МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1986

УДК 533.6.011.35

ДАЛЬНЕЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ПОЛЕ НЕНЕСУЩЕГО ПРОФИЛЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ

СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д., СИНИЧКИНА О. П.

Получено обобщение уравнения для околозвукового течения [1] для плоских нестационарных безвихревых течений идеального газа на случай до-, около- или сверхзвуковых течений в области с почти постоянной величиной скорости с использованием ортогональных потоковых координат (семейство эквипотенциальных линий и линий тока).

Решение для нелинейного дальнего поля стационарного обтекания профиля околозвуковым потоком было найдено для околозвукового уравнения [2]. В данной работе оно получено для обобщенного трансзвукового уравнения и дано его асимптотическое разложение. Знание нелинейного поля при использовании разностных методов расчета обтекания профиля для трансзвукового режима позволяет уменьшить размеры расчетной области (ближнего поля) по сравнению с областью, определенной дальним полем линейной теории.

1. Плоские безвихревые неустановившиеся изэнтропические течения идеального совершенного газа в декартовых координатах XY описываются системой

$$u_X - u_Y = 0, \qquad p\rho^{-\gamma} = \text{const}, \qquad a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

$$\frac{d}{dt}\ln\rho + u_X + v_Y = 0, \qquad u = w_c\varphi_X, \qquad v = w_c\varphi_Y \tag{1.1}$$

$$w^2 = u^2 + v^2, \qquad \frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{(\gamma+1)a_*^2}{2(\gamma-1)} = \frac{(\gamma+1)a_{*c}^2}{2(\gamma-1)} - w_c\varphi_t$$

Здесь $\mathbf{w}(u, v)$, ρ, p, a, γ, φ — вектор скорости, плотность газа, его давление, скорость звука, отношение теплоемкостей, потенциал скорости соответственно; $w_c>0$ — постоянная размерности скорости (среднее значение скорости в характерной точке C потока); a_* — критическая скорость звука; постоянная a_{*c} — ее значение в момент, когда $\varphi_t=0$.

Отсюда придем к системе для u, v, a_*

$$u_X - u_Y = 0, \qquad (a_*^2)_X = -2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_t, \qquad (a_*^2)_Y = -2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}v_t$$

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\gamma+1}{2}a_*^2 - \frac{\gamma-1}{2}w^2\right) + (\gamma-1)(u_X + v_Y) = 0 \tag{1.2}$$

где первые три уравнения зависимы между собой.

Для получения трансзвукового уравнения удобнее перейти в данный момент времени от декартовых координат XY к потоковым ортогональным координатам $\varphi\psi$ (в фиксированный момент времени φ=const — семейство эквипотенциальных линий, ψ=const — семейство линий тока). Здесь ψ — «функция тока», вводимая условием ортогональности градиентов φ и ψ ($\nabla\varphi\nabla\psi=0$)

$$\psi_X=-g\frac{v}{w_c},\qquad \psi_Y=g\frac{u}{w_c} \tag{1.3}$$

где безразмерная функция $g>0$ подлежит определению (для установившегося течения из уравнения неразрывности следует, что g пропорциональна плотности ρ). Обозначив через θ угол наклона вектора скорости $\mathbf{w}$ к оси X, исключая в (1.3) перекрестным дифференцированием ψ, расписав в системе (1.2) производную d/dt по переменным Эйлера X, Y, t и переходя к производным по φ и ψ, получим [1] систему для w, θ, a_*, g

$$\begin{gathered}
w\theta_\varphi=gw_\psi,\qquad (\ln gw)_\varphi+g\theta_\psi=0\\
\frac{w}{w_c}(a_*^2)_\varphi=-2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}w_t,\qquad \frac{g}{w_c}(a_*^2)_\psi=-2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\theta_t\\
\frac{\gamma+1}{2}(w^2-a_*^2)\frac{w}{w_c}w_\varphi=\left(\frac{\gamma+1}{2}a_*^2-\frac{\gamma-1}{2}w^2\right)g\frac{w^2}{w_c}\theta_\psi+\\
+\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}(a_*^2)_t-2ww_t
\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$d(X+iY)=\frac{w_c}{w}e^{i\theta}(d\varphi+ig^{-1}\,d\psi),\qquad i=e^{i\pi/2} \tag{1.5}$$

