3. *Maslen S. H.* Inviced Hypersonic Flow Past Smooth Symmetric Bodies.— AJAA Journal, 1964, № 6, p. 103—111.
4. *Гусев В. Н., Ерофеев А. И., Климова Т. В., Перепухов В. А., Рябов В. В., Толстых А. И.* Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа.— Тр. ЦАГИ, 1977, вып. 1855. 43 с.
5. *Кузнецов М. М., Полянский О. Ю.* Распределение давления на клине и конусе в гиперзвуковом неравновесном потоке газа.— Уч. зап. ЦАГИ, 1982, т. 13, № 4, с. 42—49.
6. *Амарантова И. И., Буковшин В. Г., Шустов В. И.* Экспериментальные исследования обтекания острых конусов с околокритическими и закритическими углами раствора.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2, с. 195—198.
7. *Храмов Н. Е.* Расчет обтекания сферы неравномерным потоком газа.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, с. 175—177.
8. *Лебедев М. Г., Савинов К. Г.* Удар неравномерного сверхзвукового потока газа в плоскую преграду.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 3, с. 164—171.
9. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
10. *Агафонов В. П., Вертушкин В. К., Гладков А. А., Полянский О. Ю.* Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М.: Машиностроение, 1972. 344 с.
11. *Seiff A.* Atmosphere entry problems of manned interplanetary flight.— AJAA Eng. Problems of manned interplanetary exploration. Techn. papers meeting. Sept. 30 — Oct. 1, 1963, p. 19.
12. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1985

УДК 533.6.011.72:534.222

К РАСЧЕТУ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

МАКАРОВ С. Н., ФИЛИППОВ Б. В.

Исследуется третье (газодинамическое) приближение теории волн конечной амплитуды [1—3]. Полученное эволюционное уравнение для скорости газа интегрируется аналитически. В качестве примеров рассматриваются две известные задачи: о распространении стационарного симметричного скачка плотности [2] и о количественном описании акустического ветра [1, 3]. Решение второй задачи записывается для случая произвольных акустических чисел Рейнольдса.

1. С выводом уравнений второго приближения теории волн конечной амплитуды для недиспергирующего газа [1] связано следующее утверждение. Если амплитуда плоской волны и диссипативные коэффициенты характеризуются по величине одним и тем же малым параметром $\varepsilon \ll 1$, то после введения медленной координаты $z_1 = \varepsilon x$ и перехода к времени $\tau = t - x/c_0$ в движущейся системе координат для плотности ρ, скорости v и удельной энтропии газа s имеет место разложение

$$\begin{gathered} v(\tau, z_1, \varepsilon) = \varepsilon v_0'(\tau, z_1) + o(\varepsilon) \\ \rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_0' + o(\varepsilon), \quad s = s_0 + \varepsilon^2 s_0'' + o(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial\tau} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \end{gathered} \tag{1.1}$$

Подстановка (1.1) в систему уравнений неразрывности, импульса и энтропии для политропного газа дает соотношения

$$\begin{gathered} \rho_0' = \frac{\rho_0}{c_0} v_0', \qquad \frac{\partial v_0'}{\partial z_1} - \frac{\gamma+1}{2c_0^2} v_0' v_{0\tau}' - \frac{b'}{2\rho_0 c_0^3} v_{0\tau\tau}' = 0 \\ s_0'' = \frac{\gamma-1}{\rho_0 c_0^3} \varkappa' v_{0\tau}', \qquad c_0\rho - \rho_0 v = \frac{3-\gamma}{4c_0}\rho_0 v^2 - \frac{b}{2c_0^2} v_\tau + o(\varepsilon^2) \end{gathered} \tag{1.2}$$

включающие уравнение Бюргерса. Здесь $b' = b/\varepsilon$, $\varkappa' = \varkappa/\varepsilon$; остальные обозначения постоянных общеприняты.

В настоящей работе для вывода упрощенных уравнений движения предлагается продолжить разложение (1.1) регулярным образом, введя еще одну независимую медленную координату $z_2=\varepsilon^2 x$, учитывающую деформацию профиля следующего порядка малости. Полученное таким образом эволюционное уравнение на функцию v представляет собой линеаризованный около решения $v_0=\varepsilon v_0'$ вариант уравнения (7) работы [2]. Оно интегрируется аналитически. Процесс линеаризации около предыдущего приближения при сохранении малых третьего порядка становится очевидным, если использовать условие вложения $v_0 \sim \varepsilon$, $v \sim \varepsilon$, $v-v_0=o(\varepsilon)$ для решений v_0, v второго и третьего приближения теории волн конечной амплитуды.

