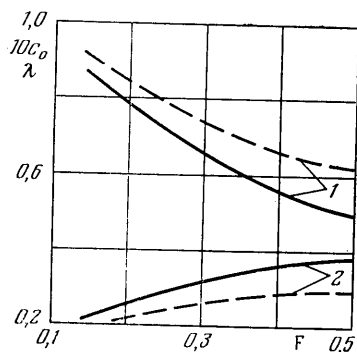
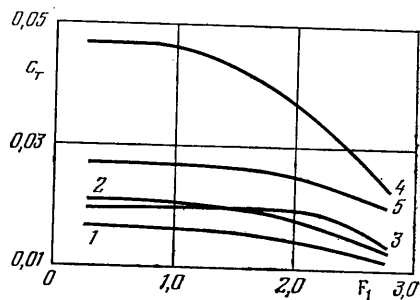


вые 1-5 соответствуют гусеницам a_1, a_2, a_3, b, c . Характер зависимости c_T от F_1 сходен для всех гусениц (за исключением a_1) — существует зона малых относительных скоростей гусеницы, где коэффициент тяги остается постоянным, при дальнейшем увеличении F_1 значения c_T монотонно падают. У гусеницы a_1 , c_T монотонно падает во всем диапазоне изменения F_1 . У однотипных гусениц a_1, a_2, a_3 , имеющих сплошные реечные плицы во всю ширину гусеничной ленты с относительным шагом соответственно 5, 10, 20 (относительный шаг плиц равен отношению шага плиц к их высоте), при малых F_1 наибольшее значение c_T соответствует гусенице a_2 , однако падение значений c_T у a_2 начинается при меньших, чем у a_3 , значениях F_1 . Гусеницы b и c с плицами в виде коротких цилиндров за счет захвата меньшего количества воздуха при входе в воду и большей собственной высоты



Фиг. 2



Фиг. 3

имеют более высокие значения c_T , чем гусеницы со сплошными реечными плицами. Полученные гидродинамические характеристики воздухоопорных гусениц позволяют на этапе предварительного проектирования плавсредства с воздухоопорным гусеничным двигателем оценить ходкость и буксировочную способность, если его гусеница по геометрическим параметрам подобна испытанным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азовцев А. И. Анализ возможностей применения гусеничных двигателей на морских и речных судах.— В кн.: Науч. тр. Дальневосточного высш. инж. морск. училища. Вып. 7. Владивосток, 1970, с. 3-9.
2. Азовцев А. И., Самсонов С. В. Уравнения плавучести и продольной остойчивости воздухоопорной гусеницы.— В кн.: Сообщения Дальневосточного высш. инж. морск. училища по судовым мягким оболочкам. Владивосток, 1979 г., вып. 37, с. 21-27.

Владивосток

Поступила в редакцию
4.III.1985.

УДК 532.92

МЕТОД УЗКИХ ПОЛОС ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

ЯКИМОВ А. Ю.

Рассматривается плоское стационарное течение идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости в поле силы тяжести. Характерной особенностью этих течений является постоянство плотности и постоянной Бернулли вдоль линии тока. Из-за весомости в стратифицированной жидкости возникают внутренние волны, которые не связаны с наличием свободной поверхности. Эти волновые движения подробно изучены в линейной постановке, однако течения типа уединенной волны могут быть описаны только нелинейными уравнениями.

Стратификация может быть непрерывной или ступенчатой. В последнем случае внутри некоторых слоев конечной толщины плотность и постоянная Бернулли не меняются и, следовательно, внутри них течение потенциально, а переменная завихренность сосредоточена на границе слоев. В этом случае, если существует кон-

Формное отображение $f(z)$ сечения слоя (плоскости z) на прямую полосу шириной y_0 , скорость жидкости может быть определена по формуле $v=v_0 f'(z)$, $v_0=G/y_0$, где G — расход жидкости в слое.

