

УДК 532.51.013.4:536.252

**О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ
ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ
ГРАНИЦАМИ**

ГЕРШУНИ Г. З., ЖУХОВИЦКИЙ Е. М.

Исследование конвективной устойчивости механического равновесия двух горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей обнаружило специфические особенности поведения таких систем [1–3]. Оказалось, в частности, что в отличие от однородного горизонтального слоя двухслойные системы при определенных условиях становятся конвективно-неустойчивыми при однородном нагреве сверху, а также обнаруживают колебательную неустойчивость при подогреве снизу. В [1–3] задача решалась для системы с изотермическими внешними границами. Ниже выполнено исследование устойчивости равновесия двухслойных систем при теплоизолированных внешних границах. Особое внимание уделяется изучению длинноволновой моды неустойчивости.

Рассмотрим систему двух горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей в поле тяжести при наличии вертикального градиента температуры, обусловленного нагревом снизу или сверху. Пусть полная толщина двухслойной системы равна H . Через h обозначим отношение толщины нижнего слоя к H . Таким образом, толщины нижнего и верхнего слоев равны соответственно hH и $(1-h)H$. Внешние горизонтальные границы системы предполагаются теплоизолированными (например, твердыми и изготовленными из материала, теплопроводность которого мала по сравнению с теплопроводностью контактирующей с ними жидкости).

В состоянии механического равновесия градиенты температуры в каждом слое вертикальны, постоянны и связаны условием непрерывности потока тепла на границе раздела слоев: $\kappa_1 A_1 = \kappa_2 A_2$. Здесь A — равновесный градиент температуры, κ — коэффициент теплопроводности; индексы 1 и 2 относятся соответственно к нижнему и верхнему слоям.

Для исследования устойчивости механического равновесия рассмотрим малые нормальные возмущения, пропорциональные $\exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)]$. Оси x и y направлены горизонтально, начало координат расположено на нижней границе двухслойной системы, k_1 и k_2 — волновые числа.

Запишем амплитудную задачу для нейтральных монотонных возмущений ($\lambda=0$) в терминах амплитуд вертикальной компоненты скорости $w_{1,2}$ и возмущения температуры $\theta_{1,2}$ в безразмерном виде, пользуясь принятыми в [1] обозначениями

$$\begin{aligned} \Delta^2 w_1 - k^2 R \theta_1 &= 0, \quad \Delta \theta_1 + w_1 = 0 \\ \Delta^2 w_2 - \varepsilon k^2 R \theta_2 &= 0, \quad \Delta \theta_2 + \kappa \chi w_2 = 0 \\ \Delta &= d^2/dz^2 - k^2, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \end{aligned} \tag{1}$$

На внешних границах системы $z=0$ и 1 ставятся условия прилипания и отсутствия возмущения теплового потока. Граница раздела слоев $z=h$ предполагается плоской недеформируемой; на ней ставятся условия обрращения в нуль вертикальных компонент скорости, непрерывности ка-

сательных компонент скорости и вязких напряжений, а также температуры и теплового потока. Механизмы неустойчивости Рэлея — Тейлора и Марангони не учитываются. Таким образом, имеем следующие граничные условия для амплитуд:

$$\begin{aligned} w_1=0, w_1'=0, \theta_1'=0 \quad (z=0) \\ w_2=0, w_2'=0, \theta_2'=0 \quad (z=1) \\ w_1=w_2=0, w_1'=w_2', \eta w_1''=w_2'' \\ \theta_1=\theta_2, \kappa\theta_1'=\theta_2' \quad (z=h) \end{aligned} \quad (2)$$

где штрих означает производную по вертикальной координате z .

Амплитудная задача содержит следующие безразмерные параметры:

$$R = \frac{g\beta_1 A_1 H^4}{\nu_1 \chi_1}, \quad \varepsilon = \frac{\nu_1 \beta_2}{\nu_2 \beta_1}, \quad \kappa = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \quad \chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad \eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

Параметром, определяющим границы устойчивости равновесия, является число Рэлея R , выраженное через полную толщину H , градиент температуры и параметры нижней жидкости; при подогреве снизу $R > 0$.

