

УДК 532.516

## О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ШАРА В СФЕРИЧЕСКОМ ОБЪЕМЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

СТОЛБЕЦОВ В. И.

Задачи о колебаниях тел в ограниченных объемах вязкой жидкости решались для определения присоединенных масс и коэффициентов демпфирования стержней [1-3] и поплавков [4-5]. Решения этих задач, основанные на использовании упрощений метода погранслоя [4-6], получаются в аналитическом виде в общей форме и хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако возможность использования подобных решений в каждом конкретном случае при заданных значениях вязкости жидкости и частоты колебаний должна быть обоснована либо экспериментально [2, 4, 5], либо теоретически, как это сделано, например, в [1], где получено аналитическое решение для концентрических цилиндров.

Ниже приведено общее решение задачи о малых колебаниях шара в сферическом объеме жидкости, справедливое в широком диапазоне изменения величины безразмерной кинематической вязкости.

Рассмотрены предельные случаи этого решения как при большой, так и при малой вязкости жидкости. Полученные асимптотические формулы сравниваются с расчетными, основанными на аналитическом решении.

1. Рассмотрим движение жидкости, вызванное малыми колебаниями шара, имеющего радиус  $r_1$ , в объеме жидкости, ограниченном сферой радиуса  $r_2$ . Пусть колебания шара в системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , связанной с неподвижной внешней сферой, происходят по закону

$$\mathbf{U} = U_0 \exp(-i\omega t) = U_0 \mathbf{e}_i \exp(-i\omega t), \quad \mathbf{W} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — скорость поступательного движения шара,  $\mathbf{e}_i$  — орт оси  $x_i$ ,  $\omega$  — частота колебаний. Предполагается, что центр шара колеблется около центра неподвижной сферы.

Для определения колебаний жидкости необходимо решить линеаризованную краевую задачу

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}|_{s_1} = \mathbf{v}|_{r=r_1} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{v}|_{s_2} = \mathbf{v}|_{r=r_2} = 0 \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{v}$ ,  $p$  — скорость и давление жидкости,  $\nu$  — ее кинематическая вязкость.

Используя уравнение неразрывности, запишем  $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A}$ .

Вектор  $\mathbf{v}$  — полярный, следовательно,  $\mathbf{A}$  — аксиальный. Вектор  $\mathbf{A}$ , будучи функцией  $\mathbf{r}$ , линейным образом зависит от  $\mathbf{U}$ . Из симметрии области, занятой жидкостью, следует, что единственным таким вектором может быть [7] вектор

$$\mathbf{A} = f' \mathbf{n} \times \mathbf{U} = \nabla f \times \mathbf{U} = \text{rot}(f\mathbf{U}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}/r, \quad ( )' = \partial/\partial r$$

Следовательно

$$\mathbf{v} = \text{rot}^2(f\mathbf{U}) = \mathbf{e}_r U (f'' - \Delta f) \cos \theta + \mathbf{e}_\theta U (\Delta f - f'/r) \sin \theta \quad (1.4)$$

где  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  — сферические координаты.

Применив к (1.2) операцию  $\text{rot}$ , после преобразований получим

$$\nabla(k^2\Delta f - \Delta^2 f) = 0, \quad k^2 u + \Delta u = C, \quad u = \Delta f \quad (1.5)$$

$$k^2 = i\omega/\nu, \quad k = (1+i)/\delta, \quad \delta^2 = 2\nu/\omega$$

Здесь  $\delta$  — глубина проникновения вихревого движения,  $C$  — константа интегрирования (при  $r_2 = \infty$ ,  $C = 0$  [7]).

Интегрируя (1.5), получим

$$u = A e^{ikr}/r + B e^{-ikr}/r + C/k^2 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = A \frac{e^{ikr}}{r^2} \left( \frac{r}{ik} + \frac{1}{k^2} \right) + B \frac{e^{-ikr}}{r^2} \left( -\frac{r}{ik} + \frac{1}{k^2} \right) + \frac{C}{3k^2} r + \frac{D}{r^2} \quad (1.7)$$

где  $A, B, D$  — константы.

