**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
**№ 2 • 1986**

УДК 532.591

# ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

ДОРФМАН А. А.

Пространственная задача о неустановившихся волновых движениях жидкости над плоским наклонным дном в рамках линейной дисперсионной модели впервые была рассмотрена в [1] для частного случая $\beta=\pi/4$, где $\beta$ — угол наклона плоскости дна к свободной поверхности жидкости. В статье [2] найден класс точных автомодельных решений задачи при $\beta=\pi/2(2m+1)$, $m=0, 1, 2, \ldots$, для случая начального возмущения свободной поверхности специального вида, являющегося неизменным в направлении нормали к линии берега. Настоящая работа посвящена исследованию волновых движений жидкости, обусловленных начальным возмущением произвольной формы, при значениях угла наклона дна, принятых в [2]. Найдена полная система собственных функций, соответствующих непрерывному и дискретному спектру. Доказана теорема разложения произвольной абсолютно интегрируемой функции по граничным значениям собственных функций. Получено точное решение задачи и выполнен его асимптотический анализ.

**1. Постановка задачи. Собственные функции.** Рассмотрим волновое движение идеальной несжимаемой жидкости в клиновидной области, ограниченной свободной поверхностью и плоским наклонным дном. Запишем уравнения, краевые и начальные условия, описывающие неустановившееся движение жидкости со свободной поверхностью в рамках линейной дисперсионной модели [3, 4]

$$\Delta\varphi=0,\quad 0<r<\infty,\quad -\beta<\theta<0,\quad |z|<\infty$$

$$g\frac{1}{r}\varphi_\theta+\varphi_{tt}=0,\quad \theta=0;\quad \frac{1}{r}\varphi_\theta=f_-(r,z,t),\quad \theta=-\beta$$

$$\varphi=0,\quad \varphi_t=-gf_+(x,\ z),\quad \theta=0,\quad t=0 \tag{1.1}$$

$$\varphi\to0,\quad \sqrt{r^2+z^2}\to\infty;\quad \varphi<\infty,\quad r\to0$$

$$\zeta=-\frac{1}{g}\varphi_t\ \ (\theta=0);\quad \Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Здесь $t$ — время, $r$, $\theta$, $z$ — цилиндрические координаты, $x$, $z$ — декартовы координаты на свободной поверхности, $\varphi$ — потенциал скорости, $g$ — ускорение свободного падения, $f_+$, $f_-$ — функции, характеризующие начальную форму свободной поверхности и перемещение дна соответственно, $\zeta$ — отклонение свободной поверхности от равновесного состояния.

Для определения собственных функций задачи будем искать решение уравнений системы (1.1) при однородных краевых условиях в виде $\varphi=\exp\{i(pz+\sqrt{s}gt)\}\Phi(r,\theta)$, где $p$, $s$ — вещественные положительные параметры. Тогда придем к задаче Штурма — Лиувилля

$$\frac{1}{r}(r\Phi_r)_r+\frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta}-p^2\Phi=0,\quad 0<r<\infty,\quad -\beta<\theta<0 \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{r}\Phi_\theta - s\Phi = 0, \qquad \theta=0; \qquad \Phi_\theta=0, \qquad \theta=-\beta$$

$$\Phi\to 0, \qquad r\to\infty; \qquad \Phi<\infty, \qquad r\to 0$$

Краевая задача (1.2) для частного случая $s/p>1$ изучалась в ряде работ (например, [3]). Для определения полной системы собственных функций применим метод, разработанный в теории теплопроводности [5], который позволяет получить решение (1.2) при произвольном значении отношения $s/p$. Введем интегральное преобразование Конторовича — Лебедева

$$\Phi^K = \int\limits_0^\infty (\Phi-\Phi_0)\frac{K_\nu(pr)}{r}dr, \qquad \Phi_0=\Phi(r=0)$$

Здесь $K_\nu$ — функция Макдональда, $\nu$ — комплексный параметр преобразования

Тогда (1.2) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\Phi_{\theta\theta}{}^K+\nu^2\Phi^K = \frac{\nu\pi}{2}\Phi_0\operatorname{cosec}\frac{\pi\nu}{2}, \qquad -\beta<\theta<0\\ \Phi_\theta{}^K - s\int\limits_0^\infty(\Phi-\Phi_0)K_\nu(pr)\,dr = \frac{\pi s}{2p}\Phi_0\sec\frac{\pi\nu}{2}, \qquad \theta=0\\ \Phi_\theta{}^K=0, \qquad \theta=-\beta\end{gathered} \tag{1.3}$$

