

УДК 533.6.011

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ

ГРИГОРЕНКО В. Л., КРАЙКО А. Н.

Анализируются погрешности, возникающие при расчете в потенциальном приближении (ПП) течений идеального газа со скачками уплотнения умеренной интенсивности. В рамках ПП даются рекомендации к их уменьшению.

Если $z = (p_+ - p_-) / p_-$, где p — давление, а индекс «минус» («плюс») приписан параметрам до (после) скачка, то для малых z замена ударной адиабаты изэнтропией ведет к погрешностям в термодинамических параметрах (как функций z) порядка z^3 , т. е. того же, что и приращение удельной энтропии газа s на скачке. В то же время переход от истинной поляры к изэнтропической (ИП), при получении которой один из законов сохранения (обычно нормальной к скачку компоненты импульса) заменен условием постоянства s , ведет к погрешностям порядка z^2 . В результате для течений не только со слабыми, но и с умеренными скачками, как показано ниже, погрешности, вносимые пренебрежением градиентом s и завихренностью, малы по сравнению с погрешностями использования ИП. Поэтому ошибки ПП можно существенно уменьшить, если скачки умеренной интенсивности выделять явно согласно точному уравнению поляры.

В задачах трансзвукового обтекания несущих тел следующая по значению причина погрешностей связана со сходом с задней кромки тангенциального разрыва (ТР). В обычном ПП при обтекании профиля ТР отсутствует, а линия тока сходит с кромки по биссектрисе угла между образующими. В точной постановке ТР для любых $z > 0$ в общем случае касается одной из сторон профиля, что может заметно влиять на решение. Для учета этого эффекта в ПП также предлагается явное выделение ТР с привлечением в условии непрерывности p на нем значений s , вычисленных по интенсивностям скачков на профиле с разных его сторон.

При «сквозном» счете, привлекательном простотой реализации, поляра, описывающая «размазанные» скачки, определяется используемым уравнением для потенциала. Обычно в качестве такового берется дивергентное уравнение неразрывности, хотя вместо него можно взять, например, дивергентное уравнение одной из компонент импульса или их комбинацию. Предложена такая комбинация указанных уравнений, что определяемая ею ИП оказывается заметно ближе к истинной, чем ИП, отвечающая уравнению неразрывности.

1. Течения двухпараметрического идеального газа в общем случае описываются системой пяти квазилинейных уравнений в частных производных, которая вместе с уравнениями состояния определяет все термодинамические параметры и вектор скорости V . Существенное упрощение достигается для потенциальных течений. В стационарном случае необходимыми условиями их реализации являются изоэнергетичность и изэнтропичность потока. В ПП вместо пяти уравнений решается одно уравнение второго порядка для потенциала ϕ , $V = \nabla\phi$, а все термодинамические переменные определяются по $V = |V|$ конечными формулами. В последнее время благодаря созданию весьма эффективных методов решения уравнения для потенциала (сначала в связи со стационарным трансзвуковым обтеканием плоских и осесимметричных тел [1–5]) наблюдается интенсивное расширение сферы применения ПП на пространственные и нестационарные трансзвуковые течения [6, 7] и даже на чисто сверхзвуковые потоки [8–11]. Применяемые при этом методы и алгоритмы позволили на порядки сократить времена численного решения по сравнению с решением тех же задач в приближении полной системы уравнений Эйлера (ПЭ). Под-

черкнем, что работы [1—11] дают представление лишь о последних достижениях ПП, не отражая всего многообразия решаемых с его помощью задач.

С другой стороны, если изоэнергетичность стационарного потока имеет место во многих приложениях (в частности, во внешней аэродинамике), то условие изэнтропичности нарушается тем в большей степени, чем интенсивнее и искривленнее возникающие в потоке скачки. Если учесть, что это должно снижать точность ПП, то возникает необходимость определения границ его справедливости. Последнее тем более актуально, что одновременно с расширением применения ПП появляются примеры, где его традиционная реализация (ТПП) дает ошибочные результаты. Наиболее ярким примером такого рода является многозначность подъемной силы профиля как функции угла атаки, обнаруженная в ТПП и не наблюдающаяся в ПЭ [12, 13]. Кроме того, известно, что скачок, замыкающий местную сверхзвуковую зону, по ТПП располагается ближе к задней кромке профиля, чем по ПЭ. Конечно, меньшим числам Маха перед скачком M_{∞} отвечают меньшие погрешности ПП. Однако имеющиеся указания (см., например, [13]) о несправедливости ТПП при $M_{\infty} > 1,3$ требуют дополнительного обоснования и выяснения причин такого ограничения. Наряду с этим простота работы с одной переменной вместо пяти (и даже трех для изоэнергетических плоскопараллельных стационарных течений) и достоинства соответствующих численных алгоритмов [1—11] столь заманчивы, что их использование в как можно большем числе задач крайне желательно. Для двумерных стационарных потоков это оказывается реальным при переходе от потенциала к функции тока [14]. К сожалению, нестационарность или пространственность течения, а тем более и то и другое вместе исключают подобную перспективу. Здесь единственная возможность использования указанных упрощений и методов состоит в модификации ТПП, расширяющей границы его справедливости. Некоторые из таких модификаций предложены в [15—19]. К ним примыкают анализ и рекомендации п. 2, представляющиеся, однако, более полными и последовательными (по-видимому, из цитированных работ к описанным результатам ближе всего работа [18], к сожалению, известная авторам лишь по ссылке в [19]). Наконец, подход, изложенный в п. 3, более просто и естественно, чем подходы, развиваемые в [15—17, 19], уменьшает погрешности ПП при «сквозном» счете скачков.