Физически очевидно, что решение задачи об устойчивости обладает свойством симметрии относительно перестановки нижнего и верхнего слоев жидкости. При такой перестановке происходит замена параметров: $\varepsilon \rightarrow 1/\varepsilon$, $\kappa \rightarrow 1/\kappa$, $\chi \rightarrow 1/\chi$, $\eta \rightarrow 1/\eta$ и $h \rightarrow 1-h$ с соответствующим пересчетом критического числа Рэлея

$$R(\varepsilon^{-1}, \kappa^{-1}, \chi^{-1}, \eta^{-1}, 1-h) = \varepsilon \kappa \chi R(\varepsilon, \kappa, \chi, \eta, h) \quad (3)$$

В случае одиночного подогреваемого снизу слоя жидкости с теплоизолированными границами, как известно, наиболее опасными являются длинноволновые возмущения ($k \rightarrow 0$). Естественно ожидать, что и в случае двухслойной системы длинноволновые возмущения играют важную роль.

Для исследования длинноволновой неустойчивости применим метод малого параметра. Представим амплитуды возмущений в виде разложений по четным степеням безразмерного волнового числа

$$\begin{aligned} w_{1,2} = k^2 w_{1,2}^{(1)} + \dots, \quad \theta_{1,2} = \theta_{1,2}^{(0)} + k^2 \theta_{1,2}^{(1)} + \dots \\ R = R^{(0)} + k^2 R^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Для членов нулевого порядка имеем $\theta_{1,2}^{(0)''} = 0$. Удовлетворяя граничным условиям, получаем $\theta_1^{(0)} = \theta_2^{(0)} = \text{const}$; далее эта постоянная полагается равной единице.

Уравнения для членов второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned} w_1^{(1)IV} = R^{(0)}, \quad \theta_1^{(1)''} + w_1^{(1)} = 1 \\ w_2^{(1)IV} = \varepsilon R^{(0)}, \quad \theta_2^{(1)''} + \kappa \chi w_2^{(1)} = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия для членов разложений второго и последующих порядков совпадают с (2) и не выписываются. Из решения системы (5) с соответствующими граничными условиями находятся амплитуды

$$\begin{aligned} w_1^{(1)} = \frac{R^{(0)}}{24} z^2 (z^2 + 4C_1 z + 12C_2) \\ w_2^{(1)} = \varepsilon R^{(0)} (1-z)^2 \left(\frac{z^2}{24} + B_1 z + B_2 \right) \end{aligned}$$

$$\theta_1^{(1)} = -\frac{R^{(0)}}{720} z^4 (z^2 + 6C_1 z + 30C_2) + \frac{z^2}{2} + C_3 \quad (6)$$

$$\theta_2^{(1)} = -\frac{\varepsilon \kappa \chi R^{(0)}}{1440} [(2z^6 - 6z^5 + 5z^4 - 2z) + 24B_1(3z^5 - 10z^4 + 10z^3 - 5z) + \\ + 120B_2(z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z)] + z^2/2 - z$$

$$C_1 = [-5\eta h^2(1-h) + \varepsilon(1-h)^3 - 4h^3]/8h\varphi$$

$$C_2 = [3\eta h^2(1-h) - \varepsilon(1-h)^3 + 2h^3]/24\varphi$$

$$B_1 = -h[\eta h^2 + 4\varepsilon\eta(1-h)^2 - \varepsilon(1-h)(1-5h)]/48\varepsilon(1-h)\varphi$$

$$B_2 = h^2[\eta h^2 + 2\varepsilon\eta(1-h)^2 - \varepsilon(1-h)(1-3h)]/48\varepsilon(1-h)\varphi$$

$$\varphi = \eta(1-h) + h$$

Постоянная C_3 не приводится; она не влияет на $R^{(0)}$. Критическое число $R^{(0)}$, определяющее порог неустойчивости равновесия относительно длинноволновых возмущений, равно

$$R^{(0)} = \frac{2880[(1-h) + \kappa h][\eta(1-h) + h]}{\kappa[4h^6 + 9\eta h^5(1-h) - 5(\varepsilon + \eta\chi)(1-h)^3 h^3 + 9\varepsilon\chi h(1-h)^5 + 4\varepsilon\chi\eta(1-h)^6]} \quad (7)$$

