

УДК 532.529.5

СВЕРХЗВУКОВОЕ ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ ОКОЛО КЛИНА

ЗАК Л. И.

В рамках двухскоростной и двухтемпературной модели сплошной среды проводится исследование сверхзвукового двухфазного течения около клина. Ранее подобная задача рассматривалась как аналитически, так и численно (см., например, [1–6]). Ниже будет приведено аналитическое исследование сверхзвукового обтекания клина двухфазным потоком смеси газа и частиц с учетом отражения последних от поверхности клина в предположении, что частиц в единице объема смеси мало и поэтому решение указанной выше задачи можно искать в виде разложений по малому параметру, являющемуся отношением размазанной плотности частиц к плотности газа. Подобный подход позволяет расщепить исходную систему дифференциальных уравнений, описывающих течение смеси газа и частиц на две: чисто газодинамическую и систему уравнений для частиц. При этом в нулевом приближении по этому малому параметру получается, что на движение газа не влияет поведение частиц, в то время как поведение газа является основополагающим при определении движения частиц.

Поместим клин с углом полураствора α в сверхзвуковой двухфазный поток с числом Маха M_∞ . Ось x совпадает с направлением набегающего потока, ось y ей перпендикулярна. Начало координат поместим в носике клина. Для описания движения смеси газа и частиц воспользуемся системой уравнений из [7] с теми же самыми обозначениями. Тогда с учетом сделанного выше предположения для безразмерных (отнесенных к скорости набегающего потока) составляющих скорости газа по осям x и y соответственно имеем

$$u_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad v_0 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\gamma + 1} \operatorname{ctg} \beta \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_\infty^2} \right) \left[1 - \frac{2}{\gamma + 1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_\infty^2} \right) \right]^{-1}$$

где β — угол наклона скачка к оси x , γ — отношение удельных теплоемкостей газа.

Безразмерные параметры частиц в этом случае удовлетворяют следующей системе уравнений (нижний индекс s , сопровождающий параметры частиц в [7], отбросим)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi^s(u_0 - u)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi^s(v_0 - v) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

Для решения системы (1) перейдем от переменных x, y к переменным x, x_1 , где x_1 — абсцисса точки, в которой частица пересекла скачок. Тогда

в переменных x, x_1 первые два уравнения системы (1) будут иметь вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi'(u_0 - u), & \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{v}{u} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} &= \varphi'(v_0 - v) \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений (2) совместно с граничными условиями на скачке $y = x \operatorname{tg} \beta$ при $x = x_1, u = 1, v = 0$ имеет решение

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \frac{1}{\varphi'} \left[1 - u(x, x_1) + u_0 \ln \frac{1 - u_0}{u(x, x_1) - u_0} \right] \\ v(x, x_1) &= v_0 - \frac{v_0}{u_0 - 1} (u_0 - u(x, x_1)) \\ y(x, x_1) &= (x - x_1) \operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varphi'(1 - u_0)} (1 - u(x, x_1)) + x_1 \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (3)$$

Условием попадания частицы на поверхность тела в точке с абсциссой x_2 является $y(x_2, x_1) = x_2 \operatorname{tg} \alpha$ или

$$u(x_2, x_1) = 1 - \varphi' x_1 \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} (1 - u_0)$$

Тогда из (3) можно определить x_2

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \left[1 + \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} (1 - u_0) \right] - \frac{u_0}{\varphi'} \ln \left(1 - \frac{x_1}{z_1} \right) \\ z_1 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varphi'(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)} \end{aligned}$$

Из последних выражений видно, что частица попадает на поверхность клина при условии $x_1 < z_1$, а при $x_1 \geq z_1$ частица будет двигаться за скачком в соответствии с (3) и при $x \rightarrow \infty$ линии тока частиц будут параллельны щеке клина.

Далее будем вести рассмотрение для $x_1 < z_1$. Введем параметр k — коэффициент отражения частиц от поверхности тела ($0 \leq k \leq 1$, $k = 0$ соответствует прилипанию частиц к поверхности клина, $k = 1$ — зеркальному отражению). Тогда в проекциях на оси x и y составляющие скорости частиц на поверхности тела есть

$$\begin{aligned} u^- &= u^+ (\cos^2 \alpha - k \sin^2 \alpha) + v^+ (1 + k) \sin \alpha \cos \alpha \\ v^- &= u^+ (1 + k) \sin \alpha \cos \alpha + v^+ (\sin^2 \alpha - k \cos^2 \alpha) \\ u^+ &= u(x_2, x_1), \quad v^+ = v_0 - \frac{v_0}{u_0 - 1} (u_0 - u^+) \end{aligned}$$

