МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1986

УДК 532.51.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЕВОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

АНДРЕЕВ В. К.

Найдено точное решение уравнений идеальной несжимаемой жидкости, описывающее неустановившееся вихревое течение плоского слоя со свободными границами. В случае постоянной завихренности изучена задача об устойчивости по линейному приближению. Вычислены асимптотики свободных границ слоя при $t\to\infty$. Показано, что вихрь основного движения стабилизирует границы слоя.

1. Описание основного движения. Рассмотрим систему уравнений Эйлера плоского течения идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил

$$\mathbf{u}_t'+\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}+\frac{1}{\rho}\nabla p=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}=(u_1(x,\ y,\ t),\ u_2(x,\ y,\ t))$ — вектор скорости, $p(x,\ y,\ t)$ — давление, $\rho=\mathrm{const}$ — плотность жидкости.

Пусть H — двухпараметрическая группа с базисными операторами $\partial/\partial x$, $t\partial/\partial x+\partial/\partial u_1$. Группа H является подгруппой наиболее широкой группы G, допускаемой уравнениями Эйлера (1.1). Она вычислена в [1] для трехмерной системы. Полный набор инвариантов H имеет вид: $I_1=u_2$, $I_2=p$, $I_3=t$, $I_4=y$. Поскольку ранг матрицы $(\partial I_i/\partial u_j)$ равен двум ($i=1-4$; $j=1-3$, $u_3=p$), то необходимое условие существования инвариантного H-решения не выполняется [2]. Однако существуют частично инвариантные решения относительно H. Они имеют вид $u_1=u_1(x,\ y,\ t)$, $u_2=u_2(y,t)$, $p=p(y,\ t)$. Из уравнения неразрывности следует, что u_1 есть линейная функция x. Положим $u_1=xf(y,\ t)+u(y,\ t)$. Подставляя в (1.1), получим систему, связывающую лишь инварианты группы H

$$f_t'+u_2f_y'+f^2=0,\ u_t'+u_2u_y'+fu=0 \tag{1.2}$$

$$u_{2t}'+u_2u_{2y}'+\frac{1}{\rho}p_y'=0,\qquad f+u_{2y}'=0$$

Сформулируем для системы (1.2) задачу со свободной границей. Для этого необходимо предположить, что свободная поверхность жидкости есть инвариантное многообразие группы H в пространстве $(x,\ y,\ t)$ [2]. Общий вид такого многообразия есть $F(y,\ t)=0$, или $y=l(t)$ — прямая, параллельная оси x (исключаются поверхности $t=\mathrm{const}$, не представляющие физического интереса). Условия на свободной границе и начальные условия в терминах инвариантов имеют вид

$$\frac{dl}{dt}=u_2(l(t),t),\qquad p=0 \tag{1.3}$$

$$f=f_0(y),\quad u=u_0(y),\quad u_2=u_{20}(y),\quad l=l_0=\mathrm{const},\quad f_0=-\frac{\partial u_{20}}{\partial y} \tag{1.4}$$

Систему (1.2) можно проинтегрировать. Для этого введем лагранжевы координаты (ξ, η, t) с помощью решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=u_1(x,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=u_2(y,t),\quad x=\xi,\quad y=\eta\quad (t=0) \tag{1.5}$$

Обозначая $f(y,\ t)=a(\eta,\ t)$, в силу (1.5) и первого уравнения системы (1.2) имеем $a_t+a^2=0$, интегрирование которого с учетом (1.4) дает

$$a(\eta,t)=\frac{f_0(\eta)}{1+f_0(\eta)t} \tag{1.6}$$

Поскольку $\partial/\partial y=(y_\eta)^{-1}\partial/\partial\eta$, то из (1.5), (1.6) и равенства $f=-u_{2y}'$ получим

$$y=\int\limits_d^\eta\frac{dz}{1+f_0(z)t},\qquad d=\mathrm{const} \tag{1.7}$$

Из (1.7) дифференцированием по t находится u_2, а из системы (1.2) с учетом граничного условия (1.3) определяется давление

$$p=2\rho\int\limits_\eta^{l_0}\frac{1}{1+f_0(z)t}\int\limits_d^z f_0^2(\mu)\,\frac{d\mu\,dz}{[1+f_0(\mu)t]^3} \tag{1.8}$$

