для других систем нейтральные кривые имеют вид, подобный изображенному на фиг. 4 (если конвекция возникает только при подогреве с одной стороны) или на фиг. 5 (если конвекция возможна при обоих способах подогрева).

В заключение авторы выражают благодарность Е. М. Жуховицкому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sternling C. V., Scriven L. E.* Interfacial turbulence: hydrodynamic instability and the Marangoni effect.– AIChE Journal, 1959, v. 5, № 4, p. 514–523.
2. *Smith K. A.* On convective instability induced by surface-tension gradients.– J. Fluid Mech., 1966, v. 24, № 2, p. 401–414.
3. *Непомнящий А. А., Симановский И. Б.* Термокапиллярная конвекция в двухслойной системе.– Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 4, с. 825–827.
4. *Непомнящий А. А., Симановский И. Б.* Термокапиллярная конвекция в двухслойной системе.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 4, с. 158–163.
5. *Непомнящий А. А., Симановский И. Б.* О колебательной конвективной неустойчивости равновесия двухслойных систем при наличии термокапиллярного эффекта.– ПМТФ, 1985, № 1, с. 62–65.
6. *Berg J. C., Acrivos A.* The effect of surface active agents on convection cells induced by surface tension.– Chem. Engng Sci., 1965, v. 20, № 8, p. 737–745.
7. *Hennenberg M., Bisch P. M., Vignes-Adler M., Sanfeld A.* Mass transfer, Marangoni effect, and instability of interfacial longitudinal waves. I. Diffusional exchanges.– J. Colloid Interface Sci., 1979, v. 69, № 1, p. 128–137.
8. *Hennenberg M., Bisch P. M., Vignes-Adler M., Sanfeld A.* Mass transfer, Marangoni effect, and instability of interfacial longitudinal waves. II. Diffusional exchanges and adsorption-desorption processes.– J. Colloid Interface Sci., 1980, v. 74, № 2, p. 495–508.
9. *Hennenberg M., Sanfeld A., Bisch P. M.* Adsorption-desorption barrier, diffusional exchanges and surface instabilities of longitudinal waves for aperiodic regimes.– AIChE Journal, 1981, v. 27, № 6, p. 1002–1008.
10. *Scriven L. E., Sternling C. V.* On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity.– J. Fluid Mech., 1964, v. 19, № 3, p. 321–340.
11. *Непомнящий А. А.* О длинноволновой конвективной неустойчивости в горизонтальных слоях с деформируемой границей.– В кн.: Конвективные течения. Пермь, 1983, с. 25–31.
12. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 538 с.
13. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Пермь

Поступила в редакцию 28.III.1985