В случае зеркального отражения частиц от поверхности клина имеем

$$\begin{aligned} u^- &= \cos 2\alpha - \frac{x_1}{z_1} (\cos 2\alpha - u_0) \\ v^- &= \sin 2\alpha - \frac{x_1}{z_1} (\sin 2\alpha - u_0 \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения (4) следует использовать как граничные при определении движения отраженных от поверхности клина частиц. В переменных x, x_2 решение системы (2) с учетом граничных условий (4) имеет вид

$$x = x_2 + \frac{1}{\varphi'} \left(u^- - u(x, x_2) + u_0 \ln \frac{u_0 - u^-}{u_0 - u(x, x_2)} \right)$$

$$v(x, x_2) = v_0 + \frac{v^- - v_0}{u^- - u_0} (u(x, x_2) - u_0) \quad (5)$$

$$y(x, x_2) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\varphi^f} \frac{v_0 u^- - u_0 v^-}{u^- - u_0} \frac{u^- - u(x, x_2)}{u_0}$$

Заметим, что решения (5), так же как и решения (3), справедливы при $u \neq u_0$.

В случае зеркального отражения частиц от щеки клина для частицы с $x_1 = 0$ угол наклона отраженной линии тока в носике должен быть равен 2α , т. е. при $x = x_1 = 0$ $\partial y / \partial x = \operatorname{tg} 2\alpha$. Отсюда следует, что для тех режимов обтекания клина, для которых число Маха M_∞ набегающего потока, отношение удельных теплоемкостей γ и угол α таковы, что образуется ударная волна с $\beta \geq 2\alpha$, ни одна отраженная частица не вылетит в набегающий поток и, более того, линии тока всех отраженных частиц будут расположены под линией тока, идущей из носика. Для $\beta < 2\alpha$ среди отраженных от щеки клина частиц будут и такие, что вылетят в набегающий поток. В таком случае будет обязательно существовать такая линия тока, двигаясь по которой частица, отразившись от поверхности тела, коснется скачка и останется в области между телом и скачком. Обозначим абсциссу точки касания z_2 . Тогда в этой точке будем иметь

$$z_2 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = \frac{1}{\varphi^f} \frac{v_0 u^- - u_0 v^-}{u^- - u_0} \frac{u^- - u(z_2, x_2)}{u_0}$$

$$v(z_2, x_2) = u(z_2, x_2) \operatorname{tg} \beta$$

$$z_2 = x_2 + \frac{1}{\varphi^f} \left[u^- - u(z_2, x_2) + u_0 \ln \frac{u_0 - u^-}{u_0 - u(z_2, x_2)} \right]$$

$$x_2 = x_2(z_3)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} u(z_2, x_2(z_3)) &= \frac{u_0 \operatorname{tg} \alpha}{u_0 (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + \sin 2\alpha - \operatorname{tg} \beta \cos 2\alpha} \\ z_2 &= \frac{1}{\varphi^f} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha - u_0} \frac{u^-(z_3) - u(z_2, x_2(z_3))}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} \\ z_3 &= \frac{[\varphi^f z_1 (\cos 2\alpha - u_0)^{-1} - 1] (\cos 2\alpha - u(z_2, x_2(z_3)))}{\varphi^f [2 + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg}^{-1} \alpha (1 - \cos 2\alpha)]} + \\ &+ \frac{u_0 \ln [(u(z_2, x_2(z_3)) - u_0) (\cos 2\alpha - u_0)^{-1}]}{\varphi^f [2 + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg}^{-1} \alpha (1 - \cos 2\alpha)]} \end{aligned}$$

Таким образом, после отражения от щеки клина частицы при $x_1 \geq z_3$ останутся в области между телом и скачком и будут при $x \rightarrow \infty$ выходить на асимптоты, параллельные щеке клина; при $x_1 < z_3$ — вылетят в набегающий поток. Вылетевшая после отражения в набегающий поток частица пересечет скачок в точке с абсциссой x_3 . В этой точке должны быть выполнены условия, из которых можно определить x_3

$$x_3 (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = \frac{1}{\varphi^f} \frac{u_0 v^- - v_0 u^-}{u^- - u_0} \frac{u^- - u(x_3, x_2)}{u_0}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{\varphi^f} \left(u^- - u(x_3, x_2) + u_0 \ln \frac{u_0 - u^-}{u_0 - u(x_3, x_2)} \right)$$