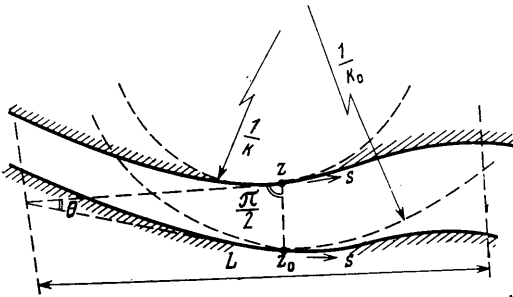
Суть предлагаемого метода состоит в том, что для определения используется приближенная формула М. А. Лаврентьева [1]. (Теорему и формулу М. А. Лаврентьева можно представить в следующем безразмерном виде [2]). Если границы области на участке длиной L удовлетворяют условиям

$$a_1 < \frac{y_0}{n} < a_2; \quad \{|\theta|, |nk|; |nk_0|\} < a_3 \varepsilon;$$

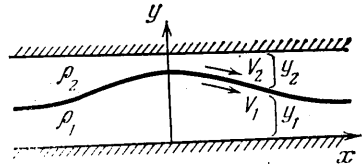
$$\left\{ |(k-k_0)n|, \left| n^2 \frac{dk}{ds} \right|, \left| n^2 \frac{dk_0}{ds} \right| \right\} < a_4 \varepsilon^2$$

$$\left\{ \left| n^3 \frac{d^2k}{ds^2} \right|, \left| n^3 \frac{d^2k_0}{ds^2} \right| \right\} < a_5 \varepsilon^3; \quad e^{-L/y_0} < a_6 \varepsilon^3$$

где ε — малое число, a_n — постоянные, z — точка на границе области, $n(z_0)$ — ширина области в точке z , измеренная по перпендикуляру к границе в точке z до пересече-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния с противоположной границей в точке z_0 , k и k_0 — кривизны границ области в точках z и z_0 , s — длина дуги границы, θ — угол между касательными к границам в точках z и z_0 (фиг. 1), то при конформном отображении $f(z)$ области на полосу шириной y_0 , при котором бесконечно удаленным точкам соответствуют точки вне участка L , модуль граничной производной конформного преобразования для некоторой точки этого участка можно представить в виде

$$|f'(z)| = \frac{y_0}{n} \left(1 + \frac{n}{3} k + \frac{n}{6} k_0 + \frac{n^2}{12} k^2 + \frac{1}{3} \theta^2 + R \right) \quad (1)$$

где $|R| < A\varepsilon^3$, причем A зависит только от a_n .

Формула (1) по существу дает для потенциальных течений следующее приближение по сравнению с гидравлическим, так как в последнем скорость зависит только от расхода и ширины полосы. Ниже будет использовано первое приближение формулы, связанное только с учетом кривизны линий тока. Рассмотрен пример с кноидальными волнами в двухслойной жидкости, заключенной между параллельными горизонтальными стенками. В этом примере условие равенства давлений на исходной границе раздела слоев приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для формы этой границы. Аналогично при наличии нескольких границ раздела задача может быть сведена к системе n уравнений второго порядка по числу n внутренних границ потока.

Предложенный здесь метод может быть распространен на нестационарные течения, а так же на течения, когда сечения отдельных слоев удовлетворяют теореме М. А. Лаврентьева только после предварительного конформного преобразования, например, при наличии тела или стенки сложной формы [3].

Рассмотрим плоскопараллельное течение двух несмешивающихся слоев тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в канале бесконечной длины. Предполагается, что свободная граница верхнего, более легкого слоя ($\rho_1 > \rho_2$) горизонтальна и течение каждого слоя потенциальное и стационарное.

Выберем прямоугольную систему координат (x, y) , движущуюся постоянно со скоростью v_0 так, что ось x принадлежит дну канала, а ось y направлена вертикально вверх (скорость v_0 направлена вдоль оси x) (фиг. 2). Будем искать форму границы раздела жидкостей, предполагая, что ее кривизна мала и меняется плавно. В этих предположениях применима формула (1).