Приняв во внимание (1.4), (1.5), (1.7), запишем условия прилипания (1.3) в виде

$$f'|_{r=r_1} = f_1' = r_1/2, \quad u|_{r=r_1} = u_1 = -3/2$$

$$f'|_{r=r_2} = f_2' = 0, \quad u|_{r=r_2} = u_2 = 0$$

или в развернутой форме

$$\Gamma_1(e_2, r_2) = A e_2(1 - ikr_2) + B e_2^{-1}(1 + ikr_2) + C r_2^3/3 + D k^2 = 0$$

$$\Gamma_2(e_2, r_2) = A e_2/r_2 + B e_2^{-1}/r_2 + C/k^2 = 0, \quad e_2 = \exp(ikr_2) \quad (1.8)$$

$$\Gamma_1(e_1, r_1) = -r_1^3 k^2/2, \quad \Gamma_2(e_1, r_1) = -3/2, \quad e_1 = \exp(ikr_1)$$

Ниже будут приведены результаты вычислений, проведенных с помощью *PL*-программы для решения системы линейных уравнений (1.8).

Здесь выишем решение этих уравнений в аналитическом виде, который позволяет анализировать различные частные случаи (безграничная жидкость, случаи малой или большой вязкости и т. п.).

$$A e_1 = (r_1^3/2 - 3r_1 r_2 b_{21}/2r_{12}) / [a_2 e_{21} - a_1 - b_{21}(r_1 e_{21} - r_2) / r_{12}]$$

$$B/e_2 = [3r_1 r_2/2 - A e_1(r_1 e_{21} - r_2)] / r_{12} \quad (1.9)$$

$$C = -k^2 (A e_1 e_{21}/r_2 + B/e_2 r_2) = -k^2 (3/2 + A e_1/r_1 + B e_{21}/e_2 r_1)$$

$$D = -r_1^3/2 - C r_1^3/3k^2 - A e_1(1 - ikr_1)/k^2 - (B/e_2) e_{21}(1 + ikr_1)/k^2$$

$$a_1 = (1 - ikr_1)/k^2, \quad a_2 = (1 - ikr_2)/k^2 - \beta, \quad \beta = (r_2^3 - r_1^3)/3r_2$$

$$b_1 = (1 + ikr_1)/k^2, \quad b_2 = (1 + ikr_2)/k^2 - \beta, \quad b_{21} = b_2 - b_1 e_{21}$$

$$r_{12} = r_1 - r_2 e_{21}, \quad e_{21} = e_2/e_1, \quad r_{21} = r_2 - r_1$$

Из (1.2) имеем

$$\nabla p = \rho(i\omega \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v})$$

Комбинируя это выражение с (1.4), найдем давление

$$p = \rho(-C \nu \mathbf{U} \cdot \mathbf{r} + \nu \mathbf{U} \cdot \nabla \Delta f + i\omega \mathbf{U} \cdot \nabla f) \quad (1.10)$$

Полученные уравнения позволяют определить силу  $\mathbf{F}$ , действующую на шар. Поскольку задача обладает сферической симметрией, в дальнейшем будем писать выражения для силы  $\mathbf{F}$  в скалярной форме.

Для определения  $F$  воспользуемся соотношением [7]

$$F = \int_{s_1} (-p \cos \theta + \sigma_{rr}' \cos \theta - \sigma_{r\theta}' \sin \theta) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \quad (1.11)$$

$$\sigma_{rr}' = 2\nu \rho \partial v_r / \partial r, \quad \sigma_{r\theta}' = \rho \nu [(\partial v_r / \partial \theta) / r - \partial v_\theta / \partial r - v_\theta / r]$$

Выишем формулу для  $F$  в форме, удобной для перехода к частным

случаям

$$F = -\frac{4\pi}{3}\rho r_1 v U \left[ k^2 r_1^2 + A e_1 \left( 3ik - \frac{3 - k^2 r_1^2}{r_1} \right) - \frac{B}{e_2} \left( 3ik + \frac{3 - k^2 r_1^2}{r_1} \right) e_{21} \right] \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим некоторые частные случаи решения (1.12). При этом сравним результаты расчетов, полученные с помощью формул, справедливых для этих частных случаев, со значениями, определяемыми (1.12).

