

УДК 533.6.011.55

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ
ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ И АНАЛИЗЕ
АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ АСИММЕТРИЧНЫХ
ТЕЛ**

СКИБА Г. Г., ЦАРЬКОВ А. Н.

В работе [1] дано обоснование линейного метода аэродинамической эквивалентности (АЭ) и представлены результаты расчетов аэродинамических характеристик (АДХ) некоторых асимметричных (неосесимметричных) тел, несущественно отличающихся от осесимметричных.

В данной работе представлен нелинейный метод АЭ. Метод основывается на принципе эквивалентности двух тел, одно из которых имеет произвольную форму поперечного сечения, а второе — форму сечения, описываемую гладкой функцией. Эта функция представляет собой сумму $N+1$ первых членов ряда Фурье исходной (разрывной) функции, описывающей форму тела.

На некоторых примерах для звездообразных тел показана работоспособность метода АЭ. Проведены оценки точности получаемых результатов и сравнения с экспериментальными данными. Показано также, что метод АЭ дает возможность простого объяснения с новых позиций некоторых результатов аэродинамики.

1. Постановка задачи. Рассматривается пространственное движение асимметричного тела в невязком нетеплопроводном газе. Введена декартова правая система координат XYZ (см. фиг. 1), которой соответствует цилиндрическая система координат $XR\varphi$, используемая при численном интегрировании газодинамической системы уравнений.

Движение газа относительно тела описывается трехмерной стационарной системой уравнений

$$(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + \nabla p / \rho = 0, \quad \rho a^2 \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \nabla p = 0 \quad (1.1)$$

$$i = i' / 2 + i_\infty - V^2 / 2, \quad \rho = \rho(p, i), \quad a^2 = a^2(p, i)$$

где \mathbf{V} , p , ρ , a , i — соответственно вектор скорости, давление, плотность, скорость звука и энтальпия газа. Индексом ∞ отмечаются параметры невозмущенного потока.

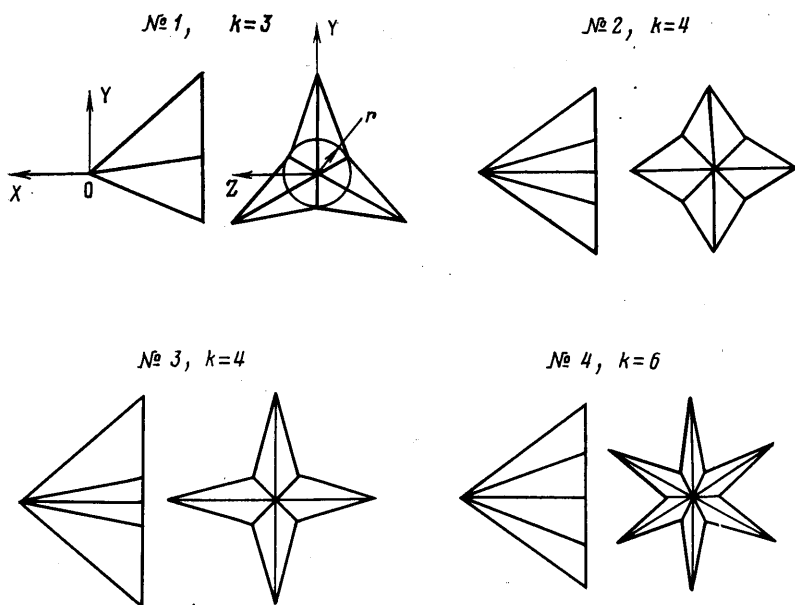
Граничное условие на поверхности тела, заданной искомой функцией $R = G_i(X, \varphi)$, записывается следующим образом:

$$\mathbf{V} \nabla G_i = 0 \quad (1.2)$$

Функция $G_i(X, \varphi)$ определяется в процессе решения задачи.