где (1.5) задает переход с плоскости $\varphi\psi$ на плоскость потока XY. Заметим, что dX, dY — полные дифференциалы в силу первых двух уравнений из (1.4), поэтому $\varphi\psi$ — глобальная система координат. Начало A системы $\varphi\psi$ движется по заданному закону $X=X_A(t)$, $Y=Y_A(t)$. Подставив θ_ψ из последнего уравнения (1.4) во второе и используя третье, в [1] получено уравнение для определения функции g.

Введем обозначения (индексом c обозначаем среднее постоянное значение величины в характерной точке C потока) и запишем интеграл Бернулли

$$\begin{gathered}
M_c=\frac{w_c}{a_c},\qquad \lambda_c=\frac{w_c}{a_{*c}},\qquad w^2=w_c^2(1+2\eta)\\
a_*^2=a_{*c}^2(1+2\zeta),\qquad \frac{w_c^2}{2}+\frac{a_c^2}{\gamma-1}=\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}a_{*c}^2
\end{gathered}$$

Рассмотрим некоторую окрестность точки C (эта точка может быть и на бесконечности, например, при обтекании тела однородным безграничным потоком), в которой $w\approx w_c$, $a_*\approx a_{*c}$, при этом в ней $g\approx g_c=1$. Тогда там $|\eta|$, $|\zeta|\ll 1$ и система (1.4) без второго уравнения упростится

$$\begin{gathered}
\theta_\varphi=\eta_\psi,\qquad \zeta_\varphi=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_c^2w_c^{-1}\eta_t\\
\zeta_\psi=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_c^2w_c^{-1}\theta_t\\
[1-M_c^{-2}+(\gamma+1)\eta-(\gamma+1)\lambda_c^{-2}\zeta]\eta_\varphi=M_c^{-2}\theta_\psi+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\lambda_c^{-2}w_c^{-1}\zeta_t-2w_c^{-1}\eta_t
\end{gathered} \tag{1.6}$$

В этой нелинейной системе существенных ограничений на угол θ и число Маха M_c нет (система описывает течение газа в окрестности линии $w=w_c>0$, где w_c — произвольная постоянная, при этом градиент скорости η_φ может быть большим). Нелинейные члены надо учитывать только при $M_c\approx 1$.

Введя потенциал возмущенной скорости Φ°, получим трансзвуковое уравнение плоских нестационарных безвихревых течений в потоковых подвижных координатах $\varphi\psi$ (в [1] такое уравнение получено при $M_c \approx 1$)

$$\eta=\Phi_\varphi^\circ, \qquad \theta=\Phi_\psi^\circ, \qquad \zeta=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_c^2\frac{\Phi_t^\circ}{w_c} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\left[1-M_c^2-(\gamma+1)M_c^2\Phi_\varphi^\circ-(\gamma-1)\frac{M_c}{a_c}\Phi_t^\circ\right]\Phi_{\varphi\varphi}^\circ+\\ +\Phi_{\psi\psi}^\circ-2\frac{M_c}{a_c}\Phi_{\varphi t}^\circ-a_c^{-2}\Phi_{tt}^\circ=0\end{gathered} \tag{1.8}$$