Обратимся сначала к предельным случаям $h \rightarrow 1$ и $h \rightarrow 0$, соответствующим переходу к одиночному слою. Случай $h \rightarrow 1$ отвечает одиночному слою со свойствами первой (нижней) жидкости. При этом из (7) имеем $R^{(0)} = 720$ — известное критическое число Рэлея для одиночного слоя с теплоизолированными границами. При $h \rightarrow 0$ получается $R^{(0)} = 720/\varepsilon\kappa\chi$; этот случай отвечает одиночному слою со свойствами второй (верхней) жидкости. Если ввести число Рэлея, определенное по градиенту температуры и параметрам верхней жидкости, то в пределе при $h \rightarrow 0$ получим $g\beta_2 A_2 H^4 / \nu_2 \chi_2 = 720$.

Вид функции $R^{(0)}(h)$ в промежутке $0 < h < 1$ зависит от значений параметров ε , χ и η . Входящий в знаменатель формулы (7) полином шестого порядка по h имеет такое чередование знаков коэффициентов, при котором в области $0 < h < 1$ либо корней нет, либо имеются два корня h_1 и h_2 , зависящие от ε , χ и η . Эти две возможности соответствуют двум типам зависимости $R^{(0)}(h)$, изображенным на фиг. 1, а и б. В случае а во всей области изменения h имеется лишь рэлеевская неустойчивость при подогреве снизу (критическое число $R^{(0)} > 0$). В случае б этот тип неустойчивости имеет место в областях $0 \leq h < h_1$ и $h_2 < h \leq 1$. В области же $h_1 < h < h_2$ критическое число $R^{(0)} < 0$, т.е. неустойчивость рэлеевского типа невозможна (имеется в виду длинноволновая мода), однако появляется неустойчивость при нагреве сверху. Физическая природа этой нерэлеевской неустойчивости рассматривалась в [1], где было показано, что она обусловлена сильным различием параметров обеих жидкостей.

Исследуем переход между ситуациями а и б, иными словами — условия появления неустойчивости при нагреве сверху. С этой целью запишем критическое число (7) в виде

$$R^{(0)} = \frac{2880(q + \kappa)(\eta q + 1)}{\kappa h^4 F}$$

$$q = (1-h)/h; \quad F = 4\varepsilon\chi\eta q^6 + 9\varepsilon\chi q^5 - 5(\varepsilon + \eta\chi)q^3 + 9\eta q + 4$$

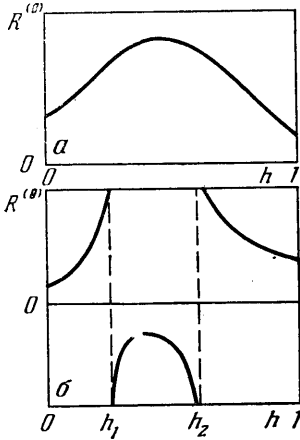
Появление неустойчивости при нагреве сверху ($R^{(0)} < 0$) связано с обращением в нуль функции $F(q; \varepsilon, \chi, \eta)$; обсуждаемый тип неустойчивости реализуется при значениях параметров, соответствующих $F < 0$ (фиг. 1, б).

