

УДК 533.6.011.72:536.2

**НЕКОТОРЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ЭКЗОТЕРМИЧЕСКИХ  
РЕАКЦИЙ**

ЛЕЙБЕНЗОН А. С.

Процессы, происходящие в плазме, созданной в результате взаимодействия мощных потоков излучения с веществом, можно разбить на три этапа: поглощение излучения на границе вещества, последующие нагрев и сжатие центральной части мишени с целью создания условий, необходимых для иницирования экзотермической реакции и, наконец, распространение волны экзотермической реакции по окружающему веществу. Настоящая работа посвящена исследованию последнего этапа — волны реакции, поджигающей первоначально холодное вещество. Основным методом теоретического исследования описанных процессов является численное решение уравнений движения двухтемпературного газа с учетом физических процессов, протекающих в полностью ионизованной среде: электронной теплопроводности, потерь на излучение, обмена энергией между электронами и ионами и др. В связи со сложным нелинейным характером системы уравнений в частных производных, описывающих процесс, представляют интерес поиски возможных автомодельных решений. Эти решения можно использовать в качестве тестов при проведении расчетов полной системы уравнений; с их помощью также удается исследовать асимптотические законы распространения волн экзотермической реакции.

Автомодельные решения задач нелинейной теплопроводности без учета выделения энергии за счет экзотермических реакций рассмотрены в работах [1, 2]. В этих работах исследованы различные режимы распространения тепловых волн, образованных в результате поглощения на границе потока излучений. В работе [3] рассмотрена автомодельная задача об иницировании волны горения в смеси Д+Т. В ней изучены различные механизмы распространения волн горения и указаны соответствующие каждому механизму автомодельные решения.

1. В дальнейшем будем считать, что вещество представляет собой полностью ионизованную плазму, электронная и ионная компоненты которой являются совершенными газами. Перенос тепла от нагретой части вещества к холодной осуществляется за счет электронной теплопроводности. Учитываются также потери на тормозное излучение, при этом считается, что поглощение выделившейся за счет излучения энергии происходит за пределами нагретой области. Предполагается, что энергия, выделяющаяся за счет экзотермической реакции, поглощается локально. Это предположение выполняется в том случае, когда нагретая область не очень мала. Как будет показано ниже, только в этом случае существуют автомодельные решения поставленной задачи.

Основная система уравнений, описывающая указанный процесс, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + R \frac{\partial (T_e + zT_i)}{\partial r} + R \frac{T_e + zT_i}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} &= 0 \\ \frac{R\rho}{\gamma - 1} \left( \frac{\partial T_e}{\partial t} + v \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) - RT_e \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\beta Q) + v \frac{\partial}{\partial r} (\beta Q) \right] + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial W_e}{\partial r} + A \rho^2 T_e^{1/2} + Q_{ei} \rho = 0 \quad (1.1) \\
& \frac{R\rho}{\gamma-1} \left( \frac{\partial T_i}{\partial t} + v \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) - RT_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + Q_{ie} \rho = 0 \\
& \frac{\partial \beta}{\partial t} + v \frac{\partial \beta}{\partial r} = -k_i \beta^\alpha \rho^{z_1} T_i^s \exp \left( -\frac{E}{RT_i} \right) \\
& W_e = -r^\nu \kappa_e T_e^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial r}, \quad Q_{ei} = \frac{C\rho(T_i - T_e)}{T_e^{3/2}}
\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $t$  — время,  $r$  — пространственная координата,  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость,  $T_e$  и  $T_i$  — электронная и ионная температуры соответственно,  $R$  — газовая постоянная,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $z$  — заряд,  $\beta$  — концентрация непрореагировавшего вещества,  $Q$  — количество энергии, выделяемой в результате сгорания единицы массы вещества,  $W_e$  — поток тепла за счет электронной теплопроводности,  $\kappa_e$  — коэффициент электронной теплопроводности,  $A$  — коэффициент, определяющий потери энергии за счет тормозного излучения,  $E$  — энергия активации,  $\alpha$  — порядок реакции,  $\nu=0, 1, 2$  — в плоском, осесимметричном и сферическом случаях соответственно,  $z_1$  и  $s$  — некоторые константы,  $Q_{ei} = -Q_{ie}$  — член, определяющий обмен энергией между электронами и ионами.