Граничные условия на поверхности головной ударной волны (UB), заданной искомой функцией $R = R_B(X, \varphi)$, представлены в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} + \mathbf{V}_e) \boldsymbol{\tau}_1 = 0, \quad (\mathbf{V} + \mathbf{V}_e) \boldsymbol{\tau}_2 = 0 \\ \rho_\infty (\mathbf{V}_e \mathbf{n}) = -\rho (\mathbf{V} \mathbf{n}) \\ p_\infty + \rho_\infty (\mathbf{V}_e \mathbf{n})^2 = p + \rho (\mathbf{V} \mathbf{n})^2 \\ (\mathbf{V}_e \mathbf{n})^2 / 2 + i_\infty = (\mathbf{V} \mathbf{n})^2 / 2 + i \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Здесь $V_e = V_0$ — вектор переносной скорости; τ_1 и τ_2 — взаимно перпендикулярные векторы, расположенные в касательной к поверхности волны плоскости; $n = \nabla R_B / |\nabla R_B|$ — внешняя единичная нормаль к поверхности головной УВ.

Параметры V , p , ρ , i , a в системе уравнений (1.1) и граничных условиях (1.2), (1.3) представлены в безразмерном виде.

2. О методе решения задачи. Функция $R = R_T(X, \varphi)$, описывающая форму поверхности асимметричного тела, считается известной. В результате интегрирования системы уравнений (1.1) при граничных условиях (1.2), (1.3) могут быть определены распределение давления на поверхности тела $p(X, \varphi)$ и соответствующие аэродинамические коэффициенты.

В данной работе решение задачи проводится на основе метода АЭ. Метод АЭ заключается в том, что ограниченные (в общем случае разрывные) периодические по φ функции $p(X, \varphi)$ и $R_T(X, \varphi)$, разложенные в ряды Фурье и подставленные в интегральные соотношения для аэродинамических коэффициентов, приводят к выводу о существовании другого асимметричного, но гладкого тела. Это гладкое тело эквивалентно исходному в смысле равенства соответствующих аэродинамических коэффициентов с определенной, заранее оговариваемой точностью (в рамках математической модели).

Не снижая общности метода АЭ, будем предполагать, что функция $R_T(X, \varphi)$ — четная по φ . Представив ее рядом Фурье, получаем

$$R_T(X, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n\varphi) \quad (2.1)$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} R_T(X, \varphi) d\varphi, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} R_T(X, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi$$

В общем интегральные выражения для аэродинамических коэффициентов (см., например, [1]) входят значения $\partial R_T / \partial X$, $\partial R_T / \partial \varphi$. Предполагается, что значения производных $\partial R_T / \partial X$, $\partial R_T / \partial \varphi$ определяются следую-

ЦИМИ СООТНОШЕНИЯМИ:

$$\frac{\partial R_T(X, \varphi)}{\partial X} \approx \sum_{n=0}^N \frac{db_n}{dX} \cos(n\varphi) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial R_T(X, \varphi)}{\partial \varphi} \approx - \sum_{n=0}^N [nb_n \sin(n\varphi)]$$

Проиллюстрируем основные положения метода АЭ на примере расчета аэродинамического коэффициента нормальной силы

$$C_y = \frac{1}{qS} \int \int_{(L) 0}^{2\pi} (p - p_\infty) \left(R_T \cos \varphi + \frac{\partial R_T}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) dX d\varphi \quad (2.3)$$

В общем случае пространственного движения тела

$$p - p_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} [p_n \cos(n\varphi) + p_n' \sin(n\varphi)] \quad (2.4)$$

Подстановка (2.1), (2.2), (2.4) в (2.3) приводит к громоздкому соотношению, которое после интегрирования по φ существенно упрощается и принимает вид

$$C_y = \frac{\pi}{qS} \int_{(L)} \left\{ p_1 b_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n [(n+1)p_{n+1} - (n-1)p_{n-1}] \right\} dX \quad (2.5)$$

Исходному телу аэродинамически эквивалентно гладкое тело с уравнением поверхности

$$G_T = \sum_{n=0}^N b_n \cos(n\varphi)$$

Значение N определяется в процессе решения задачи в зависимости от требуемой точности (чем выше точность, тем больше N).