Будем рассматривать границы областей существования неустойчивости при нагреве сверху на плоскости (ϵ, χ^{-1}) при фиксированных значениях остальных параметров — q (или h) и η . Эти границы представлены на фиг. 2 для $h=0,5$ при различных значениях η (сплошные линии 1–6 соответствуют значениям $\eta=\infty; 10; 2; 1; 0,2$ и $0,1$). Область неустойчивости примыкает к началу координат. Кривые семейства пересекают оси ϵ и χ^{-1} в точках

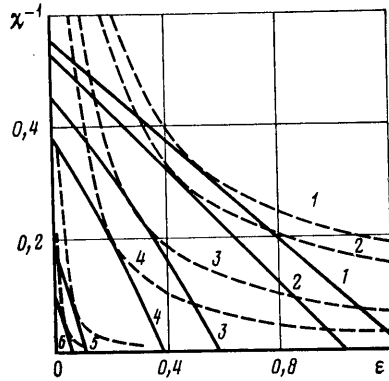
$$\epsilon_* = 5\eta/q^2(9+4\eta q), \quad \chi_*^{-1} = 5\eta q^3/(4+9\eta q) \quad (8)$$

Эти формулы соответствуют произвольным значениям q .

Как видно из фиг. 2 и формул (8), условия существования неустойчивости при нагреве сверху наиболее благоприятны в предельном случае малых ϵ и χ^{-1} (физически это соответствует двухслойной системе, у ко-



Фиг. 1



Фиг. 2

торой верхний слой обладает малым тепловым расширением, а нижний имеет высокую теплопроводность; см. [1]). При этом из (7) получаем

$$R^{(0)} = - \frac{576[(1-h) + \kappa h][\eta(1-h) + h]}{\kappa \eta \chi h^3 (1-h)^3}$$

Отсюда следует, что $R^{(0)} < 0$ при всех значениях параметров η , κ и h . В частном случае $h=0,5$ имеем

$$R^{(0)} = -9216(1+\kappa^{-1})(1+\eta^{-1})\chi^{-1}$$

Аналогичная зависимость критического числа Рэля от параметров получалась и в системе с изотермическими внешними границами. Сравнение с формулой (3.3) из [1] показывает, что переход к случаю теплоизолированных границ приводит к сильному понижению порога неустойчивости.

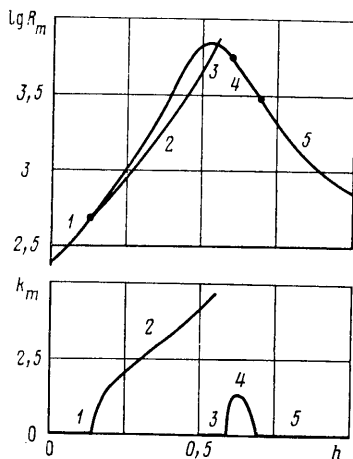
Возвращаясь к фиг. 2, отметим, что с увеличением η расширяется область значений параметров (ϵ, χ^{-1}) , где имеет место неустойчивость. Предельная кривая 1 соответствует $\eta=\infty$ и оказывается для произвольного q прямой $4q^5\epsilon + 9\chi^{-1} - 5q^2 = 0$.

Сплошные линии на фиг. 2 ограничивают примыкающую к началу координат область, где существует неустойчивость при нагреве сверху. Их положение при заданном η зависит от относительной толщины нижнего слоя h . Можно построить для каждого η границу области, за пределами которой неустойчивость рассматриваемого типа отсутствует при всех значениях h . Очевидно, эта граница является огибающей кривых семейства $F(q; \epsilon, \chi, \eta) = 0$ при фиксированном η ; она определяется системой $F=0, \partial F/\partial q=0$. Огибающие для разных η изображены на фиг. 2 штриховыми

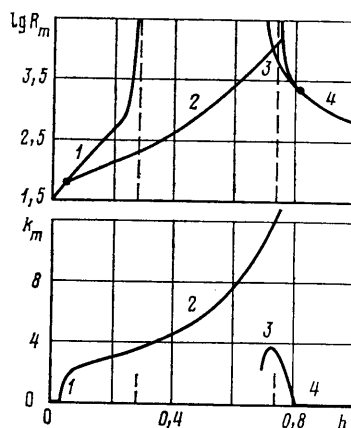
линиями (значения η для них те же, что указаны выше). Предельная огибающая соответствует $\eta = \infty$ и имеет вид $\epsilon \chi^{-1/2} = 1/6\sqrt{3}$.