2. Для стационарного течения в ТПП потенциал определяется уравнением неразрывности

$$\nabla(\rho \nabla \varphi) = 0 \quad (2.1)$$

в котором плотность ρ — известная функция $(\nabla \varphi)^2$. Если уравнение состояния взять в виде $h = h(\rho, s)$, где h — удельная энтальпия, то $\rho \{(\nabla \varphi)^2\}$ находится из равенства

$$2h(\rho, s) + (\nabla \varphi)^2 = 2H \quad (2.2)$$

с постоянными s и полной энтальпией H . В (2.1), (2.2) и далее все величины безразмерные с ρ_*° , V_*° и $V_*^{\circ 2}$ в качестве масштабов плотности, градиента потенциала (скорости) и энтальпии (верхний индекс «градус» приписывается размерным величинам). Для рассматриваемых ниже трансзвуковых течений ρ_*° и V_*° — критические плотность и скорость, постоянные во всем потоке в силу предположения об его изоэнергетичности и изэнтропичности. При этом для совершенного газа с показателем адиабаты κ (2.2) примет вид

$$2\rho^{\kappa-1} + (\kappa-1)(\nabla \varphi)^2 = \kappa + 1 \quad (2.3)$$

Возможность замены ∇ на $\nabla \varphi$ есть следствие пренебрежения правой частью в уравнениях движения, записанных в форме уравнения Крокко

$$\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = \nabla H - T \nabla s \quad (2.4)$$

в котором температура T обезразмерена отнесением к критической температуре T_*° , а энтропия s° — к $V_*^{\circ 2}/T_*^\circ$. Для совершенного газа с газовой постоянной R° последнее отношение равно κR° и таким образом $s = s^\circ/(\kappa R^\circ)$. Подчеркнем, что предложенная в [17] модификация уравнения (2.4), приведшая к появлению в нем дополнительных слагаемых, обусловленных нарушением точных условий на скачке, ошибочна (в отличие от практических рекомендаций и метода указанной работы). Конечно, неверный счет скачков аналогично неверному заданию граничных условий ведет к ошибкам в определении параметров потока. Однако распределения этих ошибок описываются уравнениями течения, включая (2.4), причем с нулевой правой частью, если на скачке (неважно, правильно или нет) s и H не изменяются. Поэтому единственно, что здесь требуется, это оценка величины $T \nabla s$, поскольку при переходе через скачок H не изменяется, и для равномерного набегающего потока $\nabla H = 0$ всюду. В подобластях непрерывности течения s сохраняется на каждой линии тока и для оценки ∇s в первую очередь следует найти приращение энтропии $\Delta s = s_+ - s_-$ на скачке как функцию его интенсивности z . Пусть удельный объем $\omega = 1/\rho$ — известная функция s и p . Тогда обычным способом из полной системы законов сохранения на скачке для малых z найдем, что $\Delta s^\circ = (\omega_{pp} p^{\circ 3})_{-} z^3 / (12 T_*^\circ)$ или для совершенного газа

$$\Delta s = \Delta s^\circ / (\kappa R^\circ) = (\kappa + 1) z^3 / (12 \kappa^3) + o(z^3) \quad (2.5)$$