Регулярное по ε продолжение разложения (1.1) до членов второго порядка включительно в переменных τ, z_1 нетривиально с точки зрения следующего рассуждения. При распространении волн, определяемых выражением (1.2), имеет место медленное изменение профиля v, ρ в движущейся системе координат. Его характерный масштаб L по x составляет $\sim\varepsilon^{-1}$, а соответствующая медленная координата $z_1=\varepsilon x$ [1]. Учет более высоких порядков по ε в переменных задачи приводит к необходимости учета еще более медленных деформаций профиля с характерными масштабами $L \gg \varepsilon^{-1}$. Анализ показывает, что при продолжении разложения (1.1) до членов второго порядка необходимо дополнительно учесть деформацию профиля с характерным масштабом $L \sim \varepsilon^{-2}$. В соответствии с методом многих масштабов это можно сделать, положив все функции зависящими от еще одной медленной координаты $z_2=\varepsilon^2 x$, описывающей данную деформацию

$$
\begin{gathered}
v(\tau, z_1, z_2, \varepsilon)=\varepsilon v'(\tau, z_1, z_2)+\varepsilon^2 v''(\tau, z_1, z_2)+o(\varepsilon^2) \\
\rho=\rho_0+\varepsilon\rho'+\varepsilon^2\rho''+o(\varepsilon^2), \quad s=s_0+\varepsilon^2 s''+\varepsilon^3 s'''+o(\varepsilon^3) \\
\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial z_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial z_2}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau}
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

Подстановка (1.3) в исходную газодинамическую систему с учетом членов первого и второго порядка по-прежнему дает соотношения вида (1.2) с той разницей, что все величины в них теперь параметрически зависят от координаты z_2.

2. Подставим разложение (1.3) в уравнения движения политропного газа [1] и выведем соотношения, получающиеся при сохранении малых третьего порядка. В соответствии с общей схемой, развитой при учете малых второго порядка [1], вывод состоит из нескольких этапов. Сначала из энтропийного уравнения выражаем через функции v', v'' величину s''', затем, разлагая уравнение состояния $p=(\gamma-1)\rho^\gamma \exp((s-s_0)/c_v)$ в ряд по ε, находим величину p с точностью до малых третьего порядка и, наконец, складываем и вычитаем уравнение импульса и уравнение неразрывности, домноженное на c_0, и в сумме приравниваем нулю коэффициент при ε^3, а в разности отбрасываем все члены порядка $o(\varepsilon^3)$. В результате последовательного выполнения этих операций с использованием формул (1.2) были получены следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v'}{\partial z_2}+\frac{\partial v''}{\partial z_1}-\frac{\gamma+1}{2c_0^2}(v'v'')_\tau-\frac{b'}{2\rho_0 c_0^3}v_{\tau\tau}''= \\
=\frac{3(\gamma+1)}{8\rho_0 c_0^4}b'v_\tau'^2-\frac{b'}{4\rho_0 c_0^4}(v'^2)_{\tau\tau}-\frac{d_1}{2\rho_0^2 c_0^5\varepsilon^2}v_{\tau\tau\tau}'
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

$$
\rho_0 c_0^2 T_0 s_\tau''' = b'v_\tau'^2-\frac{\varkappa'}{2c_v}(v'^2)_{\tau\tau}+\frac{d}{(\gamma-1)\rho_0 c_0\varepsilon^2}v_{\tau\tau\tau}'+\frac{c_0\varkappa'}{\gamma c_v}v_{\tau\tau}'' \tag{2.2}
$$

$$
\begin{gathered}
c_0\rho_\tau-\rho_0 v_\tau=\frac{3-\gamma}{4c_0}\rho_0(v^2)_\tau-\frac{b}{2c_0^2}v_{\tau\tau}-\frac{(5\gamma-3)}{8c_0^3}bv_\tau^2+ \\
+\frac{(\gamma-1)b}{4c_0^3}(v^2)_{\tau\tau}+\frac{(3-\gamma)(2-\gamma)}{12c_0^2}\rho_0(v^3)_\tau+\frac{d_2}{2\rho_0 c_0^4}v_{\tau\tau\tau}+o(\varepsilon^3) \\
d=\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{\varkappa}{c_v}-b\right)\frac{\varkappa}{c_v}, \qquad d_{1,2}=\frac{b^2}{4}\pm d
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Основное отличие выражения (2.2) от соответствующего выражения для s_τ'' (1.2) связано с присутствием члена $b'v_\tau'^2$, который уже не является функцией типа источника. Если $\tau\to\mp\infty$ означает состояния до и после прохождения волны, то можно ввести величины $\Delta s=\rho_0 c_0^2 T_0(s(\infty)-s(-\infty))$, $\Delta s''$, $\Delta s'''$, характеризующие полное приращение энтропии и отдельных ее компонент