Если ввести малый параметр ε так, что

$$G_T = b_0 + \varepsilon \sum_{n=1}^N b_n \cos(n\varphi)$$

$$p - p_\infty = p_0 + \varepsilon \sum_{n=1}^N [p_n^\varepsilon \cos(n\varphi) + p_n'^\varepsilon \sin(n\varphi)]$$

и провести линейризацию по ε , приходим к линейному варианту метода АЭ. В этом случае на значение C_y могут оказать влияние только b_0 , b_1 и p_0 , p_1 (на коэффициент аэродинамической продольной силы C_x основное влияние оказывают только b_0 и p_0). Исходному телу аэродинамически эквивалентно другое гладкое тело с уравнением поверхности $G_T = b_0 + b_1 \cos \varphi$.

Применение метода АЭ дает ряд преимуществ: не требуется проводить сглаживание контура; используется равномерная сетка во всем диапазоне изменения φ ; не требуется вносить каких-либо изменений в программу для ЭВМ при переходе от одной формы тела к другой. Причем какова бы не была форма поперечных сечений различных асимметричных тел, если для них первые два коэффициента Фурье функции $R_T(X, \varphi)$ одинаковые, им будет соответствовать одно и то же эквивалентное тело.

Поэтому через посредство эквивалентных тел может быть описана аэродинамика большого многообразия асимметричных тел. Если же рассматриваются классы тел, характеризующиеся одинаковыми значениями первых коэффициентов $b_0(X)$ и различными значениями других коэффициентов Фурье, то достаточно определить АДХ только одного класса асимметричных тел. Для других классов тел АДХ определяется в этом случае простым пересчетом.

Указанные свойства обеспечивают высокую универсальность метода АЭ.

Очевидно, что для устранения ошибок в значениях аэродинамических коэффициентов, обусловленных линеаризацией систем уравнений, можно провести расчет АДХ асимметричных тел на основе нелинейного метода АЭ, сохраняя не два, а $N+1$ членов ряда Фурье. В системе уравнений (1.1)–(1.3) перейдем к другой независимой переменной, выбранной таким образом, чтобы расчетная область имела фиксированные границы, не зависящие от решения, и подставим соотношения (2.1), (2.2) в преобразованные соответствующим образом систему уравнений (1.1) и граничные условия (1.2), (1.3).

В результате численного интегрирования системы уравнений определяются необходимые газодинамические параметры в расчетной области. Аэродинамические коэффициенты находятся из общих интегральных соотношений.

Разработанный алгоритм обеспечивает определение АДХ как притупленных, так и острых тел. Решение для острых конических тел находится путем установления по координате X .

Интегрирование систем уравнений в окрестности притупления осуществляется методом прямых [2]. В области гиперболичности систем уравнений решение определялось методом сеток [3].

3. Результаты и их анализ. Сравнения с экспериментальными данными. Метод АЭ может рассматриваться как дальнейшее развитие известного метода эквивалентных площадей (ЭП) (см., например, [4] и в ней соответствующие ссылки на литературу). Точность метода АЭ выше по сравнению с указанным методом. Проиллюстрируем это утверждение на примере обтекания острых конусов с различными формами поперечных сечений, показанными на фиг. 2. Число Маха $M=5$, угол полураствора кругового конуса $\gamma=20^\circ$. Площади донных сечений всех тел одинаковые и в соответствии с методом ЭП коэффициенты волнового сопротивления должны быть равны между собой.

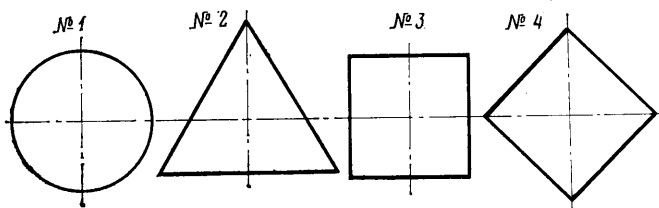
Анализ результатов, полученных методом АЭ (см. ниже), показывает, что различия в значениях аэродинамических коэффициентов связаны с различиями в форме тел. Эти различия характеризуют точность метода ЭП. Сказанное подтверждают также результаты из работы [4], полученные методом установления. Сопоставление с ними результатов данной работы характеризует сравнительную точность метода АЭ. Соответствующие значения C_x^b равны:

Формы поперечных сечений	№ 1	№ 2	№ 3
Данная работа	0,261	0,257	0,248
[4]	0,261	0,255	0,251

Метод ЭП обеспечивает определение только коэффициента волнового сопротивления C_x^b . Метод же АЭ позволяет определить наряду с C_x^b и другие АДХ, например производную коэффициента нормальной силы по углу атаки C_y^α и коэффициент центра давления C_d . Линейный метод АЭ был обобщен на случай нестационарного движения и обеспечивает определение также нестационарных АДХ. Результаты расчетов для указанных выше условий представлены ниже.