В случае скачка произвольной интенсивности в совершенном газе формулы для Δs и для квадрата нормальной к скачку компоненты числа Маха M_{n-} имеют вид (см., например, [20])

$$\Delta s = \frac{1}{\kappa(\kappa - 1)} \ln \frac{S_+}{S_-}, \quad \frac{S_+}{S_-} = (1+z) \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2\kappa} z \right)^\kappa \left(1 + \frac{\kappa + 1}{2\kappa} z \right)^{-\kappa} \quad (2.6)$$

$$M_{n-}^2 = 1 + (\kappa + 1) z / (2\kappa) \quad (S = p/\rho^*)$$

Зависимости Δs и M_{n-} от z , рассчитанные по (2.6) для нескольких κ , даны на фиг. 1, а и б сплошными линиями (кривые 1, 2 и 3 отвечают $\kappa = 1, 1, 1, 4$ и $5/3$). Видно, что даже для скачков сравнительно большой интенсивности Δs мал. Так, при $z = 1$, т. е. при $p_+/p_- = 2$, что для рассмотренных κ соответствует $M_{n-} > 1,34$ — величине, при которой в силу упомянутой ранее рекомендации, относящейся, кстати, к $\kappa = 1,4$, ПП несправедливо, Δs равно 0,044; 0,024 и 0,016 для $\kappa = 1, 1, 1, 4$ и $5/3$. Более или менее заметная средняя завихренность, получающаяся при $\Delta s = 0,1$ для $\kappa = 1,4$, отвечает $z \approx 2,1$ или $M_{n-} \approx 1,7$ и, следовательно, лежит далеко за границей рекомендуемого ограничения $M_{n-} < 1,3$. Это дает основание считать, что большие погрешности ТПП в первую очередь обусловлены не имеющейся на самом деле слабой завихренностью потока (для $\kappa = 1,4$ при $M_{n-} < 1,7$), а чем-то другим. Прежде чем перейти к выяснению главной причины погрешностей ТПП, заметим, что первый член разложения по z правой части выражения для Δs из (2.6), т. е. формула (2.5) даже для сравнительно малых z сильно завышает величину Δs . Последнее видно из сравнения сплошных кривых фиг. 1, а с пунктирными, рассчитанными по (2.5). Если $\kappa = 1,4$, то Δs , найденные по (2.5), превышают свои точные значения на 21, 31 и 88% соответственно для $z = 0,1; 0,2$ и $0,5$. В противоположность этому главный член разложения Δs по малому параметру $\varepsilon = (\kappa - 1)/(2\kappa)$, имеющий вид

$$\Delta s = \{z(2+z)/(1+z) - 2 \ln(1+z)\} / (2\kappa^2) + O(\varepsilon) \quad (2.7)$$

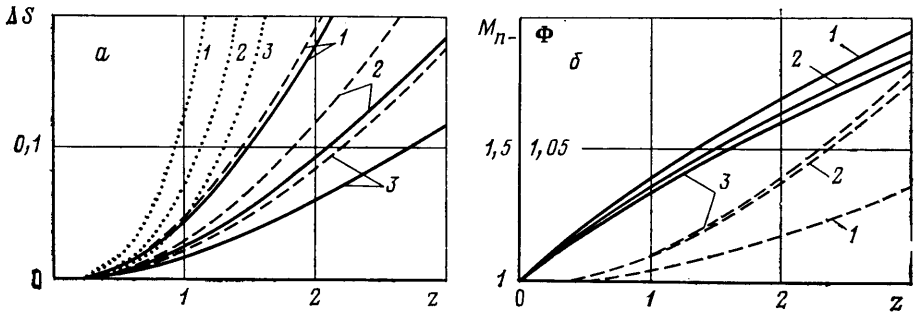
обеспечивает более высокую точность определения Δs в широком диапазоне изменения z , уступая (2.5) лишь при весьма малых z . Так, при $z = 1$ формула (2.7) в порядке возрастания $\kappa = 1, 1, 1, 4$ и $5/3$ дает $\Delta s = 0,047; 0,029$ и $0,020$ при точных значениях 0,044; 0,024 и 0,016. Результаты расчета Δs по (2.7) нанесены на фиг. 1, а штрихами.

Помимо завихренности, еще одним источником погрешностей ТПП может быть зависимость ρ в уравнении неразрывности (2.1) не только от $V^2 = (\nabla \phi)^2$, как следует из (2.2) или (2.3), но и от s . Кстати, в модификациях ТПП, предложенных в [17, 19] и, по-видимому, в [18], учет указанной зависимости является одним из главных элементов. Несмотря на это,

покажем, что по крайней мере для стационарных изоэнергетических течений совершенного газа (а только они рассматриваются в [17–19]) в областях непрерывности параметров такой учет не нужен. Действительно, еще без предположений о потенциальности и изэнтропичности стационарное изоэнергетическое течение описывается уравнениями

$$\nabla(\rho V) = 0, \quad \rho(\nabla V)V = -\nabla p, \quad V \nabla s = 0, \quad 2\alpha a^2 + V^2 = 2H \quad (2.8)$$

Здесь $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ — квадрат скорости звука; H , как и в (2.2), — константа, а $\alpha = ha^{-2}$ — известная функция безразмерных комбинаций термодинамических параметров и констант, входящих в уравнения состояния данного газа. Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями $\alpha = (\kappa - 1)^{-1}$. Для совершенного газа с переменными теплоемкостями α за-