Выписать явную зависимость x_3 от x_1 , α , β не представляется возможным из-за того, что последние выражения носят трансцендентный характер. Поэтому определить x_3 можно только численно. После нахождения x_3 для определения дальнейшего движения отраженных частиц в набе-

гающем потоке следует решать систему уравнений в переменных x, x_3

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi^f (1-u), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{u}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} = -\varphi^f v \quad (6)$$

Система (6) совместно с граничными условиями $u(x_3, x_3) = u(x_3, x_2)$, $v(x_3, x_3) = v(x_3, x_2)$ при $x=x_3$ или $y=x_3 \operatorname{tg} \beta$ имеет решение

$$\begin{aligned} x &= x_3 + \frac{1}{\varphi^f} \left[u(x_3, x_2) - u(x, x_3) + \ln \frac{u_0 - u(x_4, x_3)}{1 - u(x, x_3)} \right] \\ v(x, x_3) &= v(x_3, x_2) \frac{1 - u(x, x_3)}{1 - u(x_3, x_2)} \\ y(x, x_3) &= \frac{1}{\varphi^f} \frac{v(x_3, x_2)}{1 - u(x_3, x_2)} [u(x, x_3) - u(x_3, x_2)] + x_3 \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (7)$$

Частицы будут двигаться в набегающем потоке в соответствии с (7) до тех пор, пока они вновь не повстречают скачок в точке с абсциссой x_4 , которую можно определить из (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 + \frac{1}{\varphi^f} \left[u(x_3, x_2) - u(x_4, x_3) + \ln \frac{1 - u(x_3, x_2)}{1 - u(x_4, x_3)} \right] \\ \operatorname{tg} \beta (x_4 - x_3) &= \frac{1}{\varphi^f} \frac{v(x_3, x_2)}{1 - u(x_3, x_2)} [u(x_4, x_3) - u(x_3, x_2)] \end{aligned}$$

Для определения дальнейшего движения частицы в области между скачком и щекой клина необходимо решать систему (2) в переменных x, x_4 с граничными условиями $u(x_4, x_4) = u(x_4, x_3)$, $v(x_4, x_4) = v(x_4, x_3)$ при $x=x_4$ или $y=x \operatorname{tg} \beta$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} x &= x_4 + \frac{1}{\varphi^f} \left[u(x_4, x_3) - u(x, x_4) + u_0 \ln \frac{u_0 - u(x_4, x_3)}{u_0 - u(x, x_4)} \right] \\ v(x, x_4) &= v_0 - \frac{v_0 - v(x_4, x_3)}{u_0 - u(x_4, x_3)} [u_0 - u(x, x_4)] \\ y(x, x_4) &= x_4 \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\varphi^f} \left[v_0 \ln \frac{u_0 - u(x_4, x_3)}{u_0 - u(x, x_4)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_0 - v(x_4, x_3)}{u_0 - u(x_4, x_3)} (u(x_4, x_3) - u(x, x_4)) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Возможно попадание частицы на поверхность клина в точке с абсциссой x_5 (аналогичной x_2). В этом случае для этой точки будем иметь

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 + \frac{1}{\varphi^f} \left[u(x_4, x_3) - u(x_5, x_4) + u_0 \ln \frac{u_0 - u(x_4, x_3)}{u_0 - u(x_5, x_4)} \right] \\ u(x_5, x_4) &= u(x_4, x_3) - \varphi^f x_1 (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \frac{u_0 - u(x_4, x_3)}{v(x_4, x_3) - u(x_4, x_3) \operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}$$

Из последних выражений видно, что при $u(x_5, x_4) \rightarrow u_0$

$$x \rightarrow \frac{1}{\varphi^f} \frac{u(x_4, x_3) \operatorname{tg} \alpha - v(x_4, x_3)}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} \equiv z_4$$

Таким образом, при $x_4 < z_4$ частица попадает на поверхность клина, в противном случае — нет. В точке $(x_5, x_5 \operatorname{tg} \alpha)$ при $k=1$ должно быть вы-

полнено

$$\begin{aligned} u^- &= u(x_5, x_4) \cos 2\alpha + v(x_5, x_4) \sin 2\alpha \\ v^- &= u(x_5, x_4) \sin 2\alpha - v(x_5, x_4) \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (9)$$