Формы поперечных сечений	№ 2	№ 3	№ 4
C_x^b	0,248	0,257	0,257
C_y^α	1,882	1,938	1,864
C_d	0,732	0,737	0,740

Здесь следует обратить внимание на совпадение значений C_x^b форм № 3 и 4, что свидетельствует о высокой точности метода АЭ. Форма № 4 получается путем поворота на угол 90° вокруг продольной оси формы № 3.



Фиг. 2

Поэтому теоретически при малых α коэффициенты C_x^b указанных форм должны быть равны между собой.

Для обеспечения сравнительного анализа методов АЭ и ЭП необходимо записать формулу для площади донного сечения. Эта площадь для произвольного асимметричного тела равна

$$S = \pi \left(b_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \right) \quad (3.1)$$

Метод ЭП появился в 50-е годы в результате анализа экспериментального обтекания фюзеляжей с тонкими несущими поверхностями. В таких случаях вклад

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$$

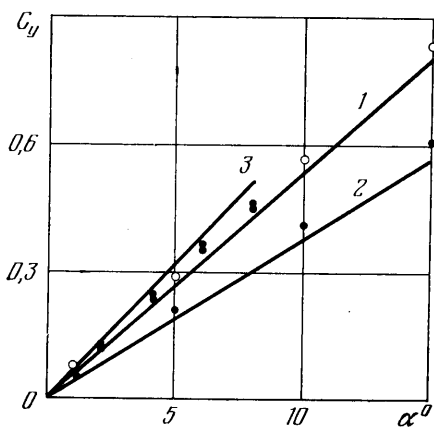
в величину площади невелик и $S \approx \pi b_0^2$, что и привело к ошибочному выбору в качестве критерия эквивалентности не $b_0(x)$, а площади $S(X)$. Так как допускаемая при этом погрешность несущественно влияет только на значения C_x^b (ниже это будет проиллюстрировано на примере звездообразных тел с различным количеством лепестков k), то в дальнейшем метод ЭП трактовался как приближенный метод определения C_x .

В работах [5, 6] экспериментально исследовались АДХ нескольких моделей звездообразных тел (фиг. 1). Все модели имели одинаковые длины и площади миделя, равные по величине длине и площади миделя кругового конуса с углом полураствора $\gamma = 21^\circ$ (длина $l = 65$ мм, площадь миделя $S = \pi R^2 = 19,6$ см²). Модели отличаются внутренним радиусом r (см. фиг. 1 для тела № 1 $r = 15$ мм, для тела № 2 $r = 20$ мм). Весовые испытания проводились на механических весах сверхзвуковой аэродинамической трубы А-8.

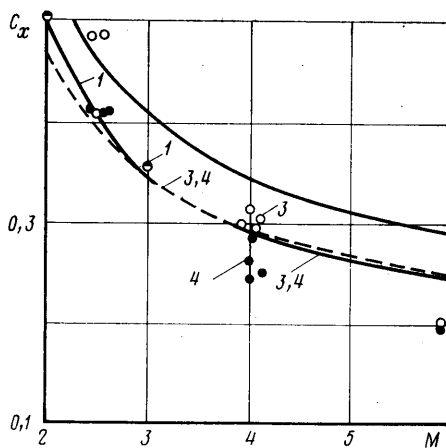
В работе [7] экспериментально исследовались модели с внутренними радиусами $r = 13,05$ и $12,8$ мм (фиг. 1, тела № 3, 4). Модели имели длину и площадь миделя, равные по величине длине и площади миделя кругового конуса с углом полураствора $\gamma = 21^\circ 36'$ ($l = 65,5$ мм, $S = 21$ см²).