Если в точке C направить ось X по вектору $\mathbf{w}_c$ и считать, что точка A перемещается незначительно, то в некоторой окрестности точки C координатные линии систем $\varphi\psi$ и XY будут близки между собой, тогда $\theta \approx 0$, поэтому $\Phi_\varphi^\circ \approx \Phi_X^\circ$, $\Phi_\psi^\circ \approx \Phi_Y^\circ$. Введя обозначения $M_c=M_\infty$, $w_c=w_\infty$, получим уравнение в безразмерной форме, аналогичное (1.8), для слабо возмущенного потока со скоростью $\mathbf{w}_\infty$, параллельного оси X

$$\begin{gathered}[1-M_\infty^2-(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x-(\gamma-1)M_\infty^2\Phi_\tau]\nu_{xx}+\Phi_{yy}-\\ -2M_\infty^2\Phi_{x\tau}-M_\infty^2\Phi_{\tau\tau}=0, \qquad \Phi=\frac{\Phi^\circ}{L}\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$x=\frac{X}{L}, \qquad y=\frac{Y}{L}, \qquad \tau=\frac{w_\infty t}{L}, \qquad \eta=\Phi_x$$

$$\theta=\Phi_y, \qquad \zeta=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_\infty^2\Phi_\tau, \qquad \lambda_\infty=\frac{w_\infty}{a_{*\infty}}$$

Это уравнение не получается с помощью метода малого параметра — метода ε-оценок (в [3] получено околозвуковое уравнение, не содержащее члены с $\Phi_\tau\Phi_{xx}$ и $\Phi_{\tau\tau}$). При другом выборе параметра ε получится уравнение линейной теории, которое отличается от (1.9) отсутствием нелинейных членов [4]. После объединения членов нелинейного уравнения [3] и уравнения линейной теории [4] можно получить составное уравнение, по форме похожее на (1.9) (см., например, [5]).

В уравнении (1.9) $|\Phi_x|$, $|\Phi_y|$, $|\Phi_\tau| \ll 1$, поэтому можно в коэффициент при Φ_{xx} добавить члены $(1-M_\infty^2)\alpha\Phi_x$, $(1-M_\infty^2)\beta\Phi_\tau$, где α и β — произвольные величины порядка единицы, и получить обобщенную форму трансзвукового уравнения (1.9)

$$[1-M_\infty^2-(\gamma+1)G\Phi_x-(\gamma-1)H\Phi_\tau]\Phi_{xx}+\Phi_{yy}-2M_\infty^2\Phi_{x\tau}-M_\infty^2\Phi_{\tau\tau}=0 \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered}G=1, \qquad H=1 \qquad (M_\infty=1)\\ G=0, \qquad H=0 \qquad (M_\infty=0)\end{gathered} \tag{1.11}$$

где $G \geqslant 0$, $H \geqslant 0$ — произвольные функции. Эти функции можно выбрать, используя эксперимент на ЭВМ (например, в стационарном случае в [6] рекомендуют $G=M_\infty^{3/2}$).

Для несжимаемой жидкости ($M_\infty=0$) уравнение (1.10) переходит в уравнение Лапласа. Уравнение звуковой линии ($M=1$) можно получить, приравняв нулю коэффициент при Φ_{xx} в (1.10).

Коэффициент давления c_p и коэффициент подобия K в стационарном случае равны

$$c_p=\frac{p-p_\infty}{{}^1/_2\rho_\infty w_\infty^2}=-2(\Phi_x+\Phi_\tau), \qquad K=(M_\infty^2-1)[(\gamma+1)G\delta]^{-2/3}$$

где δ — относительная толщина профиля.

Аналогично форме (1.10) можно обобщить трансзвуковые уравнения для осесимметричного потока и с учетом вязкости [7, 8].