Пусть h_1 и h_2 — соответственно глубины нижнего и верхнего слоев в невозмущенном состоянии, y_1 и y_2 — текущие значения глубин слоев, а v_1 и v_2 — соответственно скорости частиц жидкости в нижнем и верхнем слоях. (Для периодических течений h_1 , h_2 и v_1 , v_2 выражаются через расходы жидкости верхнего и нижнего слоев и значения констант Бернулли на границе раздела.) Предположим, что верхний слой в невозмущенном состоянии движется относительно нижнего со скоростью Δv_0 .

Тогда, согласно формуле М. А. Лаврентьева, для верхнего и нижнего слоев соответственно справедливы соотношения

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{h_1}{y_1} \left(1 + \frac{1}{3} y_1 y_1'' \right) \quad (2)$$

$$\frac{v_2}{v_0 + \Delta v_0} = \frac{h_2}{y_2} \left(1 - \frac{1}{3} y_2 y_2'' \right) \quad (3)$$

Исходя из интеграла Бернулли и равенства давлений в обоих слоях на границе раздела получим

$$-\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 - g \rho_1 y_1 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + g \rho_2 y_2 = C \quad (4)$$

$$C = \frac{1}{2} (\rho_1 v_0^2 - \rho_2 (v_0 + \Delta v_0)^2) + g h_1 (\rho_1 - \rho_2)$$

где C — постоянная, определяемая из граничных условий. Домножая (4) на $2/v_0^2$ и вводя ρ_2^* , получим

$$\rho_1 \frac{v_1^2}{v_0^2} - \rho_2 \frac{v_2^2}{v_0^2} = \rho_1 - \rho_2^* + \frac{2g}{v_0^2} (h_1 - y_1) (\rho_1 - \rho_2), \quad \rho_2^* = \rho_2 \frac{(v_0 + \Delta v_0)^2}{v_0^2}$$

Используя (2) и (3), вводя безразмерные переменные и параметры, учитывая, что $y_2 = h_1 + h_2 - y_1$ с точностью до членов второго порядка малости относительно z , получим

$$z'' + 3\alpha z + \frac{9}{2} \gamma z^2 = 0 \quad (5)$$

$$z = -\frac{h_1 - y_1}{h_1 + h_2}, \quad \xi = \frac{x}{h_1 + h_2}, \quad m = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad \sigma = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}, \quad \sigma^* = \frac{\rho_1 - \rho_2^*}{\rho_1}$$

$$\alpha = \frac{\text{Fr} \sigma m (1 - m) - 1 + \sigma^* m}{m (1 - m) (1 - \sigma^* (1 - m))}, \quad \text{Fr}^{-1} = \frac{g (h_1 + h_2)}{v_0^2}$$

$$\gamma = \frac{1 - 2m + m^2 \sigma^*}{m^2 (1 - m)^2 (1 - \sigma^* (1 - m))} - \frac{2}{3} \frac{\sigma^*}{1 - \sigma^* (1 - m)} \alpha$$

Заметим, что z можно рассматривать как амплитуду волны. Уравнение (5) можно представить в виде эллиптического интеграла

$$\xi = \pm \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{3\gamma(z_0 - z)(z - z_1)(z - z_2)}} \quad (6)$$

Если z_1 и z_2 — кратные корни, интеграл в (6) расходится в точке $z = z_1 = z_2$ и, следовательно, $\xi = \pm \infty$ при $z = z_1 = z_2$. Имея в виду, что на бесконечности жидкость не возмущена, следует полагать, что $z_1 = z_2 = 0$.

Случаю $z_1 \neq z_2$ соответствует периодическое движение со вторым экстремумом z_1 . Рассматривая периодическое движение, выделим два случая: 1) $|z_1 - z_2| \ll |z_0|$, 2) $|z_0 - z_1| \ll |z_2|$. Как будет показано ниже, первому случаю соответствуют длинные периодические волны, а второму — волны, близкие к линейным.

Качественный анализ (6) содержится в [5]. Ниже приводится конкретный вид асимптотических выражений для течения двухслойной жидкости.

В случае кратных корней имеем уединенную волну

$$z = z_0 \text{Sech}^2 \frac{\sqrt{3\gamma z_0}}{2} \xi \quad (7)$$

Для существования кратных корней необходимо выполнение условия $\alpha/\gamma = -z_0$.