В данной работе проведены расчеты АДХ тел с аналогичными звездообразными поперечными сечениями, при учете первых $N+1$ членов ряда Фурье разложения исходной функции $R_T(X, \varphi)$. Результаты расчетов и соответствующие им экспериментальные значения АДХ представлены на фиг. 3, 4.

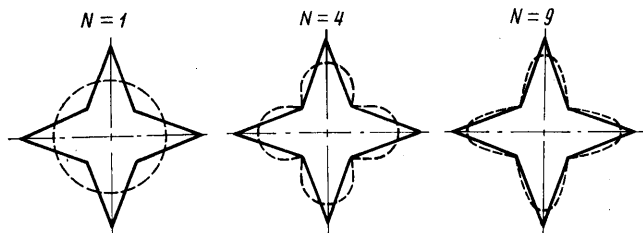
На фиг. 3 показаны зависимости коэффициента нормальной силы C_y от угла атаки α . Точками представлены результаты эксперимента [5, 7]. Номера графиков соответствуют номерам тел на фиг. 1. Для тела № 1 результаты получены при числе $M = 2$, для тела № 2 — при $M = 3$ и для



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

тела № 3 — при $M \approx 6$. Теоретические значения C_y определены при $N=9$ для тел № 1, 2 и $N=4$ для тела № 3.

На фиг. 4 показаны зависимости коэффициента продольной силы C_x от числа M при $\alpha \approx 0$ (в теоретических значениях C_x учтены донное сопротивление и силы трения).

Проведены систематические расчеты АДХ притупленного по сфере тела со звездобразным поперечным сечением ($k=4$) при $M \approx 6$, $\alpha \leq \gamma$ и $N \leq 9$. На фиг. 5 показана исходная форма поперечного сечения звездобразного тела (сплошная кривая), а также формы поперечных сечений эквивалентных тел, получаемые при разложении исходной функции R_T в ряд Фурье (пунктирные кривые). Соответствующие этим телам результаты расчетов представлены в таблице (m_z — коэффициент момента тангажа, начало системы координат XYZ в центре сферы притупления).

N	C_x^b	C_y	m_z	C_d	$\Delta C_x^b, \%$	$\Delta C_y, \%$	$\Delta m_z, \%$	$\Delta C_d, \%$
1	0,1765	0,0137	-0,0087	0,7779	0,7	40,2	38,3	2,5
4	0,1760	0,0216	-0,0134	0,7632	0,4	5,7	5,0	0,6
9	0,1753	0,0229	-0,0141	0,7586	0,0	0,0	0,0	0,0

Анализ результатов показывает, что при использовании метода сеток (неконсервативная разностная схема без специального расширения области устойчивости) нелинейный метод АЭ позволяет проводить расчет АДХ звездобразных тел с довольно длинными лепестками при $N=9$ для $\alpha \leq 1^\circ$, при $N=4$ для $\alpha \leq 4^\circ$ и при $N=1$ — для $\alpha \leq \gamma$. В таблице приведены значения C_x^b , C_y , m_z и C_d для притупленных звездобразных тел (длина тел равна

семи радиусам притупления) при $\alpha=1^\circ$, $M \approx 6$, $N=1, 4, 9$. Показаны отличия значений АДХ при $N=1$ и 4 от значений при $N=9$.

Расчет АДХ тел, формы которых показаны на фиг. 1 (тела № 1, 2), при $N=9$ удается осуществить для $\alpha \leq 4^\circ$. Графические зависимости на фиг. 3 при $\alpha > 4^\circ$ получены на основе предположения о линейной зависимости коэффициента C_v от угла атаки α .

В последнее время внимание исследователей привлекают задачи определения аэродинамических форм тел, обеспечивающих минимальное сопротивление при определенных условиях. Сначала поиски ограничивались осесимметричными формами, а в конце 70-х годов начали интенсивно исследовать асимметричные формы.

Метод АЭ позволяет подойти к решению указанных задач с иных позиций, так как обеспечивает естественную аэродинамическую эквивалентность тел различных форм.