Решение уравнения (1.3) с учетом условия на дне может быть записано следующим образом:

$$\Phi^K = M(\nu)\cos\nu(\theta+\beta)+\frac{\Phi_0\pi}{2\nu}\operatorname{cosec}\frac{\pi\nu}{2} \tag{1.4}$$

Подставим этот результат в условие на свободной поверхности задачи (1.3). Получим

$$\nu M(\nu)\sin\nu\beta + s\int\limits_0^\infty(\Phi-\Phi_0)K_\nu(pr)\,dr = -\frac{\pi s}{2p}\Phi_0\sec\frac{\pi\nu}{2}, \qquad \theta=0 \tag{1.5}$$

Сделаем в (1.5) замену $\nu\to(1+\nu)$, $\nu\to(1-\nu)$ и вычтем второй результат из первого. Тогда придем к функциональному уравнению

$$\Psi(1+\nu)\sin(1+\nu)\beta+\Psi(1-\nu)\sin(1-\nu)\beta+2\cos\alpha\Psi(\nu)\cos\nu\beta=0$$

где $\Psi(\nu)=\nu\sin\pi\nu M(\nu)$, $\cos\alpha=-s/p$, $\alpha$ — комплексный параметр.

Решение этого функционального уравнения может быть записано в виде суммы двух частных линейно независимых решений. В случае $\beta=\pi/2n$, $n$ — целое, на основании [5] получим

$$\begin{gathered}\Psi = \sum_{\varkappa=0}^{1}\sum_{k=1}^{n} C^{(\varkappa)}b_k^{(\varkappa)}\cos\left[(2k-1)\beta-\frac{3\pi}{2}-(-1)^\varkappa\alpha\right]\nu\\ b_k^{(\varkappa)} = (-1)^{n-k}\prod_{\sigma=1}^{n-k}\operatorname{ctg}\sigma\beta\operatorname{ctg}[\sigma\beta+(-1)^\varkappa\alpha]\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь $C^{(\varkappa)}$ — произвольные константы. Принимая во внимание формулу обращения Конторовича — Лебедева, найдем выражение для $\Phi$

$$\Phi = -\frac{1}{\pi^2 i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \Psi(\nu)\cos\nu(\theta+\beta)K_\nu(pr)\,d\nu \tag{1.7}$$

Подставляя (1.6) в (1.7) и вводя обозначение $s=\sqrt{p^2-\mu^2}$, $\mu$ — комплексный параметр, получим выражение для собственных функций

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j,\varkappa=0}^{1}\sum_{k=1}^{n} C^{(\varkappa)} b_k^{(\varkappa)}\exp\{-r[\sqrt{p^2-\mu^2}\sin a_{kj}+(-1)^\varkappa\mu\cos a_{kj}]\}$$

$$b_k^{(\varkappa)} = (-1)^{n-k}\prod_{\sigma=1}^{n-k}\operatorname{ctg}\sigma\beta\,\frac{0{,}5p^2\sin 2\sigma\beta+(-1)^\varkappa\mu\sqrt{p^2-\mu^2}}{p^2\sin^2\sigma\beta-\mu^2} \tag{1.8}$$

$$a_{kj} = (-1)^j\theta+2(k-j)\beta$$

Положим в (1.8) $\mu=iq$, $q$ — вещественный параметр, $0\leqslant q<\infty$ (при этом $s=s_c=\sqrt{p^2+q^2}$), и определим значения констант $C^{(\varkappa)}$ из условия согласования (1.8) с выражением для собственных функций соответствующей плоской задачи [3, 6]

$$C^{(\varkappa)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left[(-1)^\varkappa i\frac{\pi}{4}(n-1)\right]\prod_{\sigma=1}^{n-1}(p^2\sin^2\sigma\beta+q^2)^{1/2}[(p+s_c)^{n-1}]^{-1}$$