2. Пусть симметричный профиль под нулевым углом атаки обтекается однородным безграничным потоком газа ($M_\infty \leqslant 1$) при трансзвуковом режиме. Тогда дальнее стационарное поле течения описывается системой Кармана — Фальковича, получаемой из (1.10)

$$uu_x = v_y, \quad v_x = u_y, \quad v = E\theta, \quad u = u_\infty + E\eta$$
$$u_\infty = M_\infty^2 - 1, \quad E = (\gamma+1)G \tag{2.1}$$

В [2] получено точное решение этой системы в параметрической форме (z, ζ — параметры), описывающие нелинейное дальнее околозвуковое поле ненесущего профиля ($M_\infty < 1$, поле имеет две оси симметрии, как дальнее поле диполя)

$$u = A(\zeta) + B(\zeta) z^2, \quad v = A'(\zeta) z + {}^1/_3 B'(\zeta) z^3$$
$$x = [A'(\zeta) + B'(\zeta) z^2] \frac{1}{D}, \quad y = -2B(\zeta) \frac{z}{D} \tag{2.2}$$
$$D(z, \zeta) = (A')^2 + 2(A'B' - 2AB^2) z^2 - 4k^6 z^4$$

Здесь четные функции $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ определяются через эллиптическую функцию Вейерштрасса $P(w;\ g_2,\ g_3)$ с параметрами $g_2=0$, $g_3=4$

$$A(\zeta) = u_\infty R(w), \quad B(\zeta) = k^2 P(w), \quad P(w) = P(w+\omega_2;\ 0{,}4) \tag{2.3}$$
$$w = k\zeta, \quad |w| < \omega_2 = 1{,}21432$$
$$R(w) = \sqrt{P(w)} \cos[{}^1/_3 \operatorname{arctg} {}^1/_2 P'(w)], \quad (P')^2 = 4P^3 - 4$$

Параметр $k > 0$ — произвольная постоянная; штрихом обозначена производная по аргументу. Значениям $z = \zeta = 0$ соответствует бесконечность на плоскости потока xy; вдоль оси x $z \equiv 0$, на оси y $\zeta \equiv 0$.

Вдали от профиля (при малых z и ζ) с помощью (2.2) можно записать дальнее поле профиля, используя ряды

$$A(\zeta) = u_\infty (1 + k^2\zeta^2 + {}^2/_3 k^4 \zeta^4 + \ldots), \quad B(\zeta) = k^2 (1 + 3k^2\zeta^2 + \ldots) \tag{2.4}$$

Оставив лишь главные члены в (2.2), (2.4), получим дальнее поле диполя линейной теории

$$u_L = u_\infty + R^{-2} f_1(\beta), \quad v_L = R^{-2} g_1(\beta)$$
$$f_1(\beta) = (4u_\infty k^2)^{-1} \cos 2\beta, \quad g_1(\beta) = -(4\sqrt{-u_\infty} k^2)^{-1} \sin 2\beta \tag{2.5}$$

Для учета нелинейности дальнего поля ищем решение (2.1) в виде ряда по R^{-2}

$$u = u_L + R^{-4} f_2(\beta) + \ldots, \quad v = v_L + R^{-4} g_2(\beta) + \ldots$$
$$g_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{-u_\infty}\, f_2' + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{-u_\infty}} (2f_1 \cos\beta + f_1' \sin\beta) f_1 \sin\beta \tag{2.6}$$
$$g_2' = 4\sqrt{-u_\infty}\, f_2 - \frac{1}{\sqrt{-u_\infty}} (2f_1 \cos\beta + f_1' \sin\beta) f_1 \sin\beta$$

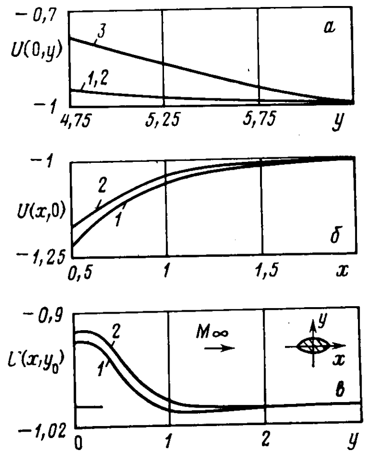
Решая систему для f_2 и g_2, получим

$$f_2(\beta) = \frac{1}{64} u_\infty^{-3} k^{-4} \left(32\cos^6\beta - 48\cos^4\beta + 16\cos^2\beta - \frac{1}{2}\right)$$
$$g_2(\beta) = \frac{1}{32} (-u_\infty)^{-5/2} k^{-4} \sin\beta \cos\beta\, (-1 - 2\cos^2\beta + 16\sin^2\beta - 16\sin^4\beta) \tag{2.7}$$