*Безграничная жидкость* ( $r_2/r_1 = \infty$ ). В этом случае  $e_{21} = e_2 = 0$ . Из формул (1.9) получим

$$A = -\frac{3}{2} r_1 e_1, \quad D = -\frac{r_1^3}{2} \left( 1 - \frac{3}{k^2 r_1^2} - \frac{3}{ikr_1} \right)$$

Используя (1.12), будем иметь

$$F = -\frac{4\pi}{3}\rho r_1 v U \left( \frac{9}{2} - \frac{1}{2} k^2 r_1^2 - \frac{9}{2} ikr_1 \right) \quad (2.1)$$

Отделяя в этой формуле действительную часть от мнимой, получим

$$F = -6\pi v \rho r_1 (1 + r_1/\delta) U - 3\pi r_1^2 \rho \sqrt{2v/\omega} (1 + 2r_1/9\delta) W \quad (2.2)$$

Это выражение совпадает с формулой Буссинеска для случая гармонических колебаний шара в безграничной жидкости [7, 8].

*Приближение погранслоя* ( $\delta \ll r_1$ ,  $\delta \ll r_2 - r_1$ ). Выделим из формулы (1.12) часть, соответствующую первым приближениям, полученным по методу погранслоя. В этом случае  $e_2 = e_{21} = e_1 = 0$  и можно опустить третье слагаемое в квадратных скобках формулы (1.12). Полученное с помощью этого упрощения выражение формально разложим по степеням  $\varepsilon = 1/k$ . Первому члену разложения соответствует приближение идеальной жидкости

$$F_0 = -\mu_0 W, \quad \mu_0 = 2\pi \rho r_1^3 (r_2^3 + 2r_1^3) / 3(r_2^3 - r_1^3) \quad (2.3)$$

совпадающее с известным решением [4, 5].

Следующее приближение можно записать в виде

$$F_1 = -\mu_0 W - 6\pi \rho r_1^2 r_2^2 U \frac{r_1^4 + r_2^4}{(r_2^3 - r_1^3)^2} \frac{\omega}{K} \quad (2.4)$$

Преобразуем эту формулу, взяв действительную часть решения

$$F = -\mu_0 W - 6\pi \rho r_1^2 r_2^2 \sqrt{\frac{v\omega}{2}} \frac{r_1^4 + r_2^4}{(r_2^3 - r_1^3)^2} U - 6\pi \rho r_1^2 r_2^2 \sqrt{\frac{v}{2\omega}} \frac{r_1^4 + r_2^4}{(r_2^3 - r_1^3)^2} W \quad (2.5)$$

Воспользуемся уравнением малых колебаний шара, полученным в [4] с использованием метода погранслоя

$$(m^0 + \mu_0) W + \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} I_{12} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{U(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = F_p \quad (2.6)$$

$$\varphi_0 = \left( \frac{r_1^3 r}{r_1^3 - r_2^3} + \frac{r_1^3 r_2^3}{2(r_1^3 - r_2^3)} \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$I_{12} = \int_{S_1} (e_x - \nabla \varphi_0)^2 dS + \int_{S_2} \nabla \varphi_0 \nabla \varphi_0 dS$$

Здесь  $\varphi_0$  — потенциал порождающего движения [9].

Для гармонических колебаний, приняв во внимание, что [4]

$$I_{12} = 6\pi r_1^2 r_2^2 (r_1^4 + r_2^4) / (r_2^3 - r_1^3)^2$$

из (2.6) найдем

$$F = -\mu_0 W - m' W - h U, \quad h = \rho I_{12} \sqrt{\nu \omega} / 2, \quad m' = \rho I_{12} \sqrt{\nu / 2 \omega} \quad (2.7)$$

Полученное выражение совпадает с (2.5).

Случай большой вязкости ( $\delta \gg r_2 - r_1$ ). Запишем (1.12) с учетом (1.9) в виде

$$F = -\frac{4\pi}{3} \rho r_1 \nu U [S_0(k) + A e_1 M(k)], \quad A e_1 = C_0(k) / 2Z(k) \quad (2.8)$$

$$S_0(k) = k^2 r_1^2 - 3r_1 r_2 e_{21} (3ik + 3/r_1 - k^2 r_1) / 2r_{12}$$

$$M(k) = 3ik - (3 - k^2 r_1^2) / r_1 + (3ik + 3/r_1 - k^2 r_1) (r_1 e_{21}^2 - r_2 e_{21}) / r_{12}$$