Пусть в начальный момент времени  $t=0$  в некоторой области пространства  $|r| \leq r_0$  температура  $T_e$  равна  $T_H$ , а в окружающей части пространства  $|r| > r_0$  равна нулю;  $T_i$  всюду равна нулю; газ в начальный момент времени покоится ( $v(r, 0) = 0$ ), а плотность его зависит от пространственной координаты по закону  $\rho(r, 0) = dr^{-\omega}$ . Так как реакция еще не началась,  $\beta(r, 0) = 1$ . Энергия, подводимая к газу в начальный момент времени с целью возбуждения волны экзотермической реакции

$$E_N = \frac{R}{\gamma-1} \sigma_\nu \int_0^\infty \rho T_e r^\nu dr, \quad \sigma_\nu = 2\pi\nu + (\nu-1)(\nu-2)$$

В дальнейшем полагается  $z=1$  (водородоподобная плазма). Значения констант, входящих в систему уравнений (1.1), можно найти в работах [4, 5].

С учетом сделанных выше предположений будем искать автомодельные решения системы уравнений (1.1). Как показывает анализ, такие решения существуют при выполнении следующих условий:  $\omega=1$ ,  $z_1=1$ ,  $E_N=0$ . Следует отметить, что скорости реакций синтеза, протекающих в высокотемпературной плазме, например реакции  $D + T$ , удовлетворяют условию  $z_1=1$ . Наиболее существенным является третье условие. Очевидно, что если  $E_N=0$ , инициировать волну реакции нельзя. Следовательно, полученные автомодельные решения будут справедливы на той стадии процесса, когда начальной энергией  $E_N$  можно пренебречь по сравнению с энергией, выделившейся в результате экзотермической реакции, т. е. такие решения описывают развитую стадию процесса горения.

Такие же условия автомодельности были получены при изучении течений в однотемпературном случае без учета потерь на излучение. Как видим, учет обмена энергией между электронами и ионами и излучения не вносит новых ограничений.

Переход к безразмерным величинам осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
v(r, t) &= Bv_1(\tau), \quad \rho(r, t) = \rho_* t^{-1} \rho_1(\tau) \\
T_{e,i}(r, t) &= T_* T_{e,i}(\tau), \quad \beta(r, t) = \beta_1(\tau)
\end{aligned}$$

$$\rho_* = \frac{d}{pB}, \quad T_* = \frac{Q}{R}, \quad B = \frac{\kappa_e}{dR} T_*^{3/2}$$

После перехода к безразмерному виду единственной независимой безразмерной переменной будет величина  $\tau = r/(pBt)$ , где  $B$  — параметр с размерностью скорости,  $p$  — некоторая постоянная, смысл которой будет определен ниже. Из этого соотношения видно, что скорости распространения фронтов будут постоянными.

После некоторых преобразований получим следующую безразмерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и граничные условия при  $\tau \rightarrow \infty$  (так как в дальнейшем речь будет идти только о безразмерных функциях, индекс 1 опускаем):

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho \frac{(v-p\tau)(p-\nu v/\tau) + \pi_1(T_e' + zT_i')}{(v-p\tau)^2 - \pi_1(T_e + zT_i)} \\ v' &= -\pi_1 \frac{(v-p\tau)(T_e' + zT_i') + (p-\nu v/\tau)(T_e + zT_i)}{(v-p\tau)^2 - \pi_1(T_e + zT_i)} \\ \beta' &= \frac{\pi_2 \beta^\alpha \rho T_i^s \exp(\pi_3 T_i^{m-1})}{p\tau - v} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} \frac{d}{d\tau} \left( \tau^2 T_e^{3/2} \frac{dT_e}{d\tau} \right) &= \frac{\rho T_e'}{\gamma - 1} (v - p\tau) + T_e p \rho - \\ &- T_e \rho' (v - p\tau) + \beta' \rho (v - p\tau) + \pi_4 T_e^{1/2} \rho^2 + \pi_5 T_e^{-3/2} \rho^2 (T_e - T_i) \\ \frac{\rho T_i'}{\gamma - 1} (v - p\tau) &+ T_i p \rho - T_i \rho' (v - p\tau) + \pi_5 T_e^{-3/2} \rho^2 (T_i - T_e) = 0 \end{aligned}$$