Зависимость R, β от x и y дана в (2.5). Постоянная k зависит от M_∞, γ и δ (δ — относительная толщина профиля, при этом профиль может быть толстым). Применив правило Прандтля — Глауэрта к решению обтекания эллипса под нулевым углом атаки несжимаемой жидкостью, найдем этот параметр

$$k=[{}^1/_2\delta(1-M_\infty^2)(1+\delta)E]^{-1/2} \tag{2.8}$$

Для тонкого профиля параметр k можно выразить через интеграл от уравнения профиля [6] с помощью линейной теории. Заметим, что в [6] нелинейность трансзвукового дальнего поля для тонкого профиля приближенно учитывается путем корректировки мультипликативной постоянной в решении линейной теории с помощью интеграла от u^2 по бесконечной области, тогда как решение (2.6)—(2.7) дает функциональную поправку к решению линейной теории.



На фигуре приведены графики изменения возмущения скорости $U=-u/u_\infty$ вдоль оси y (фигура, *а*), оси x (фигура, *б*) и вдоль линии тока $y=y_0=1{,}5$ (фигура, *в*), где дается сравнение линейной теории (кривая *1*, формулы (2.5)), влияния нелинейной поправки (кривая *2*, формулы (2.6)—(2.7)) и нелинейной теории (кривая *3*, формулы (2.2)—(2.3)). Значения параметров: $M_\infty=0{,}8$; $\delta=0{,}1$; $\gamma=1{,}4$; $E=(\gamma+1)M_\infty^{3/2}$. Из графиков видно, что учет нелинейности (кривая *2*) в какой-то степени эквивалентен увеличению мультипликативной постоянной в линейном решении (кривая *1*). Для данного примера за счет применения более точного дальнего поля можно сократить размер расчетной области в поперечном потоку направлении примерно на 20% (сравнивая кривые *1* и *3*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Севостьянов Г. Д.* Уравнение нестационарных околозвуковых течений идеального газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1, с. 105—109.
2. *Севостьянов Г. Д.* Дальнее нелинейное поле при трансзвуковом обтекании ненесущего профиля.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 171—173.
3. *Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S.* On two-dimensional non-steady motion of slender body in a compressible fluid.— J. Math. and Phys., 1948, v. 27, p. 220—231. (Рус. перев.: Тзян Х. Ш., Лин Ц. Ц., Рейснер Е. О двумерном неустановившемся движении тонкого тела в сжимаемой жидкости.— В кн.: Газовая динамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1950, с. 183—196.)
4. *Miles J. W.* The potential theory of unsteady supersonic flow. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959, 220 p. (Рус. перев.: Майлс Дж. У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М. Физматгиз, 1963, 272 с.)
5. *Ehlers F. E.* A finite difference method for the solution of the transonic flow around harmonically oscillations wings, AIAA Pap., 1974, № 543, 6 p. NACA, CR-2257, July, 1974, p. 81.
6. *Murman E. M., Cole J. D.* Calculation of plane steady transonic flows.— AIAA Journal, 1971, v. 9, № 1, p. 114—121. (Рус. перев.: Мурмен, Коул. Расчет плоских установившихся трансзвуковых течений.— Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 1, с. 137—147.)
7. *Севостьянов Г. Д., Фомин В. Г.* О нестационарных околозвуковых осесимметричных течениях идеального газа.— В сб.: Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976, вып. 5(8), с. 27—32.
8. *Севостьянов Г. Д.* К теории нестационарных околозвуковых течений вязкого газа.— В сб.: Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981, с. 21—33.

Саратов

Поступила в редакцию
13.VI.1984