Разложив величины, входящие в (2.8), в ряды по степеням  $k$ , получим

$$S_0(k) = 9r_2 / 2r_{21} + r_1 [(7r_1 r_2 - 4r_1^2 - 9r_2^2) / 4r_{21}] k^2 + \dots \quad (2.9)$$

$$M(k) = M_3 k^3 + M_4 k^4 + \dots, \quad C_0 = C_2 k^2 + C_3 k^3 + \dots$$

$$Z(k) = Z_5 k^5 + Z_6 k^6 + \dots$$

$$M_3 = i r_2 (r_1 + r_2), \quad M_4 = r_1 r_2 (r_1 + r_2)$$

$$M_5 = -i (3r_2^4 + 33r_2^3 r_1 + 53r_1^2 r_2^2 + 8r_1^4) / 60$$

$$C_2 = r_1 r_2 (r_1^2 - r_2^2) / 2, \quad C_3 = -i r_{21} r_1 r_2^2 (r_1 + r_2) / 2$$

$$C_4 = r_1 r_2 r_{21}^2 (r_1 + r_2)^2 / 8$$

$$Z_5 = -i r_{21}^4 (4r_1^2 + 7r_1 r_2 + 4r_2^2) / 90, \quad Z_6 = -i r_{21} Z_5$$

$$Z_7 = i r_{21}^6 (64r_1^2 + 110r_1 r_2 + 64r_2^2)$$

Найдем первые два члена разложения выражения  $A e_1 M(k)$ , проведя деление приведенных выше рядов. В результате запишем

$$A e_1 M(k) = \frac{1}{2} (R_0 + R_2 k^2 + \dots), \quad R_0 = 45 \frac{r_1 r_2^2 (r_1 + r_2)^2}{r_{21}^3 (4r_1^2 + 7r_1 r_2 + 4r_2^2)} \quad (2.10)$$

$$R_2 = (M_3 C_4 + M_4 C_3 + M_5 C_2 - R_0 Z_7) / Z_5, \dots$$

Формулу для силы, пропорциональной  $U$ , получим из (2.8), взяв действительную часть этого выражения ( $k=0$ )

$$F_U = -6\pi\nu\rho \frac{r_1 r_2 (r_2^5 - r_1^5)}{r_{21}^4 [(r_1 + r_2)^2 - r_1 r_2 / 4]} U \quad (2.11)$$

В этой формуле можно перейти к пределу при  $r_2 \rightarrow \infty$ . Результат имеет вид

$$F_{U_0} = -6\pi\nu\rho r_1 U$$

и совпадает со стоксовым членом выражения (2.2).

Аналогично можно получить асимптотическое выражение для вычисления инерционной компоненты силы

$$F_{U_1} = 4\pi\rho r_1 (S_2 + R_2 / 2) W / 3$$

справедливое при небольших значениях  $r_2 / \delta$ .

Формулу (2.11) можно получить, сведя решение задачи (1.2), (1.3) к решению ряда квазистационарных задач с помощью разложений [6]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \nu^{-1} \mathbf{v}_1 + \dots, \quad p = \nu p_0 + p_1 + \dots$$

Подставив эти разложения в (1.2), (1.3), для определения  $\mathbf{v}_0$ ,  $p_0$  получим

$$\Delta \mathbf{v}_0 - \nabla p_0 / \rho = 0, \quad \text{div } \mathbf{v}_0 = 0$$

$$v_0|_{s_1} = U, \quad v_0|_{s_2} = 0$$

Функцию  $v_0$  будем искать в виде

$$v_0 = e^{-i\omega t} \operatorname{rot}^2 (f_k U_0)$$

где  $f_k$  удовлетворяет уравнению  $\Delta^2 f_k = c$  и его решение имеет вид

$$f_k = -b/r + ar^2/6 + cr^4/120 - dr/2 \quad (2.12)$$

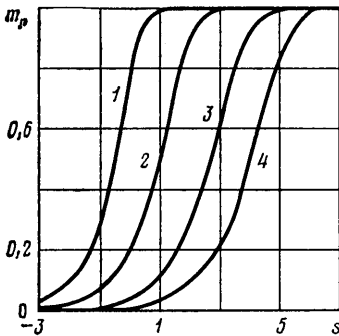
Выпишем формулы для определения коэффициентов  $a, b, c, d$ , найденные из условий прилипания

$$a = 3r_1(9r_2^5 - 4r_1^5 - 5r_2^3 r_1^2)/2N, \quad N = r_{21}^4 [4(r_1 + r_2)^2 - r_1 r_2]$$