Если $b(\eta,\ t)=u(y,\ t)$, то $b_t'+fb=0$. Откуда

$$b(\eta,t)=\frac{u_0(\eta)}{1+f_0(\eta)t} \tag{1.9}$$

Из первого уравнения (1.5) и (1.6), (1.9) определяется $x(\xi,\ \eta,\ t)$

$$x=[1+f_0(\eta)t]\xi+u_0(\eta)t \tag{1.10}$$

Уравнение свободной границы: $l(t)=y(l_0)$, где $y(l_0)$ определено (1.7).

Полученное точное частично инвариантное решение нелинейных уравнений Эйлера интерпретируется как неустановившееся движение плоского слоя со свободной границей $y=l(t)$ и твердой стенкой $y=d$ (далее d принимается равным нулю). Это движение является вихревым, так как, согласно (1.7), (1.10), $\omega=-u_{1y}'=-\xi f_0'(\eta)-u_0'(\eta)\neq0$. Движение потенциальное, когда $f_0'=u_0'=0$. Такое движение при $u_0\equiv0$, $f_0=k=\mathrm{const}$ рассматривалось в [3, 4]. С ростом времени t и $f_0(\eta)>0$ слой утоньшается и $l(t)\to0$ при $t\to\infty$, а для $f_0(\eta)<0$ существует момент времени t_* такой, что $l(t_*)=\infty$. Если $f_0(\eta)$ — четная функция, то, как следует из (1.7), (1.8), прямую $y=-l(t)$ можно принять за вторую свободную границу.

Далее будет рассматриваться движение слоя с постоянной завихренностью ω при $f_0=k=\mathrm{const}$. Соответствующее решение описывается формулами

$$\begin{gathered}u_1=\frac{kx}{1+kt}-\omega y,\qquad u_2=-\frac{ky}{1+kt}\\ p=\frac{\rho k^2}{(1+kt)^4}[l_0^2-(1+kt)^2y^2]\\ x=(1+kt)\xi-\omega t\eta,\qquad y=\frac{\eta}{1+kt}\end{gathered} \tag{1.11}$$

Прямые линии $y=\pm l_0/(1+kt)$ являются свободными границами для решения (1.11).

2. Уравнения малых возмущений. Пусть $\mathbf{u}, p$ — вектор скорости и давление жидкости, которая на момент времени t занимает область D_t со свободной границей Γ_t. Если $\mathbf{U}$, P — возмущения скорости и давления, то задача об эволюции малых возмущений неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами описывается системой [5]

$$M^{*}(\mathbf{U}_t+M^{-1}\mathbf{U}\nabla\mathbf{u})+\frac{1}{\rho}\nabla P=0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} M^{-1}\mathbf{U}=0,\ \xi\in D=D_t\ \ (t=0) \tag{2.2}$$

$$P+\left[\frac{\partial p}{\partial n_{\Gamma t}}+\sigma\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)\right]R+\sigma\Delta_\Gamma R=0 \tag{2.3}$$

$$R=b\int_0^t \mathbf{n}_\Gamma M^{-1}\mathbf{U}\,dt,\qquad b(\xi,t)=\frac{|\nabla F|}{|M^{*-1}\nabla F|},\qquad \xi\in\Gamma \tag{2.4}$$

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}_0,\ \operatorname{div}\mathbf{U}_0=0\ \ (t=0) \tag{2.5}$$