Тогда придем к выражению для собственных функций непрерывного спектра

$$\Phi^{(c)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sum_{j,\varkappa=0}^{1}\sum_{k=1}^{n} B_k^{(\varkappa)}\exp A_{kj}^{(\varkappa)} \tag{1.9}$$

$$B_k^{(\varkappa)} = \frac{(-1)^{n-k}}{(p+s_c)^{n-1}}\prod_{\sigma=1}^{n-1}(p^2\sin^2\sigma\beta+q^2)^{-1/2}\prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1}(p^2\sin^2\sigma\beta+q^2)\times$$

$$\times\prod_{\sigma=1}^{n-k}\operatorname{ctg}\sigma\beta\left[\frac{1}{2}p^2\sin 2\sigma\beta+(-1)^\varkappa iqs_c\right]$$

$$A_{kj}^{(\varkappa)} = -rs_c\sin a_{kj}+(-1)^\varkappa i\left[-rq\cos a_{kj}+\frac{\pi}{4}(n-1)\right]$$

Соответствующие собственные значения непрерывно распределены на вертикальной оси в промежутке $(i0,\ i\infty)$ комплексной плоскости параметра $\mu$. Асимптотика функций $\Phi^{(c)}$ при $q\to\infty$ имеет осциллирующий характер.

Пусть $\mu=\mu_l=p\sin l\beta$, $l=1, 2, \ldots n-1$

$$C^{(\varkappa)} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\prod_{\sigma=1}^{n-1}(\sin^2\sigma\beta-\sin^2 l\beta)$$

тогда приходим к выражению для собственных функций дискретного спектра

$$\Phi_l^{(d)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=1}^{n-l} B_{kl}\exp\{-rp\sin(a_{kj}+l\beta)\} \tag{1.10}$$

$$B_{kl}=(-1)^{n-k}\prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1}\sin(\sigma-l)\beta\sin(\sigma+l)\beta\prod_{\sigma=1}^{n-k}\operatorname{ctg}\sigma\beta\sin(\sigma+l)\beta\cos(\sigma-l)\beta$$

Собственные значения $\mu_l$, соответствующие функциям (1.10), распределены на промежутке $(0,\ p)$ вещественной оси плоскости $\mu$. Асимптотика (1.10) имеет экспоненциально затухающий характер, параметр $s$ определяется по формуле $s=s_d=p\cos l\beta$. Отметим, что выражение для $\Phi^{(c)}$ согласуется с потенциалом стоячих волн, приведенным в [3], $\Phi_l^{(d)}$ является обобщением потенциала для краевой волны Стокса [3].

Введем в рассмотрение функции $Q$ и $Q_l$, представляющие собой значения собственных функций на свободной границе

$$Q(q,p,x)=\Phi^{(c)}(\theta=0),\qquad Q_l(px)=\Phi_l^{(d)}(\theta=0)$$

Путем анализа выражения (1.9) можно установить оценку

$$|Q|\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\prod_{\sigma=1}^{n-k}\operatorname{ctg}\sigma\beta \tag{1.11}$$

указывающую на ограниченность функции $Q$, и получить выражение для асимптотики $Q_\infty=Q(q\to\infty,\ p,\ x)$

$$Q_\infty(qx)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(qx+\frac{n-1}{4}\pi\right) \tag{1.12}$$

**2. Формула разложения.** Основное содержание настоящего раздела составляет

*Теорема.* Пусть $f(x)$ — заданная функция, определенная в промежутке $(0,\ \infty)$ — кусочно-непрерывна, абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию в области определения. Тогда справедливо разложение

$$f(x)=\int_0^\infty Q(q,x)\,dq\int_0^\infty f(\xi)Q(q,\xi)\,d\xi+p\sum_{l=1}^{n-1}\varepsilon_l Q_l(px)\int_0^\infty f(\xi)Q_l(p\xi)\,d\xi \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_l=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{2^{2n}\left(\cos\frac{l\beta}{2}\right)^{4n-3}\sin\frac{l\beta}{2}\prod_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq l}}^{n-1}(\sin^2\sigma\beta-\sin^2 l\beta)\right\}^{-1}$$

$$n=2m+1,\qquad m=0,1,2,\ldots$$

Для доказательства теоремы рассмотрим интеграл

$$J(T,x)=\int_0^T Q(q,x)\,dq\int_0^\infty f(\xi)Q(q,\xi)\,d\xi \tag{2.2}$$

В силу равномерной сходимости внутреннего интеграла по параметру $q$, которая следует из мажорантной оценки (1.11), можно изменить порядок интегрирования, тогда (2.2) примет вид

$$J(T,x)=\int_0^\infty f(\xi)D(x,\xi,T)\,d\xi,\qquad D=\int_0^T Q(q,x)Q(q,\xi)\,dq \tag{2.3}$$