Проиллюстрируем сказанное на примере рассмотренной в работе [8] задачи об определении сопротивления тел звездообразной формы и сравнении его с сопротивлением эквивалентного по объему и длине кругового конуса. Применительно к этой задаче в работе [7] экспериментально исследовались модели с четырьмя и шестью лепестками, симметричными относительно продольной оси модели. Показано, что сопротивление тел звездообразной формы в несколько раз меньше сопротивления эквивалентного по объему и длине кругового конуса (верхняя сплошная кривая на фиг. 4).

В соответствии с методом АЭ рассматриваемая задача может быть сформулирована в более общем виде: в классе ограниченных периодических по φ разрывных функций $R=R_T(X, \varphi)$ определить значения коэффициентов b_n ряда Фурье

$$R_T(X, \varphi) \approx \sum_{n=0}^N b_n(X) \cos(n\varphi)$$

обеспечивающих максимальный объем по сравнению с объемом тела такой же длины, поверхность которого описывается функцией $R_T=b_0(X)$.

Для конических тел одинаковой длины об их объеме можно судить по величине площади донного сечения S (см. формулу (3.1)). Чем больше будет величина суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$$

(при равных b_0), тем больше будет объем тела. При этом сопротивление в соответствии с методом АЭ существенно изменяться не будет, так как на сопротивление тел основное влияние оказывает b_0 . Увеличение же объема путем увеличения b_0 будет приводить к увеличению сопротивления.

Если дополнительно предположить, что тело имеет поперечное сечение звездообразной формы, получаем частный случай сформулированной задачи. При этом формула для первого коэффициента Фурье, описывающая форму поверхности эквивалентного тела (острого кругового конуса), имеет вид

$$b_0(X) = \frac{Ak}{2\pi} \left[\int_0^{\pi/k} \frac{d\varphi}{\cos \varphi + \operatorname{ctg} \xi \sin \varphi} + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi/k} \frac{d\varphi}{\cos(2\pi/k - \varphi) + \operatorname{ctg} \xi \sin(2\pi/k - \varphi)} \right]$$

где $A = -55X/65,5$; k — количество лепестков звезды.

На фиг. 4 дан график значений C_x звездообразных тел (фиг. 1, тела № 3, 4), рассчитанных линейным (пунктир) и нелинейным (сплошная кривая) методами АЭ при условиях работы [7] (теоретические значения при четырех и шести лепестках практически совпадают). Точками показаны экспериментальные результаты из работы [7].

Как следует из данных фиг. 4, линейный метод АЭ обеспечивает определение C_x с достаточно высокой точностью. Так как при этом из всех членов ряда Фурье имеет значение только $b_0(X)$ (в соответствии с линейной теорией аэродинамической эквивалентности волновое сопротивление асимметричного тела $R_T=R_T(X, \varphi)$ равно волновому сопротивлению кругового конуса $R_T=b_0(X)$), получается естественная связь между асимметричными телами исходной формы и соответствующими телами, форма которых описывается функцией $R_T=b_0(X)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба Г. Г., Федотов Б. Н. Метод расчета аэродинамических коэффициентов некоторых объемных тел с произвольным поперечным сечением.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6, с. 92–98.
2. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тияков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с огошедшей ударной волной.— Изв. АН СССР. Мех. и маш., 1964, № 4, с. 9–28.
3. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М.: Наука, 1964. 505 с.
4. Дворецкий В. М., Иванов М. Я., Коняев Б. А., Крайко А. Н. О правиле эквивалентности для течений идеального газа.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 1004–1014.
5. Гонор А. Л., Зубин М. А., Остапенко Н. А. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях.— В сб.: Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 28–39.
6. Ведерников Ю. А., Гонор А. Л., Зубин М. А., Остапенко Н. А. Аэродинамические характеристики звездообразных тел при числах $M=3-5$.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 88–93.
7. Гонор А. Л., Казаков М. Н., Швец А. И., Шейн В. И. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик звездообразных тел при сверх- и гиперзвуковых скоростях потока.— Отчет Ин-та мех. МГУ, 1969, № 1020. 41 с.
8. Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. 507 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.I.1985