Здесь ξ — лагранжевы координаты; M — матрица Якоби отображения $\xi\to\mathbf{x}(\xi,t)$, $\xi\in D$; M^*, M^{-1} — матрицы транспортирования и обратная к M; $\mathbf{n}_{\Gamma t}$, $\mathbf{n}_\Gamma$ — единичные векторы нормалей к свободным границам Γ_t и Γ; $\sigma\geqslant 0$ — коэффициент поверхностного натяжения; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны нормальных сечений Γ_t; Δ_Γ — оператор Лапласа — Бельтрами Γ_t, записанный в лагранжевых координатах; $F(\xi)=0$ — уравнение поверхности Γ. Величина $R(\xi,t)$, $\xi\in\Gamma$, описывает поведение возмущения свободной границы и является основной при изучении устойчивости.

Для потенциальных внешних массовых сил уравнение (2.1) интегрируется в виде [5]

$$\begin{gathered}\mathbf{U}=M\frac{\partial}{\partial t}\left[M^{-1}V\int_0^t V^{-1}M^{*-1}(\mathbf{U}_0+\nabla\Phi)\,d\tau\right]\\ \Phi=-\frac{1}{\rho}\int_0^t P\,dt\end{gathered} \tag{2.6}$$

где Φ — возмущение потенциала Вебера, а матрица V есть решение задачи Коши

$$V_t=\left(\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{x})}\right)^{*}V,\qquad V=E\ \ (t=0) \tag{2.7}$$

Тем самым задача (2.1)—(2.5) сводится к задаче об отыскании одной функции $\Phi(\xi,t)$. В работе [5] доказана ее однозначная разрешимость при $\sigma>0$. При отсутствии поверхностного натяжения условие ее корректности эквивалентно неравенству $\partial p/\partial\mathbf{n}_{\Gamma t}<0$ [6].

При изучении устойчивости конкретных вихревых неустановившихся движений необходимо дополнительно определять матрицу V из уравнения (2.7). (Если основное движение является потенциальным, то $V\equiv M$ и все уравнения существенно упрощаются). Соответствующее уравнение для искомой функции Φ, как нетрудно видеть из (2.6), (2.2), будет очень сложным, а определение асимптотики роста малых возмущений становится затруднительной задачей.

Пусть $\mathbf{\Omega}$ — вихрь возмущения скорости $\mathbf{U}$. Из уравнений (2.1), (2.2) можно вывести соотношения

$$\begin{gathered}\mathbf{\Omega}+M\operatorname{rot}(M^{-1}\boldsymbol{\omega}\times M^{-1}\mathbf{X})=M\mathbf{\Omega}_0\\ \operatorname{div} M^{-1}\mathbf{\Omega}=0,\ \operatorname{div} M^{-1}\mathbf{X}=0\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{X}=M\int_0^t M^{-1}\mathbf{U}\,dt$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вихрь скорости $\mathbf{u}$ основного движения, $\boldsymbol{\Omega}_0$ — вихрь начального возмущения скорости $\mathbf{U}_0$. Система уравнений (2.2), (2.8) относительно компонент вектора скорости U_1, U_2, U_3 может оказаться более предпочтительней для анализа. В частности, для плоских движений, когда $\boldsymbol{\omega}=(0,\ 0,\ \omega)$, $\boldsymbol{\Omega}=(0,\ 0,\ \Omega)$, из (2.8) следует уравнение

$$\Omega+\operatorname{div}(\omega M^{-1}\mathbf{X})=\Omega_0 \tag{2.9}$$

где под M и $\mathbf{X}$ следует понимать уже двумерную матрицу и двумерный вектор.

В случае потенциальных внешних массовых сил имеет место формула Коши для вихря скорости [7] $\boldsymbol{\omega}=M\boldsymbol{\omega}_0$. Линеаризация этого соотношения на произвольном гладком основном движении приводит к равенству (2.8) для возмущения вихря скорости. Кроме того, для плоских движений из него следует сохранение со временем завихренности в частице, так что в (2.10) можно заменить ω на $\omega_0(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi,\ \eta)\in D$.