$$T_e = T_i = v = W_e = 0; \quad \rho = \beta = 1$$

$$\pi_1 = \frac{RT_*}{B^2}, \quad \pi_2 = \frac{k_1 dT_*^s}{B}, \quad \pi_3 = -\frac{E}{R} T_*^{m-1}$$

$$\pi_4 = \frac{Ad}{T_*^{1/2} RB}, \quad \pi_5 = \frac{Cd}{BRT_*^{3/2}}$$

Как обычно, в задачах нелинейной теплопроводности существует точка  $\tau = \tau_s$ , в которой температура обращается в нуль. С помощью подбора параметра  $p$  положим  $\tau_s = 1$ . Далее,  $v = 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Граничное условие для потока тепла за счет электронной теплопроводности при  $\tau \rightarrow 0$  зависит от того, какая решается задача. Так, если речь идет о распространении самоподдерживающейся волны, то

$$W_e = \tau^\nu T_e^{3/2} \frac{dT_e}{d\tau} = 0 \quad (\tau \rightarrow 0)$$

Должен выполняться закон сохранения энергии, который в момент времени  $t_1$  в размерном виде выглядит так

$$\begin{aligned} \sigma_\nu \int_0^\infty \rho \left( \frac{R(T_e + zT_i)}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2} \right) r^\nu dr &= E_N + \\ + \sigma_\nu \int_0^\infty \rho Q (1 - \beta) r^\nu dr &- \sigma_\nu \int_0^{t_1} \left( \int_0^\infty A \rho^2 T_e^{1/2} r^\nu dr \right) dt \end{aligned}$$

Третье условие автомодельности состоит в том, что

$$E_N \ll \sigma_v \int_0^{\infty} \rho Q (1-\beta) r^v dr$$

После перехода к автомодельным переменным, учитывая условие  $E_N = 0$ , получим

$$\int_0^1 \rho \left( \frac{T_e + zT_i}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2\pi_1} \right) \tau^v d\tau = \int_0^1 \rho (1-\beta) \tau^v d\tau - \frac{\pi_4}{v} \int_0^1 \rho^2 T_e^{1/2} \tau^v d\tau$$

Закон сохранения массы в безразмерном виде будет

$$\int_0^1 \rho \tau^v d\tau = \frac{1}{v}$$

В плоском случае ( $v=0$ ) интеграл расходится.

2. Рассмотрим предельный случай  $\pi_1=0$ , т. е.  $B^2 \gg RT_*$ . Физический смысл этого соотношения состоит в том, что перенос энергии за счет теплопроводности много больше гидродинамического переноса. Именно такая картина имеет место для реакции  $D + T$  в предположении, что вся выделившаяся энергии вновь поглощается плазмой [6].

В случае  $\pi_1=0$  система (1.2) упрощается и сводится к системе, описывающей распространение тепла в покоящемся газе. После преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} v(\tau) &= 0, \quad \rho(\tau) = \frac{1}{\tau} \\ \beta' &= \frac{\pi_2 \beta^\alpha T_i^s \exp(\pi_3 T_i^{m-1})}{\rho \tau^2} \\ \frac{dT_i}{d\tau} &= \frac{(\gamma-1)\pi_5}{\rho \tau^2} T_e^{-1/2} (T_i - T_e) \\ \frac{1}{\tau^2} \frac{d}{d\tau} \left( \tau^2 T_e^{s/2} \frac{dT_e}{d\tau} \right) &= -p \left[ \frac{T_e'}{\gamma-1} + \beta' - \frac{\pi_4 T_e^{1/2}}{\rho \tau^2} - \frac{\pi_5 T_e^{-1/2}}{\rho \tau^2} (T_e - T_i) \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Приведем значения констант, входящих в систему (2.1) в случае реакции  $D+T$ :  $\alpha=2$ ,  $s=-2/3$ ,  $m=2/3$ .