из которого можно получить выражение для числа Фруда

$$\text{Fr}^{-1} = \frac{1}{m\sigma(1-m)} \left(1 - m\sigma^* - \frac{1-2m+m^2\sigma^*}{m(1-m)} z_0 \right) \quad (8)$$

Из (7) видно, что уединенная волна существует лишь в том случае, когда выполняется условие $\gamma z_0 > 0$. Из него можно получить области существования гребня ($z_0 > 0$) и впадины ($z_0 < 0$). Для этого воспользуемся условием $\alpha/\gamma = -z_0$ и выразим γ через амплитуду z_0

$$\gamma = \frac{1-2m+m^2\sigma^*}{m^2(1-\sigma^*(1-m))(1-m)^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\sigma^*}{1-\sigma^*(1-m)} z_0 \right) \quad (9)$$

При малых амплитудах z_0 знак γ , а следовательно, и z_0 зависит только от знака трехчлена $1-2m+m^2\sigma$. Следовательно, выше кривой

$$\sigma^* = \frac{2m-1}{m^2} \quad (10)$$

Величина γ положительна и возможны волны только с положительной амплитудой $z_0 > 0$. Ниже этой кривой γ отрицательно и возможны волны только с отрицательной амплитудой $z_0 < 0$.

Из выражений (8) и (10) следует, что при $\rho_2 = 0$, $\sigma = \sigma^* = 1$ результат совпадает с решением для уединенной волны, полученным в [1]. Выражение для скорости волны при малых амплитудах совпадает с результатом, приведенным в [5]. Однако указанные там границы области существования волн с положительными и отрицательными амплитудами отличаются от (10). Указанная в [5] область существования противоречит также случаю уединенной волны из [1].

В случае периодических движений длина волны l выражается через полный эллиптический интеграл

$$\frac{l}{2} = \frac{2}{\sqrt{3\gamma}(z_0 - z_2)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k^2 = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2}$$

При $|z_1 - z_2| \ll |z_0|$, $k \rightarrow 1$, пользуясь разложением полного эллиптического интеграла, для числа Фруда получим выражение

$$\begin{aligned} \text{Fr}^{-1} = & \frac{1}{m\sigma(1-m)} \left(1 - m\sigma^* - \frac{1-2m+m^2\sigma^*}{m(1-m)} z_0 \right) + \\ & + \frac{3}{2} \frac{(1-2m+m^2\sigma^*) [1-\sigma^*(1-m)]}{\sigma\sigma^* m^3 (1-m)^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\sigma^* m^2 (1-m)}{1-\sigma^*(1-m)} z_0 \right) \exp(-l\sqrt{3\gamma} z_0) \end{aligned}$$

Оно отличается от (8) последним членом, зависящим от длины волны. При $l \rightarrow \infty$ он стремится к нулю.

При $|z_0 - z_1| \ll z_2$, $k \rightarrow \infty$, пользуясь соответствующим разложением полного эллиптического интеграла, число Фруда получим в виде

$$\begin{aligned} \text{Fr}^{-1} = & \frac{1}{\sigma m(1-m)} \left(1 - \sigma^* m + \frac{2\pi^2}{3l^2} m(1-m) [1 - \sigma^*(1-m)] \right) - \\ & - \frac{2\pi^2}{3l^2 \sigma} \sqrt{1 - \sigma^*(1-m)^2 + \frac{(1-2m+m^2\sigma^*)^2}{m^2(1-m)^2} z_0^2} \quad (11) \end{aligned}$$

Если пренебречь квадратом амплитуды, то в выражении (11) можно опустить квадратный корень и, таким образом, Fr^{-1} не будет зависеть от амплитуды.

Из (6) можно получить форму волны

$$z = z_0 \cos \left(\sqrt{3\gamma} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{z_0^2}{(\alpha/\gamma)^2} \right) \xi - \frac{1}{2\alpha/\gamma} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{z_0}{\alpha/\gamma} + \frac{z_0^2}{(\alpha/\gamma)^2} \right) \sqrt{z_0^2 - z^2} \right)$$

Так же как и в [1], ее кривизна в максимуме и минимуме различна. При $z_0 > 0$ для достаточно коротких волн кривизна в вершине меньше кривизны во впадине, а для длинных волн — наоборот.