Преобразуем выражение для $D$. Введем функцию

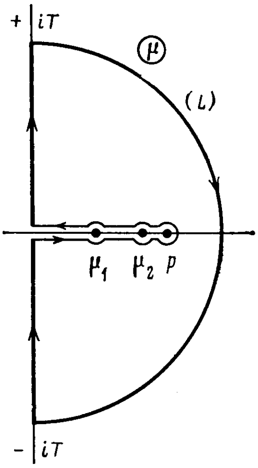
$$Q_+=\sqrt{\pi}\prod_{\sigma=1}^{n-1}(p^2\sin^2\sigma\beta+q^2)^{1/2}Q$$

примем во внимание четность подынтегрального выражения и перейдем к новой переменной интегрирования $\mu = iq$, тогда получим

$$D = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-iT}^{+iT} Q_+(\mu, x) Q_+(\mu, \xi) \Lambda(\mu) \, d\mu$$

$$\Lambda = \prod_{\sigma=1}^{n-1} (p^2 \sin^2 \sigma\beta - \mu^2)^{-1} \tag{2.4}$$

Подынтегральное выражение (2.4) представляет собой аналитическую функцию параметра $\mu$ внутри замкнутого контура, показанного на фигуре для случая $n=3$, и имеет конечное число полюсов первого порядка в точках $\mu = \mu_l$. Контур составлен из участка вертикальной оси $(-iT, -i0)$, берегов разреза $(0, p)$, окружностей малого радиуса, проведенных вблизи особых точек (полюсов $\mu = \mu_l$, точки ветвления $\mu = p$), и дуги большого радиуса $(L)$. Перейдем к интегрированию по этому контуру. Для вычисления (2.4) воспользуемся теоремой Коши и учтем, что на берегах разреза $Q_+ = 0$ при $\mu \neq \mu_l$, $Q_+$ регулярна в окрестности точки $\mu = p$. Тогда получим




$$D = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L)} Q_+(\mu, x) Q_+(\mu, \xi) \Lambda(\mu) \, d\mu -$$

$$- \sum_{l=1}^{n-1} \operatorname{Res} \{ Q_+(\mu, x) Q_+(\mu, \xi) \Lambda(\mu) \}_{\mu=\mu_l} \tag{2.5}$$

При вычислении вычетов в (2.5) примем во внимание равенство

$$Q_+(p \sin l\beta, x) =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \exp \left[ i \frac{\pi}{4} (n-1) \right] \left( \sec^2 \frac{l\beta}{2} \right)^{n-1} Q_l(px)$$

Перейдем в (2.5) к пределу $T \to \infty$, при этом в интеграл по $L$ подставим асимптотики (1.12)

$$D(x, \xi, \infty) = -p \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l Q_l(px) Q_l(p\xi) - \frac{1}{2i} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{(L)} Q_\infty(\mu x) Q_\infty(\mu \xi) \, d\mu$$

Интеграл по дуге $L$ может быть представлен следующим образом:

$$\frac{1}{2i} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{(L)} Q_\infty(\mu x) Q_\infty(\mu\xi) \, d\mu = \frac{1}{\pi i} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{+\pi/2}^{-\pi/2} \left[ \cos^2 \frac{n-1}{4} \pi \operatorname{ch} \mu x \operatorname{ch} \mu\xi - \right.$$

$$\left. - \sin^2 \frac{n-1}{4} \pi \operatorname{sh} \mu x \operatorname{sh} \mu \xi + \frac{1}{2} i \sin \frac{n-1}{2} \pi \operatorname{sh} \mu (x+\xi) \right] d\mu$$

$$\mu = T \exp(i\gamma), \qquad \gamma \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Переходя к переменной $u = \exp(i\gamma)$ и выполняя интегрирование, получим

$$-\frac{1}{2i} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{(L)} Q_\infty(\mu x) Q_\infty(\mu\xi) \, d\mu = \frac{1}{\pi} \lim_{T \to \infty} \frac{\sin T(x-\xi)}{x-\xi} +$$

$$+ \frac{(-1)^m}{\pi} \lim_{T \to \infty} \frac{\sin T(x+\xi)}{x+\xi} = \delta(x-\xi)$$

где $\delta$ – функция Дирака.