Фиг. 1

висит только от a^2 . Следовательно, в обоих случаях a^2 при $H = \text{const}$ — функция только V^2 , не зависящая от s . С учетом определения a^2 , а также второго и третьего уравнений системы (2.8) уравнение неразрывности принимает вид

$$a^2 \nabla V - V \{(\nabla V)V\} = 0 \quad (2.9)$$

Входящий сюда множитель a^2 , согласно сказанному выше, для совершенного газа в отличие от ρ — функция только V^2 . Далее можно показать, что получающиеся при $V = \nabla \phi$ в областях непрерывности потока из (2.9) и последнего равенства (2.8) с $\alpha = (\kappa - 1)^{-1}$ уравнения совпадают с (2.1) и (2.3). Отсюда следует, что, хотя равенство (2.3) определяет ρ через $(\nabla \phi)^2$ с погрешностью, обусловленной слабой неизэнтропичностью потока, на ϕ и $V = \nabla \phi$ такой механизм влияния неизэнтропичности не сказывается. Естественно, возникает вопрос, чем же объясняется высокая точность модификаций [17–19] ТПП, где учет зависимости ρ от s является, как уже упоминалось, одним из главных элементов. Чтобы ответить на него и одновременно выяснить основную причину погрешностей ТПП, обратимся к полной системе законов сохранения на скачке. Пусть V_n и V_τ — нормальная и касательная к скачку компоненты V , а $[F] = F_+ - F_-$ для произвольного параметра F . Тогда указанная система имеет вид

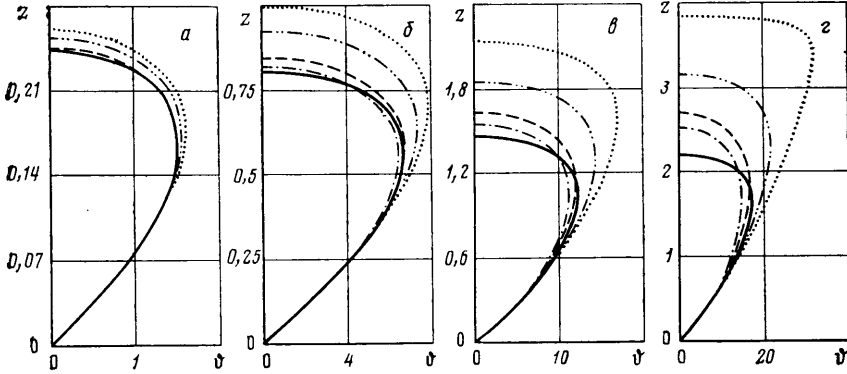
$$[\rho V_n] = 0, \quad [p + \rho V_n^2] = 0, \quad [V_\tau] = 0, \quad [2h + V_n^2] = 0 \quad (2.10)$$

В ТПП первое, третье и четвертое уравнения (2.10) удовлетворяются точно, а второе заменено условием $[s] = 0$. Хотя для слабых скачков ($z \ll 1$) это ведет к выполнению закона сохранения для нормальной к скачку компоненты импульса с погрешностями того же порядка, что и Δs , т. е. $O(z^3)$, сами параметры за скачком вычисляются с большей погрешностью. Поступая так же, как при получении из (2.10) формулы (2.5) для Δs , нетрудно найти, что при замене второго уравнения (2.10) условием $[s] = 0$ формула для M_{n-2} из (2.6) заменится на

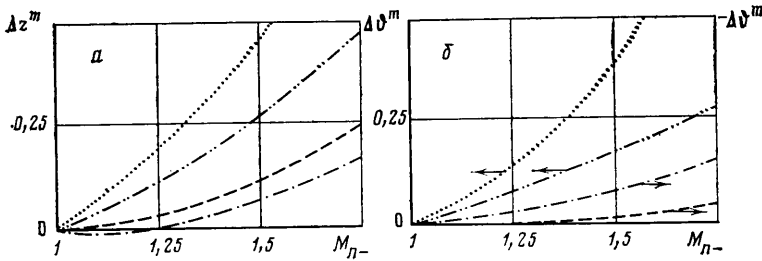
$$M_{n-2} = 1 + \frac{\kappa + 1}{2\kappa} z - \frac{\kappa + 1}{12\kappa} z^2 + o(z^2) \quad (2.11)$$

Величина M_{n-} определяет наклон скачка. Поэтому ошибка в определении M_{n-} как функции z характеризует погрешности изэнтропической ударной поляры, которые согласно (2.11) при малых z есть $O(z^2)$. В то же время в силу (2.5) погрешности ударной адиабаты существенно меньше $-O(z^3)$. К тому же коэффициент при z^3 в (2.5) в κ^2 раз меньше, чем при z^2 в (2.11).