Закон сохранения энергии в этом предельном случае имеет следующий вид:

$$\int_0^1 \frac{T_e + zT_i}{\gamma-1} \tau^{v-1} d\tau = \int_0^1 (1-\beta) \tau^{v-1} d\tau - \frac{\pi_4}{v} \int_0^1 T_e^{1/2} \tau^{v-2} d\tau$$

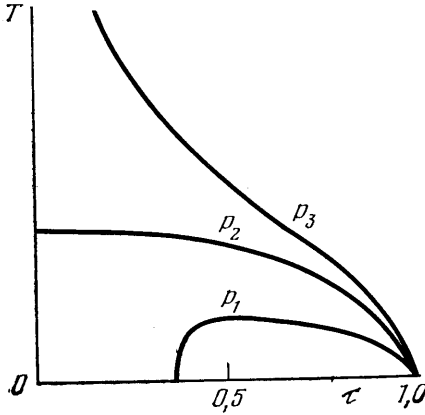
Исследуем асимптотическое поведение решений системы уравнений (2.1) вблизи фронта волны ( $\tau=1$ ). Из граничных условий  $T_e(1)=0$ ,  $T_i(1)=0$ . В силу непрерывности в окрестности фронта температуры будут малы и, следовательно, выделением энергии за счет экзотермической реакции в этой области можно пренебречь. В этих условиях имеем следующее решение, описывающее поведение интегральных кривых системы (2.1) в окрестности фронта волны:

$$T_e = \left[ \frac{5}{2} \frac{p}{\gamma-1} (1-\tau) \right]^{2/5}, \quad T_i = A_1 (1-\tau)^{4/5}$$

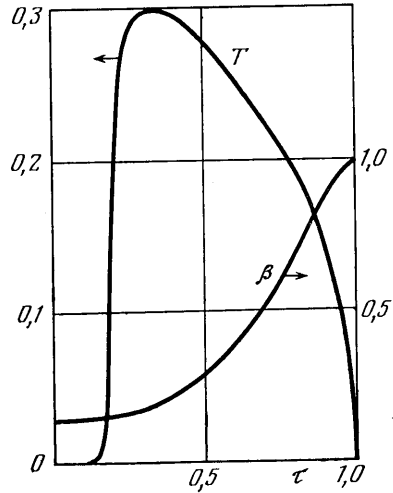
$$A_1 = \frac{5}{4} \frac{(\gamma-1)\pi_5}{pL}, \quad L = \left( \frac{5}{2} \frac{p}{\gamma-1} \right)^{2/5}$$

Полученные формулы используются при построении численного решения системы уравнений (2.1).

Анализ возможных решений начнем с однотемпературного случая ( $T_i = T_e$ ). В этом случае имеем систему уравнений третьего порядка. Если не учитывать потерь энергии на тормозное излучение, поле интегральных



Фиг. 1



Фиг. 2

кривых для различных значений параметра  $p$  имеет вид, приведенный на фиг. 1, где  $p_1 < p_2 < p_3$ . Интегральной кривой  $p_3$  соответствует решение, стремящееся к бесконечности при  $\tau \rightarrow 0$ . Исследуя асимптотическое поведение решения в окрестности центра симметрии, имеем в случае сферической симметрии ( $\nu=2$ )  $T_e \sim \tau^{-2/3}$ . В случае осевой симметрии ( $\nu=1$ ) получаем особенность логарифмического типа.

Вычислим поток тепла в случае  $\nu=2$

$$W_e \sim -\tau^2 T_e^{5/2} \frac{dT_e}{d\tau} \sim -\tau^2 \tau^{-5/3} \tau^{-2/3} \sim \tau^0 \neq 0$$

Таким образом, имеем в центре источник тепла, излучающий энергию по закону  $E = E_0 t^2$  (в случае  $\nu=1$   $E = E_0 t$ ).

Следовательно, решение, описываемое интегральной кривой  $p_3$ , соответствует источнику. Для каждого значения параметра  $p$  значение  $E_0$  находится из закона сохранения энергии

$$\int_0^1 \frac{T_e}{\gamma-1} \tau^{\nu-1} d\tau = \int_0^1 (1-\beta) \tau^{\nu-1} d\tau + \frac{E_0}{\sigma_\nu dRT_*(pB)^\nu} \quad (2.2)$$

Решение, соответствующее интегральной кривой  $p_2$ , имеет в центре симметрии асимптотику  $T_e = A_0 + B_0 \tau^2$ , где  $A_0 > 0$ ,  $B_0 < 0$ . Указанная интегральная кривая является решением задачи о распространении самоподдерживающейся волны, так как поток тепла в центре симметрии равен нулю.