В особом случае $\gamma = 0$, т. е. на границе областей с положительными и отрицательными амплитудами для удлиненных волн имеет место только периодическое течение и решение имеет простой вид

$$z = z_0 \cos \sqrt{3\alpha} \xi \quad (12)$$

В качестве простого примера многослойного течения рассмотрим течение, в котором кривизна верхней и нижней границы для каждого слоя одинакова, т. е. $k(x) = k_0(x)$ и, следовательно, n — ширина слоя — постоянна.

В этом случае задача также сводится к линейному уравнению

$$z'' + \alpha z = 0 \quad (13)$$

где α зависит от n_1 и n_2 — толщин соседних слоев, $h_1 v_{01}$ и $h_2 v_{02}$ — расходов жидкости в этих слоях и их плотностей ρ_1 и ρ_2 .

Если эти величины подобраны так, что α одинакова для любой пары прилегающих слоев, то решение уравнения (13) имеет вид, аналогичный (12), т. е. все границы между слоями будут иметь вид одинаковых косинусоид.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. с. 398–403.
2. *Якимов Ю. Л.* О приближенной формуле для растяжения при конформном отображении области, имеющей узкий участок. — Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 6, с. 956–960.
3. *Якимов Ю. Л.* О неустановившихся движениях несжимаемой жидкости в узких областях. — Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 6, с. 1080–1083.
4. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
5. *Букреев В. И., Гаврилов Н. В.* Экспериментальное исследование уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости. — ПМТФ, 1983, № 5, с. 51–56.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1985

УДК 533.6+532.5

ВЛИЯНИЕ ВДУВА НА СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА ЗАПЫЛЕННЫМ ГАЗОМ

ГОЛОВАЧЕВ Ю. П., ШМИДТ А. А.

Одной из основных проблем, возникающих при проектировании высокоскоростных летательных аппаратов, является защита обтекаемых поверхностей от эрозионного воздействия твердых частиц и капелек, находящихся в набегающем потоке. Для этой цели может быть использован вдув холодного газа, приводящий к образованию пристеночного слоя с высокой плотностью, в котором происходит торможение частиц [1]. В настоящей работе на примере сверхзвукового обтекания сферы исследуется эффективность такого способа защиты от эрозии.

1. Для широкого диапазона условий полета усредненная по объему плотность включений много меньше плотности газа. Поэтому параметры газовой фазы рассчитываются без учета присутствия примеси.

Задача сверхзвукового обтекания затупленного тела при вдуве через его поверхность решается в рамках двухслойной модели [2]. Предполагается наличие перед обтекаемым телом двух слоев идеального совершенного газа, разделенных контактной поверхностью. В одном из них течет газ, поступающий через поверхность тела, в другом — газ, прошедший через головную ударную волну. В обоих слоях течение описывается системой уравнений Эйлера.

Значения газодинамических функций за головной ударной волной определяются из соотношений Ренкина — Гюгонно. На контактной поверхности используются условия непротекания и равенства давлений. На поверхности тела задаются обе компоненты скорости вдуваемого газа и его температура. На осевой линии используются условия симметрии, а на луче, ограничивающем расчетную область вниз по потоку, — приближенные условия вида $\partial^2 f / \partial s^2 = 0$, где f — любая из искомых функций, s — расстояние от передней критической точки, отнесенное к радиусу сферы.

Численные решения рассматриваемой задачи в указанной постановке были получены ранее в [2, 3]. Метод, используемый в настоящей работе, основан на применении неявной разностной схемы [4] и в основном совпадает с изложенным в [3]. Распределение давления на контактной поверхности задается формулой Ньютона. Это дополнительное предположение обеспечивает возможность независимого определения положения контактной поверхности и поля газодинамических функций в слое вдува. Затем решается задача сверхзвукового обтекания непроницаемого тела, форма которого совпадает с формой контактной поверхности, найденной на первом этапе. Решение двух указанных задач полностью определяет поле газодинамических