Формула (2.11), как и (2.6), справедлива лишь для $z \ll 1$. Более полное представление об ошибках ИП для $\kappa=1,4$ дают фиг. 2 и 3. Фиг. 2, $a-g$ отвечают $M_{n-} = 1,1; 1,3; 1,5$ и $1,7$; ϑ — угол (в градусах) поворота V при переходе через скачок. Сплошные половинки «сердцевидных» кривых на фиг. 2 — точные поляры, расчи-



Фиг. 2



Фиг. 3

танные по (2.10), штрихпунктиром даны ИП. Последние, как можно показать, определяются формулами

$$\vartheta = \arccos \frac{1 + \chi \lambda}{\chi + \lambda}, \quad \chi \equiv \frac{V_-}{V_+} = \left\{ 1 + \frac{2}{(\kappa - 1) M_{n-}^2} (1 - n^{(\kappa-1)/\kappa}) \right\}^{-1/2} \quad (2.12)$$

$$\lambda = \chi \rho_- / \rho_+, \quad \rho_- / \rho_+ = n^{-1/\kappa}, \quad n \equiv p_+ / p_- = z + 1$$

На фиг. 3, a и $б$ кривые «штрих-две точки» показывают в зависимости от числа Маха набегающего потока M_{n-} относительные ошибки Δz^m и $\Delta \vartheta^m$ ИП в определении $z^m \equiv z$ прямого скачка — ординаты верхней точки поляры и $\vartheta^m \equiv \vartheta$ — максимального угла поворота потока.

ИП и ее представление в форме (2.12) можно получить как следствие уравнения неразрывности (2.1), точнее, отвечающего ему интегрального закона сохранения массы, дополненного условиями постоянства s и H и равенством (2.2) с выражением для h или для совершенного газа — уравнением (2.3). Следовательно, погрешности ИП, которые вызывают ошибки того же порядка в определении наклона скачка и параметров за ним, одновременно являются и ошибками ТПП независимо от того, ведется ли счет сквозным способом или с явным выделением скачка, если последнее, как это обычно делается, выполняется согласованно с (2.1), т. е. не по (2.10), а по ИП.

Из сказанного, во-первых, сразу следует рекомендация, исключаящая основной источник погрешностей ТПП. Именно расчет течений со скачка-

ми умеренной интенсивности ($z < 2$ или $p_+/p_- < 3$) можно вести в рамках ПП, т. е. по уравнениям (2.1)–(2.3), если скачки заметной интенсивности выделять явно согласно точному, а не приближенному уравнению ударной поляры. Последнее для этой цели в случае совершенного газа удобно использовать в форме

$$\varphi_{n+}\varphi_{n-} = 1 - (\kappa - 1)\varphi_{\tau}^2/(\kappa + 1) \quad (2.13)$$

Здесь φ_n и φ_{τ} — производные от потенциала по нормали и по касательной к скачку, φ_{τ} в силу непрерывности φ на скачке может вычисляться с любой его стороны, а за масштаб скорости, как и ранее, взято ее критическое значение. Подчеркнем, что данная рекомендация связана не со стремлением уменьшить ошибки разностной аппроксимации, которые при сквозном счете скачков снижают порядок аппроксимации любой разностной схемы до первого [21, 22]. Современные численные методы для решения задач газовой динамики в ПП размазывают скачки на 2–3 точки, а расчет ведется на столь мелких сетках, что явное выделение скачка в рамках ТПП, т. е. по ИП, не дает заметного эффекта (см. [23]). Важнее всего не просто выделение скачка, а выделение его по точному уравнению поляры (2.13), что при сквозном счете (2.1) с ρ из (2.3) невозможно.

Во-вторых, выполненный анализ позволяет объяснить причину эффективности «сквозных» модификаций ТПП, предложенных в [17, 19]. В них ρ находится по (2.2), но с переменной s , рассчитанной с учетом точных или близких к точным соотношений на скачке, например с использованием полей параметров предыдущей итерации. В результате в стационарном решении форма и положение скачка, а также параметры за ним рассчитываются более правильно, чем в ТПП. Согласно сказанному выше, переменность s при этом важна не во всем потоке, а лишь в узкой зоне размазанного скачка.