$$
\Delta s''=0, \qquad \Delta s'''=b'\int_{-\infty}^{\infty} v_\tau'^2\,d\tau, \qquad \Delta s=\varepsilon^3\Delta s'''+o(\varepsilon^3) \tag{2.4}
$$

В отличие от второго приближения для любого возмущения с учетом малых третьего порядка имеет место конечное приращение энтропии, равное (2.4). При переходе к невязкому пределу правая часть выражения для $\Delta s'''$ остается конечной и может быть вычислена с помощью уравнения Бюргерса (1.2). Для одиночного скачка

$$b'\int_{-\infty}^{\infty} v_\tau'^2\,d\tau \to \frac{\gamma+1}{12}\rho_0 c_0[v']^3$$

и формула (2.4) сводится к известному соотношению для скачка энтропии в слабой ударной волне.

Возвратимся от двух независимых переменных z_1, z_2 к физической координате $z=x$, $\partial/\partial z=\varepsilon\partial/\partial z_1+\varepsilon^2\partial/\partial z_2$ и, используя (2.1), (1.2), получим уравнение, которому удовлетворяет функция $v(\tau, z)=\varepsilon v'+\varepsilon^2 v''$ с точностью до членов третьего порядка включительно. Разложим в (2.1) функцию v' во всех слагаемых, кроме $\partial v'/\partial z_2$, в ряд Тейлора по переменной z_2

$$v'-v_0' \sim z_2\frac{\partial v'}{\partial z_2}(z_2=0)=\varepsilon z_1\frac{\partial v'}{\partial z_2}(0)\sim\varepsilon \qquad (2.5)$$

домножим уравнение (2.1) на ε^3, уравнение (1.2) для v' на ε^2 и сложим друг с другом. Результат принимает вид

$$v_z-\frac{\gamma+1}{2c_0^2}(v_0v)_\tau-\frac{b}{2\rho_0c_0^3}v_{\tau\tau}=-\frac{\gamma+1}{2c_0^2}v_0v_{0\tau}+$$
$$+\frac{3(\gamma+1)}{8\rho_0c_0^4}bv_{0\tau}^2-\frac{b}{4\rho_0c_0^4}(v_0^2)_{\tau\tau}-\frac{d_1}{2\rho_0^2c_0^5}v_{0\tau\tau\tau} \qquad (2.6)$$

где $v_0(\tau, z)=\varepsilon v_0'$, и все отброшенные члены имеют порядок $o(\varepsilon^3)$. Так как $\partial v_0'/\partial z_2=0$, функция v_0 является решением уравнения Бюргерса [1].

Эволюционное уравнение (2.6) имеет смысл рассматривать на масштабах $x\sim\varepsilon^{-1}$. На больших расстояниях от излучателя $v_0=o(\varepsilon)$, и поведение решения с точностью до малых третьего порядка по ε описывается обычным уравнением Бюргерса.

Распространение волн конечной амплитуды с учетом малых третьего порядка было исследовано в работе [2]. Существенно, что полученное для функции v уравнение (7) не может быть проинтегрировано аналитически. Однако после введения в анализ предыдущего приближения v_0, замены в нелинейных слагаемых v на v_0, согласно (1.1), (1.3), (2,5) по формуле $v-v_0=o(\varepsilon)$, и дополнительного исключения лишних членов порядка $o(\varepsilon^3)$ уравнение (7) при учете неизэнтропичности преобразуется к уравнению (2.6). Последнее с помощью следующей подстановки сводится к линейному неоднородному уравнению теплопроводности

$$v=\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)_\tau, \qquad v_0=\frac{2b}{(\gamma+1)\rho_0c_0}\frac{\varphi_\tau}{\varphi}$$

$$\psi_z-\frac{b}{2\rho_0c_0^3}\psi_{\tau\tau}=\varphi\int G\,d\tau$$

где за G обозначена правая часть (2.6), и при $b>0$ интегрируется в явном виде.