Отсюда следует выражение

$$D(x,\xi,\infty)=\delta(x-\xi)-p\sum_{l=1}^{n-1}\varepsilon_l Q_l(px)Q_l(p\xi) \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.3), придем к искомому результату (2.1). Отметим, что формула разложения (2.1) при $p=0$ согласуется с соответствующим плоским аналогом [3, 6].

**3. Нестационарная функция Грина. Точное решение.** Нестационарная функция Грина $G$ является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered}\Delta G=-\frac{1}{r}\delta(r-r_0,\theta-\theta_0,z-z_0)H(t-\tau),\quad 0<r<\infty,\quad -\beta<\theta<0,\quad |z|<\infty\\ g\frac{1}{r}G_\theta+G_{tt}=0,\quad \theta=0;\quad G_\theta=0,\quad \theta=-\beta\\ G=G_t=0,\quad \theta=0,\quad t=\tau\\ G\to0,\quad \sqrt{r^2+z^2}\to\infty;\quad G<\infty,\quad r\to0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $H$ — функция Хевисайда.

Применим к (3.1) интегральное преобразование Лапласа с параметром $\omega$ по аргументу $(t-\tau)$ и запишем изображение функции Грина в виде $G^L=G_1{}^L+G_2{}^L$, тогда получим две краевые задачи

$$\begin{gathered}\Delta G_1{}^L=-\frac{1}{r\omega}\delta(r-r_0,\theta-\theta_0,z-z_0)\\ G_1{}^L=0,\quad\theta=0;\quad G_{1\theta}{}^L=0,\quad\theta=-\beta\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\Delta G_2{}^L=0\\ G_{2\theta}{}^L+r\frac{\omega^2}{g}G_2{}^L=-G_{1\theta}{}^L,\quad\theta=0;\quad G_{2\theta}{}^L=0,\quad\theta=-\beta\end{gathered} \tag{3.3}$$

Будем считать функции $f_+$, $f_-$ четными по $z$, тогда, применяя к (3.2) косинус-преобразование Фурье с параметром $p$ по $z$ и преобразование Конторовича — Лебедева с параметром $\nu$ по $r$, получим

$$G_1^{LFK}=-\frac{K_\nu(pr_0)}{\omega\nu}\cos pz_0\frac{\sin\nu\theta\cos\nu(\theta_0+\beta)}{\cos\nu\beta},\quad 0\leqslant|\theta|\leqslant|\theta_0| \tag{3.4}$$

Объединяя краевое условие при $\theta=0$ (3.3) и (3.4), приходим к равенству

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}G_{2\theta}{}^{LF}+\frac{\omega^2}{g}G_2{}^{LF}=\\ =-\frac{1}{\pi^2 i}\frac{\cos pz_0}{\omega r}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\cos\nu(\theta_0+\beta)}{\cos\nu\beta}K_\nu(pr_0)K_\nu(pr)\sin\pi\nu\,\nu\,d\nu\end{gathered} \tag{3.5}$$

Будем искать $G_2{}^{LF}$ в виде

$$G_2{}^{LF}=\int_0^\infty E(q,p)\Phi^{(c)}(q,p)\,dq+\sum_{l=1}^{n-1}E_l(p)\Phi_l^{(d)}(p) \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в (3.5), придем к интегральному уравнению первого рода относительно функций $E$, $E_l$, решение которого следует из формулы (2.1):

$$E=-\frac{\cos pz_0}{\pi^2 i\omega}\frac{1}{(s_c+\omega^2g^{-1})}\int_0^\infty Q(q,\xi)\frac{K_\nu(p\xi)}{\xi}d\xi\times$$

$$\times \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos\nu(\theta_0+\beta)}{\cos\nu\beta} \sin\pi\nu\, K_\nu(pr_0)\,\nu\, d\nu$$

Аналогичное соотношение для $E_l$ не выписываем.