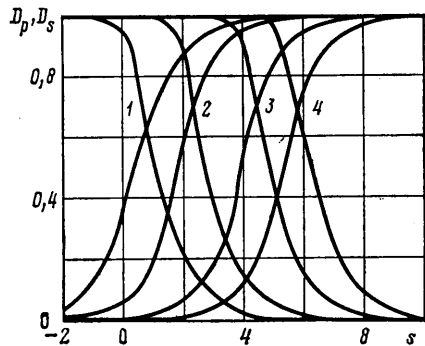
$$b = r_1^3 r_2^3 (r_2^3 - r_1^3)/N, \quad c = -45r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2)/N$$

$$d = 6r_1 r_2 (r_2^5 - r_1^5)/N$$

Давление  $p$  найдем из выражения (1.10), в котором отбросим третье слагаемое и произведем замену  $f = f_k$ . Подставим полученное таким обра-



Фиг. 1



Фиг. 2

зом выражение вместе с формулой для скорости и соотношением (2.12) в уравнение (1.11). В результате преобразований найдем формулу

$$F = -4\pi\rho v dU = -6\pi\nu\rho \frac{r_1 r_2 (r_2^5 - r_1^5)}{r_{21}^4 [(r_1 + r_2)^2 - r_1 r_2/4]} U$$

которая совпадает с (2.11).

Для сравнения приближенных значений гидродинамических характеристик, определяемых формулами (2.5), (2.11), с точными приведем результаты вычислений, полученных с использованием PL/1-программы для ЭВМ ЕС 1022.

На фиг. 1 по оси абсцисс отложена величина  $s = \lg(\omega r_1^2/\nu)$ , а по оси ординат —  $m_p$ , являющаяся отношением «присоединенной» массы, рассчитанной с помощью точного решения (1.12), к соответствующей величине  $m_{ps}$ , вычисленной с использованием предположений о погранслое (формула (2.5))

$$m_{ps} = \mu_0 + 6\pi\rho r_1^2 r_2^2 \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} \frac{r_1^4 + r_2^4}{(r_2^3 - r_1^3)^2}$$

Приведенные кривые соответствуют различным значениям  $r_2$  и значению  $r_1 = 1$ . При этом на фиг. 1 и 2 кривые с индексами 1, 2, 3, 4 построены для значений  $r_2$ , равных 5; 1,5; 1,05 и 1,01 соответственно.

На фиг. 2 по оси абсцисс также отложена величина  $s$ , а по оси ординат — некоторые безразмерные величины, характеризующие диссипативную составляющую в (1.12). При этом одному семейству кривых (кривые стремятся к единице при возрастании  $s$ ) соответствует величина  $D_p$  — отношение диссипативной силы, определяемой (2.5), к величине, даваемой (1.12).

Второму семейству отвечает величина  $D_s$  — отношение значения силы в стоковом приближении (2.11) к величине, определяемой точным решением (1.12) (эти

кривые приближаются к единице при уменьшении  $s$ ). Кривые, как и на фиг. 1, приведены для различных значений  $r_2$ . Приведенные на фигурах результаты вычислений для каждого конкретного значения  $r_2$  позволяют разбить область значений  $s$  на три области: две области, где решение достаточно точно совпадает либо с решением, полученным по методу погранслоя, либо с решением Стокса, и переходную область, соответствующую промежуточным значениям параметра  $s$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen S. S., Wambsganss M. W., Jendrzejczyk J. A.* Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluids.— *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 1976, v. 43, № 2, p. 325–329.
2. *Синяевский В. Ф., Федотовский В. С., Кухтин А. Б.* О колебаниях цилиндра в вязкой жидкости.— *Прикл. механика*, 1980, т. 16, № 1, с. 62–67.
3. *Yang C. I., Moran T. J.* Calculations of added mass and damping coefficients for hexagonal cylinders in a confined viscous fluid.— *Trans. ASME J. Pressure Vessel Technol.*, 1980, v. 102, № 2, p. 152–157.
4. *Микишев Г. Н., Столбецов В. И.* О колебаниях тела в ограниченном объеме вязкой жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1983, № 1, с. 22–30.
5. *Микишев Г. Н., Столбецов В. И.* Об угловых колебаниях эллипсоида вращения в ограниченном объеме вязкой жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1984, № 2, с. 34–39.
6. *Черноузько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., 1968. 230 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
8. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
9. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика, М.: Мир, 1964. 655 с.

Москва

Поступила в редакцию  
21.III.1985