Приведенные на фиг. 2 результаты относятся к границам неустойчивости в области малых значений ϵ и χ^{-1} . В силу упоминавшегося выше свойства симметрии имеются также соответствующие области неустойчивости при больших ϵ и χ^{-1} . Эти границы здесь не рассматриваются; заметим только, что они получаются из всех приведенных формул путем пересчета с помощью соотношения (3). Физически новых результатов при этом не получается.

До сих пор речь шла о длинноволновой моде неустойчивости ($k=0$). Вопрос о том, является ли эта мода наиболее опасной, разумеется, может



Фиг. 3



Фиг. 4

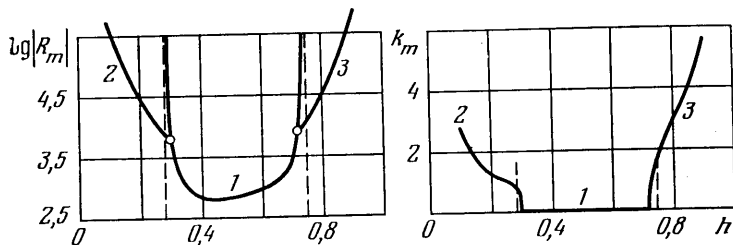
быть решен лишь путем сравнения с результатами, относящимися к границам неустойчивости относительно ячеистых возмущений ($k \neq 0$). Для решения задачи об устойчивости при произвольных k необходимо обратиться к полной амплитудной задаче (1), (2). Эта задача решалась численно методом Рунге — Кутты. Результаты решения показывают, что соотношение между длинноволновой и ячеистой модами весьма сложным образом зависит от относительной толщины слоев h , а также от параметров двухслойной системы ϵ , κ , χ и η . Ниже представлены численные результаты для двух характерных примеров двухслойных систем.

Рассмотрим сначала систему 85%-ный раствор глицерина в воде — оливковое масло (эта система использовалась в экспериментах [4] по наблюдению конвективной неустойчивости в шаровой полости). Физические параметры системы имеют следующие значения: $\epsilon = 1,5$; $\kappa = 1,85$; $\chi = 1,13$; $\eta = 1,35$. Как видно, жидкости в обоих слоях обладают сравнительно близкими свойствами. Из формулы (7) и диаграммы на фиг. 2 следует, что в этой системе имеет место только обычная рэлеевская неустойчивость (зависимость критического числа $R^{(0)}$ от h относится к типу *a* на фиг. 1, а длинноволновая неустойчивость при нагреве сверху невозможна).

Сводные данные о критических параметрах неустойчивости равновесия (минимальном по k критическом числе Рэлея R_m и соответствующем волновом числе k_m) представлены на фиг. 3. Верхняя кривая $R_m(h)$ соответствует длинноволновой моде (см. формулу (7)). На ней указаны точки отщепления границы ячеистой моды. На участках 1 ($0 \leq h < 0,14$), 3 ($0,14 < h < 0,54$) и 5 ($0,69 < h \leq 1$) наиболее опасны длинноволновые возмущения; в этих областях $k_m = 0$. В области 2 ($0,14 < h < 0,54$) наиболее опасными являются ячеистые возмущения; с увеличением h в этой области

значение k_m монотонно возрастает. Еще одна область наиболее опасных ячеистых возмущений — участок 4 ($0,59 < h < 0,69$). В этой области критическое число Рэлея R_m несколько ниже, чем определяемое формулой (7) значение $R^{(0)}$ для длинноволновой моды; однако это отличие весьма мало и в масштабе рисунка обе кривые не различаются.