Применяя зависимости (1.4), (1.7), найдем выражения

$$E=\frac{\cos pz_0}{\omega(s_c+\omega^2 g^{-1})}\Phi^{(c)}(r_0,\theta_0), \qquad E_l=p\varepsilon_l\frac{\cos pz_0}{\omega(s_d+\omega^2 g^{-1})}\Phi_l^{(d)}(r_0,\theta_0)$$

Выполним обращение (3.6) по Лапласу и Фурье, тогда получим

$$G(\theta=0)=\frac{2}{\pi}\iint_0^\infty \cos pz_0 \Phi^{(c)}(r_0,\theta_0)s_c^{-1}I_c Q(q,x)\cos pz\, dp\, dq+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{n-1}\varepsilon_l\int_0^\infty \cos pz_0\Phi_l^{(d)}(r_0,\theta_0)s_d^{-1}I_d Q_l(px)\cos pz\, p\, dp \tag{3.7}$$

$$I=1-\cos\sqrt{gs}(t-\tau)$$

Выражение (3.7) дает возможность на основании [4] получить точное решение задачи (1.1)

$$\zeta=-\frac{1}{g}\iint_0^\infty\left\{G_{\tau t}(\theta=\theta_0=\tau=0)f_+(r_0,z_0)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t G_{\tau t}(\theta=0,\theta_0=-\beta)f_-(r_0,z_0,\tau)\,d\tau\right\}dr_0\,dz_0 \tag{3.8}$$

**4. Задача Коши — Пуассона. Асимптотическое решение.** Будем считать $f_-=0$, тогда из (3.8) получим решение задачи Коши — Пуассона

$$\zeta=\frac{2}{\pi}\iint_0^\infty f^*\cos(t\sqrt{gs_c})Q(q,p,x)\cos pz\, dp\, dq+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{n-1}\varepsilon_l\int_0^\infty f_l^*\cos(t\sqrt{gs_d})Q_l(px)\cos pz\, p\, dp \tag{4.1}$$

$$f^*(p,q)=\iint_0^\infty f_+(r,z)Q(q,p,r)\cos pz\, dr\, dz$$

$$f_l^*(p)=\iint_0^\infty f_+(r,z)Q_l(pr)\cos pz\, dr\, dz$$

В случае $f_+=W\delta(x-x_+,z)$ (4.1) запишем в виде

$$\zeta=\zeta_c+\zeta_d \tag{4.2}$$

$$\zeta_c=\frac{2W}{\pi}\iint_0^\infty\cos(t\sqrt{gs_c})Q(q,p,x)Q(q,p,x_+)\cos pz\, dp\, dq$$

$$\zeta_d = \frac{2W}{\pi}\sum_{l=1}^{n-1}\varepsilon_l\int_0^\infty \cos(t\sqrt{gs_d})\,Q_l(px)\,Q_l(px_+)\cos pz\,p\,dp$$

Выполним асимптотический анализ (4.2) путем применения метода стационарной фазы. Введем полярные координаты

$$x=R\cos\lambda,\quad z=R\sin\lambda,\quad q=\rho\cos\Omega\quad p=\rho\sin\Omega,\quad \lambda\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\Omega\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

и новую переменную $\varkappa=2R\sqrt{\rho}/\sqrt{gt}$. Тогда приведем выражение для $\zeta_c$ к виду

$$\zeta_c=\frac{W}{8\pi^2}\frac{\eta^2}{R^2}\sum_{j,j'=0}^{1}\sum_{\chi,\chi'=0}^{1}\sum_{k,k'=1}^{n}\exp\left\{i\frac{\pi}{4}(n-1)\left[(-1)^\chi+(-1)^{\chi'}\right]\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}B_k^{(\chi)}B_{k'}^{(\chi')}\exp(i\eta N_c)\exp\left(-\frac{\varkappa^2}{R}\eta V\right)\varkappa^3\,d\varkappa\,d\Omega$$

$$N_c=-\varkappa^2\left(\frac{U\cos\Omega}{R}\pm\sin\Omega\sin\lambda\right)\mp2\varkappa,\qquad \eta=\frac{gt^2}{4R}\tag{4.3}$$

$$V=R\cos\lambda\sin2(k-j)\beta+x_+\sin2(k'-j')\beta$$

$$U=(-1)^\chi R\cos\lambda\cos2(k-j)\beta+(-1)^{\chi'}x_+\cos2(k'-j')\beta$$

Символ $\exp(i\eta N_c)$ представляет собой сумму экспонент с показателями, соответствующими четырем комбинациям знаков в $N_c$. Определим координаты стационарной точки

$$\varkappa_0=\frac{R|U|}{\cos\Omega_0(U^2+R^2\sin^2\lambda)},\qquad \operatorname{tg}\Omega_0=\frac{R\sin\lambda}{|U|}$$