3. Рассмотрим, пользуясь (2.3), (2.6), решение двух известных задач: о распространении одиночного симметричного стационарного скачка плотности в среде [2] и о нахождении амплитуды суммарной отраженной от разрыва волны [1, 3].

В первом случае запишем отвечающее (2.6) при $\varkappa'$, $b'\to 0$ условие на разрыве

$$\left(1-\frac{V}{c_0}\right)[v]+\frac{\gamma+1}{2c_0}\left[vv_0-\frac{v_0^2}{2}\right]=-\frac{(\gamma+1)^2}{32c_0^2}[v_0]^3 \qquad (3.1)$$

Значение скорости слева и справа от скачка имеет вид

$$\frac{v_{1,2}}{c_0}=\mp M_0+\frac{\gamma-3}{4}M_0^2+o(\varepsilon^2), \qquad M_0=\frac{\rho_0'}{\rho_0} \qquad (3.2)$$

Подстановка (3.2) в (3.1) приводит к выражению для скорости фронта V

$$V=c_0\left(1+\frac{\gamma^2-1}{4}M_0^2\right)+o(\varepsilon^2)$$

которое качественно согласуется с формулой (14) работы [2]. Различие в коэффициентах связано с учетом неизэнтропичности.

Во втором случае воспользуемся формулой (2.3) и ее вариантом для простых волн

$$c_0\rho_\pi - \rho_0 v_\pi = \frac{3-\gamma}{4c_0}\rho_0\left(v_\pi^2 + \frac{2-\gamma}{3c_0}v_\pi^3\right) + o(\varepsilon^3) \tag{3.3}$$

Предположим, что величины ρ, v в выражении (2.3) стремятся при $\tau\to\mp\infty$ к предельным значениям $\rho_{1,2}$, $v_{1,2}$, в выражении (3.3) – к $\rho_{1,\pi 2}$, $v_{1,\pi 2}$. Однородные состояния на $+\infty$ одинаковы для простой и газодинамической волн с точностью до членов второго порядка малости

$$v_r = v_2 - v_{\pi 2} \sim \varepsilon^3, \quad \rho_r = \rho_2 - \rho_{\pi 2} \sim \varepsilon^3$$

Интегрируя формулы (3.3), (2.3) по всем τ и вычитая одну из другой, имеем

$$c_0\rho_r - \rho_0 v_r = -\frac{5\gamma-3}{8c_0^3}\Delta s \tag{3.4}$$

Для давления получается аналогичное соотношение

$$p_r - c_0\rho_0 v_r = \frac{3\gamma-5}{8c_0^2}\Delta s \tag{3.5}$$

Уравнения (3.4), (3.5) показывают, что любое возмущение, распространяющееся из области $\tau\to\infty$ в область $\tau\to-\infty$, дополнительно к простой волне, набегающей из $\tau\to\infty$, будет генерировать отраженную волну третьего порядка малости [1], значения параметров в которой прямо пропорциональны полному приращению энтропии и определены согласно (3.4), (3.5).

Если приращение энтропии происходит только в области скачка, заменим в (3.4), (3.5) Δs на $((\gamma+1)c_0^4/12\rho_0^2)[\rho^3]$ и используем линейное соотношение для плотности и скорости в отраженной волне [3]

$$c_0\rho_r = -\rho_0 v_r \tag{3.6}$$

В результате имеем

$$\rho_r = -\frac{(5\gamma-3)(\gamma+1)}{192\rho_0^2}[\rho]^3, \qquad p_r = \frac{(11\gamma-13)(\gamma+1)}{192\rho_0^2}c_0^2[\rho]^3 \tag{3.7}$$

Выражение (3.7.1) в точности совпадает с формулой (VII.2.21) для амплитуды суммарной отраженной от разрыва волны [1].

Для одиночного импульса, затухающего при $\tau\to\pm\infty$ как $o(\varepsilon^3)$, учет малых третьего порядка приводит в соответствии с (3.4)–(3.6) к появлению постоянного течения в направлении, обратном направлению распространения волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. *Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В.* К теории волн конечной амплитуды в диссипативной среде.– Вестн. МГУ. Сер. физ.-астрон., 1969, № 5, с. 33–38.
3. *Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В.* О формировании отраженных волн на разрывах в звуковой волне.– Акуст. журн., 1969, т. 15, № 3, с. 414–420.

Ленинград

Поступила в редакцию 19.XI.1984