Для основного решения (1.11) область D есть плоский слой $-\infty<\xi<\infty$, $-l_0<\eta<l_0$ со свободными границами $\eta=\pm l_0$. Введем новые независимые безразмерные переменные и функции

$$\tau=1+kt,\qquad \alpha=\frac{\xi}{l_0},\qquad \beta=\frac{\eta}{l_0},\qquad \mu=\frac{\omega}{k},\qquad (k>0)$$

$$U=\frac{\tau U_1}{l_0k},\qquad V=\frac{U_2}{\tau l_0k},\qquad Q=\frac{P}{\rho l_0^2k^2}$$

После подстановки в (2.2)—(2.5), (2.9) получим уравнения, описывающие эволюцию малых возмущений решения (1.11)

$$\frac{1}{\tau^2}U_\alpha'+\mu\tau(\tau-1)V_\alpha'+\tau^2V_\beta'=0 \tag{2.10}$$

$$V_\alpha-\frac{\mu(\tau-1)}{\tau}U_\alpha'-U_\beta'=\Omega_0(\alpha,\beta) \tag{2.11}$$

$$|\alpha|<\infty,\quad |\beta|<1,\quad \tau\geqslant1$$

$$Q\pm\frac{\mathrm{We}}{\tau^3}\int_1^\tau \tau^2V_{\alpha\alpha}''\,d\tau\mp\frac{2}{\tau^4}\int_1^\tau\tau^2V\,d\tau=0,\qquad \beta=\pm1,\qquad \tau\geqslant1$$

$$\mathrm{We}=\frac{\sigma}{\rho k l_0^3},\qquad \Omega_0=\frac{\partial V_0}{\partial\alpha}-\frac{\partial U_0}{\partial\beta} \tag{2.12}$$

Здесь We есть число Вебера, Ω_0 — начальный вихрь возмущения. Нормальная составляющая вектора возмущений определяется, согласно (2.4), равенством

$$R=\pm\frac{l_0}{\tau}\int_1^\tau\tau^2V\,d\tau,\qquad \beta=\pm1 \tag{2.13}$$

В граничных условиях (2.12) путем дифференцирования их по α и замены Q_α' из уравнения (2.1) можно исключить давление. После промежуточных преобразований имеем вместо (2.12) соотношения

$$\mu\tau^2V-U_\alpha\pm\frac{\mathrm{We}}{\tau^3}\int_1^\tau\tau^2V_{\alpha\alpha\alpha}'''\,d\tau\mp\int_1^\tau\tau^2V_\alpha'\,d\tau=0,\qquad \beta=\pm1 \tag{2.14}$$

Систему уравнений (2.10)—(2.11) с граничными условиями (2.14) необходимо дополнить начальными условиями при $\tau=1$

$$U=U_0(\alpha,\beta),\qquad V=V_0(\alpha,\beta),\qquad \frac{\partial U_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial V_0}{\partial\beta}=0 \tag{2.15}$$

3. Асимптотическое поведение решения. Исключение функции U из уравнений (2.12), (2.13), (2.16) приводит к задаче для одной неизвестной функции $V(\alpha,\beta,\tau)$

$$\tau^4 V_{\beta\beta}''+2\mu\tau^3(\tau-1)V_{\alpha\beta}+[1+\mu^2\tau^2(\tau-1)^2]V_{\alpha\alpha}''=\Omega_{0\alpha}''$$
$$|\alpha|<\infty,\quad |\beta|<1,\quad \tau\geqslant 1 \tag{3.1}$$

$$\mu\tau^2 V_\alpha'+[\mu\tau^3(\tau-1)V_\alpha+\tau^4 V_\beta]_\tau\pm\frac{\mathrm{We}}{\tau^3}\int_1^\tau \tau^2 V_\alpha^{(4)}\,d\tau\mp$$