Не исключено, что еще одним фактором, который по крайней мере иногда может оказывать заметное влияние на точность результатов, является неправильный (в ТПП) сход с задней кромки профиля разделительной линии тока (РЛТ). В ТПП она, не будучи тангенциальным разрывом (ТР), сходит по биссектрисе угла заострения профиля. На самом же деле в общем случае несимметричного обтекания со скачками РЛТ является ТР и в точке схода касается той образующей, со стороны которой s или S меньше. Если верхний индекс плюс (минус) приписывать предельным значениям параметров над (под) РЛТ, то последнее имеет место при любых $S^+ \neq S^-$, как бы близки друг к другу S^+ и S^- ни были. Правда, при $S^+/S^- \rightarrow 1$ протяженность участка ТР, на котором его наклон отличается от результата ТПП на конечную величину порядка $\theta/2$, где θ — угол заострения кромки, стремится к нулю. Однако в некоторых ситуациях, в частности в примерах [12, 13], в которых ТПП приводит к многозначности решения задачи обтекания симметричного профиля в окрестности нулевого угла атаки, а также в случаях, когда при несимметричном обтекании по ТПП замыкающий скачок с одной стороны профиля располагается почти на кромке [17], отмеченный фактор может быть существенным. Тем не менее и его учет в ПП не представляет проблемы, ибо с каждой стороны профиля у основания скачка равенства (2.6) по известному $M_n \equiv M_n$ дают S_+/S_- , а для совершенного газа в силу (2.2) и определения S

$$p = \kappa^{-1} (S\kappa)^{-1/(\kappa-1)} \{(\kappa+1)/2 - (\kappa-1)(\nabla\varphi)^2/2\}^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (2.14)$$

где давление отнесено к $\rho \cdot V \cdot \text{оз}$. Поэтому условия $[p] \equiv p^+ - p^- = 0$ и $\varphi_n^+ = \varphi_n^- = 0$ на ТР дают для его определения в отличие от ТПП, где $\varphi_{\tau}^+ = \varphi_{\tau}^-$, равенство

$$\kappa + 1 - (\kappa - 1)(\varphi_{\tau}^+)^2 = (S^+/S^-)^{1/\kappa} \{ \kappa + 1 - (\kappa - 1)(\varphi_{\tau}^-)^2 \} \quad (2.15)$$

При $S^+/S^- > 1$ условие (2.15) указывает на сход с кромки по касательной к нижней образующей ($\varphi_{\tau}^+ = 0$, $\varphi_{\tau}^- \neq 0$). Заметим, что отличие $\Phi = (S_+/S_-)^{1/\kappa}$ от единицы

еще меньше, чем Δs . Это видно из фиг. 1, б, на которой штрихами для $\kappa=1,1; 1,4$ и $5/3$ нарисованы кривые $\Phi=\Phi(z)$. Если с одной стороны профиля (допустим снизу) скачков нет, то $S^-=\kappa^{-1}$ и $(S^+/S^-)^{1/\kappa}=\Phi^+$. В силу выполненного анализа ИП, выделяющее с использованием (2.13) и (2.15) скачки и ТР, будет весьма точно определять ϕ и $V=\nabla\phi$ и с большей погрешностью — ρ и p . Поэтому, например, силовые характеристики профиля следует в таком ИП находить интегрированием по профилю p , найденному из (2.14). Построение скачков заметной интенсивности и ТР при этом удобно вести на фиксированной, не связанной с разрывами сетке (метод «плавающих разрывов»).

Может показаться, что наряду с рассмотренными есть еще один источник ошибок ИП: при подходе к точке торможения (в общем случае для одного из потоков — к задней кромке) $V \rightarrow 0$ и при любой сколь угодно малой правой части (2.4) $\text{rot } V$ может неограниченно расти. В действительности, однако, это не так, поскольку s за скачком сохраняется вдоль линий тока, и из-за этого V и Vs уменьшаются одновременно. Например, в плоскопараллельном потоке $\text{rot } V$ имеет единственную компоненту Ω , нормальную плоскости течения, причем в силу (2.4), $|\Omega| = |\rho T ds/d\psi|$, где ψ — функция тока, а $s=s(\psi)$. Если σ — угол, образуемый касательной к скачку с V_- , то Δs — известная функция M_- и $\sin \sigma$. Поэтому даже при бесконечной кривизне скачка у стенки, где $\sigma=\pi/2$, $ds/d\psi$ и Ω либо конечны, либо равны нулю [24].