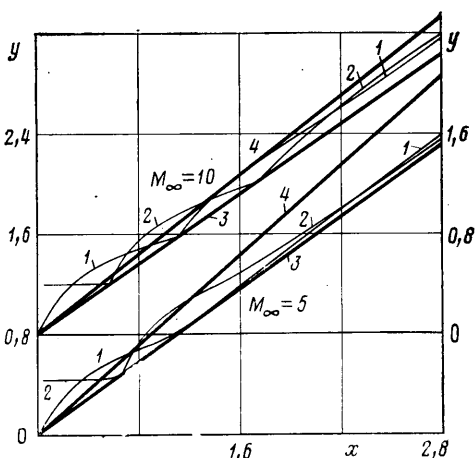
Эти выражения следует использовать как граничные при определении движения вторично отраженных от щеки клина частиц. В переменных x, x_5 с учетом условий (9) вторично отраженные частицы будут двигаться в соответствии с

$$\begin{aligned} x &= x_5 + \frac{1}{\varphi'} \left[u(x_5, x_5) - u(x, x_5) + u_0 \ln \frac{u_0 - u(x_5, x_5)}{u_0 - u(x, x_5)} \right] \\ v(x, x_5) &= v_0 - \frac{v_0 - v(x_5, x_5)}{u_0 - u(x_5, x_5)} (u_0 - u(x, x_5)) \\ y(x, x_5) &= x_5 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\varphi'} \left[v_0 \ln \frac{u_0 - u(x_5, x_5)}{u_0 - u(x, x_5)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_0 - v(x_5, x_5)}{u_0 - u(x_5, x_5)} (u(x_5, x_5) - u(x, x_5)) \right] \\ u(x_5, x_5) &= u^-, \quad v(x_5, x_5) = v^- \end{aligned}$$

Для определения дальнейшего движения вторично отраженных частиц следует воспользоваться полученными выше решениями (5), (7) и (8) с заменой x_2 на x_5 , x_3 на x_6 и x_4 на x_7 . Расчеты, проведенные по выражениям (3), (5), (7) и (8) для $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 1,1$, $M_\infty = 10$ и 5 для двух значений $x_1 = 0; 0,5$, показали, что возможно не более двух отражений частиц от поверхности клина. На фигуре кривые 1, 2 — траектории частиц при $x_1 = 0; 0,5$, кривые 3, 4 — поверхности клина и ударной волны.

В случае $\beta = 2\alpha$, $u_0 = \cos 2\alpha$. Тогда из (4) следует

$$u^- = \cos 2\alpha, \quad v^- = \sin 2\alpha - \varphi' x_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha}$$



В этом случае для составляющих скоростей и для линий тока имеем

$$u(x, x_2) = \cos 2\alpha, \quad v(x, x_2) = v_0 + (v - v_0) \exp(\varphi'(x_2 - x)/u_0).$$

$$y(x, x_2) = x_2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{v_0 - v^-}{\varphi'} [\exp(\varphi'(x_2 - x)/u_0) - 1]$$

Если в данном случае попытаться определить z_2 так же, как это было проделано выше, то можно получить, что $z_2 = -z_3$, а это возможно лишь при $z_2 = z_3 = 0$.

В заключение отметим, что все приведенные выше выражения несколько упростятся, если рассмотреть тонкое тело (клин или конус), когда $U = \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$, $D = \operatorname{tg} \beta \sim \beta$, а связь между D и U есть [8]

$$U = D \left[1 - \frac{1}{v} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M_\infty^2 D^2} \right) \right]$$

где $v = 1, 2$ для клина и конуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салтанов Г. А. Взаимодействие частиц с поверхностью клина в сверхзвуковом двухфазном потоке.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1971, № 1, с. 141—149.
2. Салтанов Г. А., Ткаленко Р. А. Обтекание клина сверхзвуковым двухфазным потоком.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2, с. 83—88.
3. Ткаленко Р. А. К линейной теории сверхзвуковых течений смеси газа и частиц.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 1, с. 109—119.
4. Barrow R. M., Willey J. T. Newtonian flow theory for slender bodies in a dusty gas.— J. Fluid Mech., 1981, v. 108, p. 147—157.
5. Трунев А. П., Фомин В. М. Обтекание тел двухфазным потоком типа газ — твердые частицы с учетом эрозии.— ПМТФ, 1983, № 1, с. 69—75.
6. Крайко А. Н., Ткаленко Р. А. К решению прямой задачи теории сопла Лавала для двухфазной смеси при малом отставании частиц.— ПМТФ, 1973, № 4, с. 89—100.
7. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.II.1985