Решение, соответствующее интегральной кривой  $p_1$ , обращается в нуль при  $\tau = \tau_s \neq 0$ . Как показывает анализ, асимптотическое поведение решения в окрестности точки  $\tau = \tau_s$  ( $\tau > \tau_s$ ) имеет вид  $T_e \sim (\tau - \tau_s)^{2/3}$ .

Поток тепла в точке  $\tau = \tau_*$  равен

$$W(\tau_*) \sim T_e^{3/2} \frac{dT_e}{d\tau} \neq 0$$

В точке  $\tau = \tau_*$  имеем сток, поглощающий энергию по закону  $E = E_1 t^2$ . Этот сток движется с постоянной скоростью по закону  $r = \tau_* p B t$ . Величина  $E_1$  может быть найдена из закона сохранения энергии.

Таким образом, при заданных значениях параметров различным значениям величины  $p$  соответствуют разные скорости распространения тепловой волны. Большие скорости имеют место при наличии источника энергии в центре симметрии, малые — при наличии стока.

Изучим картину течения при учете потерь энергии на тормозное излучение. В этом случае интегральной кривой типа  $p_2$  не существует. Интегральная кривая типа  $p_3$  сохраняется. Она по-прежнему дает решение задачи о распространении тепловых возмущений от источника. Закон выделения энергии будет тем же, что и в предыдущем случае, а константа  $E_0$  находится из закона сохранения энергии, учитывающего потери на излучение.

Помимо решения с источником энергии существует решение задачи со стоком, аналогичное предыдущему случаю, не учитывающему потери на излучение. Асимптотика в окрестности заднего фронта  $\tau = \tau_*$  будет той же самой, величина  $E_1$ , определяющая интенсивность стока, вновь находится из закона сохранения энергии.

Решение задачи о распространении самоподдерживающейся волны дается интегральной кривой, представленной на фиг. 2.

Асимптотика в окрестности точки  $\tau = \tau_*$  будет следующей:

$$T_e \sim A_2 (\tau - \tau_*)^2 + \dots, \quad A_2 = \left[ \frac{\pi_4 (\gamma - 1)}{2p\tau_*^2} \right]^2$$

Для получения нужной интегральной кривой необходимо воспользоваться законом сохранения энергии в виде

$$\int_0^1 \frac{T_e}{\gamma - 1} \tau^{\nu-1} d\tau = \int_0^1 (1 - \beta) \tau^{\nu-1} d\tau - \frac{\pi_4}{\nu} \int_0^1 T_e^{1/2} \tau^{\nu-2} d\tau. \quad (2.3)$$

Для построения решения из всех возможных значений параметра  $p$  выбирается то, которое дает интегральную кривую, удовлетворяющую соотношению (2.3). Скорость распространения такой волны равна  $pB$ . Распределение концентрации в этом случае имеет вид, приведенный на фиг. 2.

Таким образом, учет потерь энергии на излучение приводит к существованию в случае самоподдерживающейся волны решения типа уединенной волны, ограниченной передним и задним фронтом.

3. Перейдем к исследованию возможных типов автомодельных решений в двухтемпературном случае без учета движения газа. Для этого рассмотрим поле интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (последние три уравнения системы (2.1)).

Как и в однотемпературном случае, при учете двухтемпературных эффектов существует три типа интегральных кривых, соответствующих различным значениям параметра  $p$ . При больших значениях этого параметра температура при  $\tau \rightarrow 0$  стремится к бесконечности:  $T_{e,i} \sim \tau^{-2/3}$ , что соответствует источнику энергии с постоянной  $E_0$ , значение которой определяется из соотношения, аналогичного (2.2)

$$\int_0^1 \frac{T_e + T_i}{\gamma - 1} \tau^{\nu-1} d\tau = \int_0^1 (1 - \beta) \tau^{\nu-1} d\tau + \frac{E_0}{\sigma_\nu dR T_* (pB)^\nu}$$

Картина поведения интегральных кривых в этом случае приведена на фиг. 3.

При возрастании величины  $p$  разница в значениях ионной и электронной температуры увеличивается. Эти решения соответствуют большей скорости распространения фронта волны и большим значениям величины  $E_0$ , определяющей интенсивность источника тепла.