Наличие зон длинноволновой неустойчивости, примыкающих к концам промежутка $h=0$ и 1, представляется вполне естественным — в этих предельных случаях система с точки зрения устойчивости близка к одиночному слою с теплоизолированными границами. Обращает на себя внимание значительная протяженность участка 5 длинноволновой неустойчивости, примыкающего к точке $h=1$. Неожиданным является наличие области



Фиг. 5

длинноволновой неустойчивости 3 при промежуточных значениях h ; этот факт, как видно из фиг. 3, связан с сильной стабилизацией в этой области ячеистой неустойчивости.

В качестве второго примера рассмотрим систему ртуть — вода. При средней температуре 10 С параметры таковы: $\epsilon=0,0448$; $\kappa=14,6$; $\chi=32,2$; $\eta=1,24$. Эта система характеризуется сильным различием свойств слоев (малые ϵ и χ^{-1}) что, как указывалось выше, способствует развитию неустойчивости при нагреве сверху (в [1] показано, что в данной системе такая неустойчивость имеет место в случае изотермических внешних границ). С помощью диаграммы на фиг. 2 можно установить, что и в случае теплоизолированных границ неустойчивость при нагреве сверху возможна. Граница длинноволновой моды относится к типу б на фиг. 1. Координаты точек разрыва $h_1=0,284$; $h_2=0,746$.

Характеристики рэлеевской неустойчивости при подогреве снизу изображены на фиг. 4. В областях $0 \leq h < 0,03$ и $0,81 < h \leq 1$ наиболее опасны длинноволновые возмущения. В области $0,03 < h < 0,81$ ответственными за неустойчивость являются ячеистые возмущения. Граница устойчивости в этой области образована ветвями 2 и 3, пересекающимися при $h=0,72$. Ветвь 2 соответствует ячеистым структурам, возникающим в верхнем слое (вода), а ветвь 3 — в нижнем (ртуть). Отметим, что при промежуточных значениях h длинноволновая рэлеевская неустойчивость вообще невозможна, а ячеистая мода весьма сильно стабилизирована — ей отвечают высокие критические значения R_m . На линии 2 критические волновые числа достигают больших значений (коротковолновые ячейки в верхнем слое); именно по этой причине количественные результаты слабо зависят от типа тепловых граничных условий (см. также [3]).

Критическое число Рэлея и критическое волновое число в зависимости от h для нагрева сверху представлены на фиг. 5. В промежуточной области h неустойчивость имеет длинноволновую природу (кривая 1). При $h < 0,295$ и $h > 0,727$ более опасны ячеистые возмущения. Сопоставление с результатами [1, 3], относящимися к случаю изотермических границ, показывает, что в случае теплоизолированных границ порог неустойчивости при нагреве сверху значительно ниже (так, при $h=0,5$ имеем соответственно для изотермических и теплоизолированных границ $R_m=13,45 \cdot 10^3$ и 670,2). Это понижение объясняется не только переходом к

более «слабым» граничным условиям для температуры, но главным образом тем обстоятельством, что развитию специфической неустойчивости при нагреве сверху, как показано в [1], способствуют адвективные длинноволновые возмущения.

Авторы благодарны О. В. Кустовой за помощь в проведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О неустойчивости равновесия системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей при нагреве сверху. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 28–34.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О монотонной и колебательной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогреваемой снизу. — Докл. АН СССР, 1982, с. 265, № 2, с. 302–305.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Першина Е. А. О возникновении конвекции в некоторых двухслойных системах. — В кн.: Конвективные течения. Пермь: Пермск. пед. ин-т, 1983, с. 3–24.
4. Поддубная Л. Г., Рудаков Ю. П., Шайдуров Г. Ф. Тепловая неустойчивость двухслойной жидкости в шаровой полости. — Уч. зап. Перм. ун-та, 1968, № 184, с. 23–40.

Пермь

Поступила в редакцию
12.V.1985