3. Поскольку явное выделение разрывов усложняет алгоритмы особенно для расчета пространственных и нестационарных течений, то оправданы поиски модификаций ТПП, снижающих его погрешности при сквозном счете. В этой связи представляется целесообразным в рамках изэнтропического, изоэнергетического, а следовательно, потенциального приближения в качестве уравнения для ϕ рассмотреть не (2.1), а проекцию записанного в дивергентной форме уравнения движения на направление, задаваемое единичным вектором k .

$$L_k \equiv \nabla(\rho V V_k + k p) = 0 \quad (V = \nabla\phi, V_k = k \nabla\phi) \quad (3.1)$$

Если здесь ρ как функцию $(\nabla\phi)^2$ находить по (2.3), а затем p — по формуле $p = \rho^{\kappa}/\kappa$, то в областях непрерывности течения (3.1) эквивалентно (2.1). В то же время ИП, соответствующие (2.1) и (3.1), различаются, причем вторая зависит от выбора k . Кстати, k нельзя направлять по касательной к скачку. Взяв, в частности, $k \parallel V_-$, придем к ИП

$$\phi = \arccos \frac{1 + \gamma \sqrt{(1 + \gamma)^2 - 4\gamma\chi^2}}{2\chi}, \quad \gamma = \frac{n-1 - \kappa M_-^2}{n\kappa M_+^2} \quad (3.2)$$

$$M_+^2 = \{2/(\kappa-1) + M_-^2\} n^{(1-\kappa)/\kappa} - 2/(\kappa-1)$$

с n и χ из (2.12).

Пунктиром для $\kappa=1,4$ на фиг. 2 и 3 даны ИП (3.2) и отвечающие им погрешности Δz^m и $\Delta \theta^m$. Видно, что ИП (3.2) хуже ИП (2.12). Мало того, начиная с некоторого M_- (при $\kappa=1,4$ — с $M_- \approx 1,74$), они оказываются разомкнутыми (на отсутствие аналогичных решений для прямого скачка указывалось в [17]). Приведенные на фиг. 2 и 3 результаты и некоторые дополнительные соображения наводят на мысль, что уточнение ИП (2.12) тем не менее возможно, если вместо (2.1) или (3.2) взять их линейную комбинацию с коэффициентами разных знаков. Учтя, что при принятом способе обезразмеривания максимальные («критические») плотность тока ρV и удельный импульс $p + \rho V^2$ равны 1 и $(\kappa+1)/\kappa$, указанную комбинацию удобно записать в форме

$$(1 + \nu) \nabla(\rho \nabla\phi) - \nu \kappa L_k / (\kappa + 1) = 0 \quad (3.3)$$

Здесь числа ν и $1 + \nu$ имеют одинаковый знак, ибо в противном случае отвечающая (3.3) ИП будет хуже, чем (2.12).

Для $k \parallel V_-$ получающаяся из (3.3) поляра дается формулой

$$\phi = \arccos \frac{A + (A^2 - 4\mu B \chi^2)^{1/2} \text{sign}(\mu - 1)}{2\mu\chi}$$

$$\mu = NV_- = NM_- \left(\frac{2}{\kappa+1} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} M_-^2 \right)^{-1/2}, \quad N = \frac{v\kappa}{(1+v)(\kappa+1)} \quad (3.4)$$

$$A = \mu(1+\gamma) + \chi(\lambda+\chi), \quad B = 1 + \lambda\chi + \mu\gamma$$

с χ , λ и γ из (2.12) и (3.2). Как показали расчеты, выполненные для $\kappa=1,4$, погрешности ИП (3.4) по z^m и ϕ^m при $v>0$ монотонно уменьшаются с ростом v , достигая минимума при $v \rightarrow \infty$. Так как, однако, в (3.4) v входит через выражение для N , то поляры, получающиеся, например, для $v=100$, практически не отличаются от «предельных». Для $v=100$ ИП (3.4), Δz^m и $\Delta \phi^m$ нарисованы на фиг. 2 и 3 штрихами. Видно, что эти поляры заметно ближе к истинным, чем ИП (2.12). Так, отличие по z^m даже для $M_- = 1,7$ уменьшилось почти вдвое, а по ϕ^m стало почти нулевым. Расчеты с $v < -1$ показали, что по сравнению с $v=100$ их использование дает дальнейшее уменьшение $|\Delta z^m|$ при некотором росте $|\Delta \phi^m|$. Кривые, получающиеся из (3.4) для $v=-10$, даны на фиг. 2 и 3 штрихпунктиром. При этом на фиг. 2, а, т. е. для $M_- = 1,1$, в пределах возможностей графического представления штрихпунктирная поляра совпадает со сплошной.