$$\mp\frac{2}{\tau^4}\int_1^\tau \tau^2 V_{\alpha\alpha}''\,d\tau=0,\qquad \beta=\pm1,\qquad \tau\geqslant 1 \tag{3.2}$$

$$V=V_0(\alpha,\beta)\quad(\tau=1) \tag{3.3}$$

При исследовании устойчивости будем считать функции Ω_0, V_0, V периодическими по α с периодом h. Положим для одной гармоники

$$(\Omega_0, V_0, V)=(\Psi(\beta),\Phi(\beta),W(\beta,\tau))e^{in\alpha},\qquad n=\frac{n_1\pi l_0}{h}\quad(n_1=1,2,\dots)$$

где функция $W(\beta,\tau)$ определяется из (3.1)

$$W(\beta,\tau)=C_1(\tau)e^{\lambda_1\beta}+C_2(\tau)e^{\lambda_2\beta}+\frac{i}{2\tau^2}\int_{-1}^{\beta}[e^{-\lambda_1(\beta-z)}-e^{\lambda_2(\beta-z)}]\Psi(z)\,dz \tag{3.4}$$

$$\lambda_1=\frac{n}{\tau^2}-i\mu n\frac{(\tau-1)}{\tau},\qquad \lambda_2=-\frac{n}{\tau^2}-i\mu n\frac{(\tau-1)}{\tau} \tag{3.5}$$

Вместо неизвестных $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ удобно ввести новые неизвестные функции. Вычислив с помощью (3.4) W_β' при $\beta=\pm1$ из соотношений (3.2), после довольно длинных преобразований получим систему уравнений относительно новых неизвестных функций $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$, связанных с $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ соотношениями (3.6)

$$B_1(\tau)=\int_1^\tau \tau^2 W(1,\tau)\,d\tau,\qquad B_2(\tau)=\int_1^\tau \tau^2 W(-1,\tau)\,d\tau \tag{3.6}$$

$$\left[\operatorname{cth}\gamma B_1'-\frac{e^{\lambda_1+\lambda_2}}{\operatorname{sh}\gamma}B_2'\right]'+i\mu B_1'+qB_2=-(\tau^4 g)' \tag{3.7}$$

$$\left[\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{\operatorname{sh}\gamma}B_1'-\operatorname{cth}\gamma B_2'\right]'+i\mu B_2'-qB_2=\left[\frac{\tau^2 e^{-\lambda_2-\lambda_2}}{\operatorname{sh}\gamma}f\right]'$$

$$\gamma=\frac{2n}{\tau^2}$$

$$B_1(1)=B_2(1)=0,\quad B_1'(1)=\Phi(1),\quad B_2'(1)=\Phi(-1) \tag{3.8}$$

$$g(\tau)=-\frac{i}{2\tau^4\operatorname{sh}\gamma}\int_{-1}^{1}(e^{\lambda_2-\lambda_1 z}-e^{\lambda_1-\lambda_2 z})\Psi(z)\,dz$$

$$f(\tau)=\frac{i}{2\tau^2}\int\limits_{-1}^{1}[e^{\lambda_1(1-z)}-e^{\lambda_2(1-z)}]\Psi(z)\,dz \tag{3.9}$$

$$q=\frac{n^3\,\mathrm{We}}{\tau^3}+\frac{2n}{\tau^4}$$

В системе (3.7) штрих означает дифференцирование по τ.