При малых значениях параметра  $p$  имеем решение со стоком энергии при  $\tau = \tau_s$ . При этом, как и в однотемпературном случае, в окрестности заднего фронта (при  $\tau \rightarrow \tau_s$ )  $T_i, e \sim (\tau - \tau_s)^{2/3}$ .

Аналогичен однотемпературному случаю и третий тип решения — самоподдерживающаяся волна. Асимптотическое поведение решения в окрестности заднего фронта  $\tau = \tau_s$  имеет следующий вид:

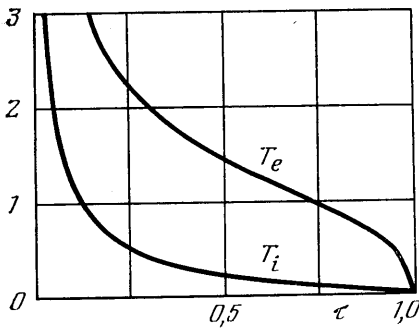
$$T_e \sim A_1(\tau - \tau_s)^2 + B_1(\tau - \tau_s)^3 + \dots, \quad T_i \sim A_1(\tau - \tau_s)^2 + C_1(\tau - \tau_s)^4 + \dots$$

$$C_1 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{p\tau_s^2}{\pi_5} A_1^{5/2}, \quad B_1 = \frac{12\tau_s^2}{\pi_5} A_1^5$$

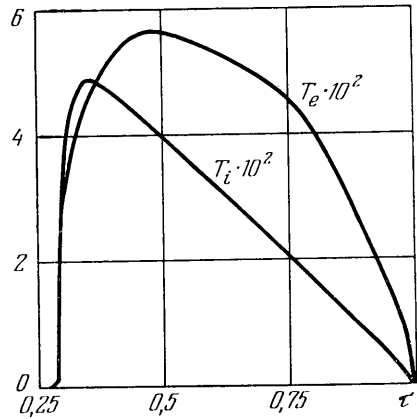
Здесь величина  $A_1$  та же, что и в однотемпературном случае.

Пример расчета самоподдерживающейся волны, ограниченной передним и задним фронтом в двухтемпературном случае приведен на фиг. 4.

Приведенные на фигурах результаты расчетов получены при значениях параметров, соответствующих высокотемпературной полностью ионизованной плазме в



Фиг. 3



Фиг. 4

случае сферической симметрии. Величина параметра  $d$  бралась равной  $1 \text{ г/см}^2$ . В качестве экзотермической реакции рассматривалась реакция  $D+T$ . Скорость распространения волны в самоподдерживающемся режиме  $1,2 \cdot 10^9 \text{ см/с}$ .

В настоящей работе не рассматриваются тепловые волны с учетом движения вещества. В однотемпературном случае они были изучены в [6, 7]. В этих же работах было показано, что в том случае, когда в качестве реакции рассматривается реакция синтеза  $D + T$  и предполагается, что вся выделившаяся в результате реакции энергия вновь поглощается плазмой, параметр  $\pi_3 \ll 1$ , т. е. движение вещества, не оказывает влияния на процесс распространения тепловой волны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Волосевич П. П., Леванов Е. И. Решение автомодельной задачи об истечении газа в вакуум в двухтемпературном гидродинамическом приближении. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1975, т. 15, № 3, с. 702–712.
2. Анисимов С. И. Автомодельная тепловая волна в двухтемпературной плазме, нагреваемой лазерным импульсом. — Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 12, вып. 8, с. 414–418.
3. Гуськов С. Ю., Розанов В. Б. Волна термоядерного горения в лазерной плазме. — Тр. ФИАН им. Лебедева, 1982, т. 134, с. 153–166.
4. Chu M. S. Thermonuclear reaction waves at high densities. — Phys. Fluids, 1972, v. 15, № 3, p. 413–422.
5. Brueckner K. A., Jorna S. Laser-driven fusion. — Revs Mod. Phys., 1974, v. 46, № 2.
6. Левин В. А., Лейбензон А. С. Нестационарная волна горения при нелинейной теплопроводности. — Физика горения и взрыва, 1979, т. 15, № 6, с. 27–35.
7. Лейбензон А. С. Задача о поршне с учетом конечной скорости экзотермических реакций и нелинейной теплопроводности. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 1, с. 146–151.

Москва

Поступила в редакцию  
15.XI.1984