В заключение сделаем два замечания. Первое связано с выбором в (3.3) вектора \mathbf{k} , направление которого необязательно брать постоянным. В частности, в задачах обтекания профиля \mathbf{k} целесообразно направить по касательной к сеточным линиям, охватывающим профиль, переписав соответствующим образом оператор L_k . При таком выборе вектор \mathbf{k} будет направлен почти по нормали к линии скачка. Второе замечание касается более общего вопроса о сходе потока с острой задней кромки профиля. Как известно, задача безотрывного обтекания такого профиля несжимаемой жидкостью имеет бесконечное множество решений, из которых только в двух (с задней кромкой — точкой схода или присоединения) p и V ограничены (в остальных на кромке $p \rightarrow -\infty$, а и $V \rightarrow \infty$). В этом смысле постулат Чаплыгина — Жуковского, служащий для отбора единственного решения со сходом с кромки, эквивалентен, во-первых, исключению решений с физически нереальными p и V и, во-вторых, выбору из двух оставшихся — решения с меньшей (по модулю) циркуляцией. При обтекании без торможения острой кромки газом неминуемо возникла бы волна разрежения, предельный угол разворота в которой равен $\pi\{\sqrt{v(\kappa+1)/(\kappa-1)} - 1\}/2$, что для $\kappa=1,4$ дает $130,5^\circ$. Поэтому для представляющих наибольший интерес значений κ и углов заострения профиля его безотрывное обтекание газом возможно либо со сходом потока с кромки либо с присоединением к ней и роль постулата Чаплыгина — Жуковского сводится к отбору первого решения.

Авторы признательны В. А. Вострецовой за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ballhaus W. F., Jameson A., Albert J. Implicit approximate-factorization schemes for steady transonic flow problems.— AIAA Journal, 1978, v. 16, No 6, p. 573–579.
2. Hafez M. M., South J. C., Murman E. Artificial compressibility methods for numerical solutions of transonic full potential equation.— AIAA Journal, 1979, v. 17, No 8, p. 838–844.
3. Holst T. L. Implicit algorithm for the conservative transonic full-potential equation using an arbitrary mesh.— AIAA Journal, 1979, v. 17, No 10, p. 1038–1045.
4. Catherall D. Optimum approximate-factorization schemes for two-dimensional steady potential flows.— AIAA Journal, 1982, v. 20, No 8, p. 1057–1064.
5. Green L. L., South J. C. Conservative full-potential calculations for axisymmetric, transonic flow.— AIAA Journal, 1983, v. 21, No 11, p. 1492–1499.
6. Holst T. L., Thomas S. D. Numerical solution of transonic wing flowfields.— AIAA Journal, 1983, v. 21, No 6, p. 863–870.
7. Chipman R., Jameson A. Alternating-direction implicit algorithm for unsteady potential flow.— AIAA Journal, 1982, v. 20, No 1, p. 18–24.
8. Grossman B. Numerical procedure for the computation of irrotational conical flows.— AIAA Journal, 1979, v. 17, No 8, p. 828–837.
9. Shankar V. Conservative full potential, implicit marching scheme for supersonic flows.— AIAA Journal, 1982, v. 20, No 11, p. 1508–1514.
10. Shankar V., Osher S. An efficient, full-potential implicit method based on characteristics for supersonic flows.— AIAA Journal, 1983, v. 21, No 9, p. 1262–1270.
11. Sritharan S. S., Seebass A. R. Finite area method for nonlinear supersonic conical flows.— AIAA Journal, 1984, v. 22, No 2, p. 226–233.
12. Steinhoff J., Jameson A. Multiple solutions of the transonic potential flow equation.— AIAA Journal, 1982, v. 20, No 11, p. 1524–1525.
13. Salas M. D., Gumbert C. R., Turkel E. Nonunique solutions to the transonic potential flow equation.— AIAA Journal, 1984, v. 22, No 1, p. 145–146.
14. Hafez M., Lovell D. Numerical solution of transonic stream function equation.— AIAA Journal, 1983, v. 21, No 3, p. 327–335.
15. Nixon D. Transonic small disturbance theory with strong shock waves.— AIAA Journal, 1980, v. 18, No 6, p. 717–718.

16. Kerlick G. D., Nixon D., Ballhaus W. F., Jr. Unsteady transonic small disturbance approximation with strong shock waves.— AIAA Journal, 1983, v. 21, No 6, p. 918–920.
17. Klopfer G. H., Nixon D. Nonisentropic potential formulation for transonic flows.— AIAA Journal, 1984, v. 22, No 6, p. 770–776.
18. Hafez M., Lovell D. Entropy and vorticity corrections for transonic flows.— AIAA Pap., 1983, No 1926.
19. Hafez M. M., Habashi W. G., Kotuga P. L. Conservative calculations of non-isentropic transonic flows.— AIAA Pap., 1984, No 1182, 6 p.
20. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
21. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
22. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Об аппроксимации разрывных решений при использовании разностных схем сквозного счета.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1978, т. 18, № 3, с. 780–783.
23. Yu N. J., Seebass A. R. Inviscid transonic flow computations with shock fitting.— In: Proc. Symp. Transonicum II. Goettingen: Springer, 1976, p. 449–456.
24. Fung K.-Y. Vorticity at the shock foot in inviscid flow.— AIAA Journal, 1983, v. 21, No 6, p. 915–916.

Москва

Поступила в редакцию
12.III.1985