Пользуясь формулами (3.5), (3.9), покажем, что коэффициенты системы (3.7) имеют при $\tau\to\infty$ степенные особенности. Именно при $\tau\to\infty$ асимптотическое поведение B_1, B_2 такое же, как и у функций B_1^*, B_2^*, удовлетворяющих системе

$$B_1^{*\prime\prime}=i\mu B_1^{*\prime}+i\mu e^{-2\mu i n}B_2^{*\prime}-\frac{\tau^2}{2n}qB_1^*-\frac{\tau^2}{2n}e^{-2\mu i n}qB_2^*-A$$

$$B_2^{*\prime\prime}=i\mu e^{2\mu i n}B_1^{*\prime}+i\mu B_2^{*\prime}-\frac{\tau^2}{2n}e^{2\mu i n}qB_1^*-\frac{\tau^2}{2n}qB_2^*-e^{2\mu i n}A$$

$$A=-\frac{\mu}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-z)\Psi(z)\,dz=\mathrm{const}$$

Из последней системы легко найти поведение B_1^*, B_2^* при $\tau\to\infty$

$$B_1^*\sim b_1\tau+b_2e^{2\mu i\tau}+b_3,\quad B_2^*\sim d_1\tau+d_2e^{2\mu i\tau}+d_3 \tag{3.10}$$

с некоторыми постоянными b_j, d_j, $j=1$, 2, 3. Ограничиваясь одной гармоникой, из (2.13) и (3.10) заключаем, что $|R|<\infty$ при $\tau\to\infty$. Этот вывод не зависит от влияния сил поверхностного натяжения. Если в системе (3.7) положить $\mu=0$, $f=g=0$, т. е. рассматривать потенциальные возмущения потенциального основного течения ($\omega=0$ в формулах (1.11)), то нетрудно показать, что $R\sim\tau$ при $\tau\to\infty$, когда $\mathrm{We}=0$, и $R\sim\tau^{1/4}\exp(2in\sqrt{\mathrm{We}}\tau^{1/2})$ при $\tau\to\infty$, когда $\mathrm{We}\neq0$ (см. [8]). Таким образом, вихрь основного течения ограничивает рост амплитуд возмущений. Стабилизирующее влияние вращения жидкости на устойчивость свободных границ отмечалось также в [9, 10].

Предположим, что прямая $\beta=0$ ($y=0$) — непроницаемая твердая стенка. Тогда на ней $R=0$ и вместо системы (3.7) будем иметь одно уравнение

$$\left[\mathrm{cth}\left(\frac{n}{\tau^2}\right)B_1'\right]'+i\mu B_1'+qB_1=-(\tau^4g)'$$

$$g=-\frac{ie^{\lambda_1+\lambda_2}}{\tau^4(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2})}\int\limits_0^1[e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}]\Psi(z)\,dz$$

Легко показать, что $B_1\sim b_1/\tau+b_2$, b_1, $b_2=\mathrm{const}$ при $\tau\to\infty$. Значит $R\sim1/\tau$ при $\tau\to\infty$, что означает устойчивость. В этом случае при $\tau\to\infty$ жидкость прижимается к стенке $y=0$ и это стабилизирует свободную границу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бучнев А. А.* Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости.– В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 7. Новосибирск, 1971, с. 212–214.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
3. *Кузнецов В. М., Шер Е. Н.* Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце.– ПМТФ, 1964, № 2, с. 66–73.

4. *Овсянников Л. В.* Общие уравнения и примеры.– В кн.: Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1967, с. 5–75.
5. *Андреев В. К.* Малые возмущения неустановившегося движения жидкости со свободной границей с учетом капиллярных сил.– В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 32. Новосибирск, 1977, с. 11–26.
6. *Андреев В. К.* Вихревые возмущения неустановившегося движения жидкости со свободной границей.– ПМТФ, 1975, № 5, с. 58–68.
7. *Серрин Д.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
8. *Андреев В. К.* Влияние капиллярности и начальной завихренности на устойчивость движения жидкости.– В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 52. Новосибирск, 1981, с. 3–10.
9. *Меньшиков В. М.* О малых возмущениях неустановившихся одномерных движений идеальной несжимаемой жидкости с осевой симметрией.– ПМТФ, 1979, № 2, с. 14–20.
10. *Козин Н. С.* Об устойчивости плоского полого вихря.– ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 60–64.

Красноярск

Поступила в редакцию
4.III.1985