Применяя метод стационарной фазы к (4.3) согласно [7], получим

$$\zeta_c\simeq\frac{W}{4\sqrt{2}\,\pi}\frac{\eta}{R^2}\sum_{j,j'=0}^{1}\sum_{\chi,\chi'=0}^{1}\sum_{k,k'=1}^{n}\varkappa_0^3B_k^{(\chi)}(\Omega_0)B_{k'}^{(\chi')}(\Omega_0)\exp\{Y(\Omega_0)\}$$

$$B_k^{(\chi)}(\Omega_0)=\frac{(-1)^{n-k}}{(1+\sin\Omega_0)^{n-1}}\prod_{\sigma=1}^{n-1}(\sin^2\Omega_0\sin^2\sigma\beta+\cos^2\Omega_0)^{-1/2}\times$$

$$\times\prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1}(\sin^2\Omega_0\sin^2\sigma\beta+\cos^2\Omega_0)\times$$

$$\times\prod_{\sigma=1}^{n-k}\operatorname{ctg}\sigma\beta\left[\frac{1}{2}\sin^2\Omega_0\sin^2\sigma\beta+(-1)^\chi i\cos\Omega_0\right]$$

$$Y=i\left[\varkappa_0\eta+\frac{\pi}{4}(n-1)\left((-1)^\chi+(-1)^{\chi'}\right)+\frac{\pi}{2}\right]-\frac{\varkappa_0^2}{R}\eta V$$

Для вычисления составляющей $\zeta_d$ введем переменную $\varkappa_1=(2z\sqrt{p})/\sqrt{gt}$

$$\zeta_d=\frac{2W}{\pi}\frac{\eta_1^2}{z^2}\sum_{l=1}^{n-1}\varepsilon_l\int_0^\infty\cos(\eta_1N_d)\,Q_l\left(\frac{\eta_1x}{z}\varkappa_1^2\right)Q_l\left(\frac{\eta_1x_+}{z}\varkappa_1^2\right)\varkappa_1^3\,d\varkappa_1\tag{4.4}$$

$$N_d = 2\varkappa_1\sqrt{\cos l\beta} - \varkappa_1^2, \qquad \eta_1 = \frac{gt^2}{4z}$$

Применяя к (4.4) метод стационарной фазы и переходя к переменным $R$, $\lambda$, получим

$$\zeta_d \simeq \frac{2W}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta^{3/2}}{R^2(\sin\lambda)^{7/2}} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l Q_l \left(\eta \frac{\operatorname{ctg}\lambda}{\sin\lambda}\cos l\beta\right) \times$$

$$\times Q_l \left(\frac{\eta x_+}{R\sin^2\lambda}\cos l\beta\right)(\cos l\beta)^{1/2} \cos\left(\eta\frac{\cos l\beta}{\sin\lambda} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \lambda \neq 0 \qquad (4.5)$$

$$\zeta_d \simeq 0, \qquad \lambda = 0$$

Анализ представления (4.5) показывает, в частности, что составляющая волнового поля, обусловленная функциями дискретного спектра, локализована в прибрежной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М. В.* К задаче об отражении волн на поверхности тяжелой жидкости.— В кн.: Тр. конф. по теории волнового сопротивления. М.: Изд-во ЦАГИ, 1937, с. 140—142.
2. *Дорфман А. А.* О неустановившихся волновых движениях жидкости над наклонным дном.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 6, с. 65—70.
3. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
4. *Стокер Д. Д.* Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 618 с.
5. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Некоторые задачи теории теплопроводности для клиновидных тел. 2.— Журн. техн. физ., 1964, т. 34, вып. 9, с. 1556—1565.
6. *Васильев Б. А.* Решение стационарной задачи теории теплопроводности для клиновидных тел при граничном условии 3-го рода.— Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 3, с. 531—537.
7. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
29.III.1985