

УДК 532.529:532.526

О ВЛИЯНИИ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

НАРМУРАТОВ Ч. Б., СОЛОВЬЕВ А. С.

Интерес к изучению устойчивости потоков, содержащих частицы твердой смеси (такие потоки часто встречаются в задачах аэродинамики [1–5] и химической технологии [6]), в значительной мере стимулирован экспериментами [7], в которых обнаружено, что добавление небольшого количества частиц в поток ведет к затуханию турбулентных пульсаций, ламинаризирует течение. Впервые устойчивость течения Пуазейля в плоском канале, запыленного твердыми сферическими частицами, исследовал Сафмэн [8]. Он предложил достаточно простую модель течения и превел анализ уравнений устойчивости в предельном случае больших и малых значений некоторого безразмерного параметра τ — так называемого времени релаксации частиц. Сафмэн пришел к выводу, что легкие и мелкие частицы ($\tau \ll 1$) дестабилизируют поток, а добавление более крупных и тяжелых частиц ($\tau \gg 1$) ведет к его стабилизации.

Последующие подробные расчеты кривых нейтральной устойчивости, проведенные на основе этой модели в [9] асимптотическими методами Линя [10], неожиданно не подтвердили выводы работы [8]. Критическое число Re_* вместо того чтобы возрастать с увеличением τ , наоборот, убывало, а сами нейтральные кривые принимали весьма сложный вид. В результате в [9] было высказано предположение, что такое поведение кривых обусловлено ненадежностью асимптотических методов при больших τ .

Кроме того, несколько позже появились работы, где предлагались более полные уравнения гидромеханики многофазных течений, причем в [11] указывалось на несовершенство модели [8]. В частности, при решении задач устойчивости для течения в слое Стокса [11] и плоского течения Куэтта [12] было обнаружено, что при больших τ в уравнениях для частиц становятся существенными некоторые члены, неоправданно опущенные в [8]. Системы уравнений, предложенные в работах [11, 13], достаточно полны, не имеют недостатков, присущих уравнениям Сафмэна, и при этом переходят одна в другую, если в [13] пренебречь фазовыми переходами и эффектами сжимаемости, а в [15] — вязкими членами.

Цель данной работы — изучение устойчивости течения Пуазейля на основе современных моделей [11, 13] с помощью спектральных методов, не теряющих точность в широком диапазоне изменения параметра τ . В уравнениях для дисперсной фазы учитываются дополнительные (по сравнению с [8]) члены с градиентом давления (силы плавучести), а в граничных условиях — требование непроницаемости для частиц. Это приводит, как показано ниже, к качественно другим результатам.

Исследовано поведение кривых нейтральной устойчивости при различных значениях параметров времени релаксации $0 \leq \tau \leq 100$ и массовой концентрации частиц $0 \leq f \leq 0,1$. Показано, что с ростом τ от нуля течение сначала дестабилизируется, затем при $\tau > 6$ становится устойчивым, а при $\tau > 40$ стабилизирующий эффект дисперсной фазы слабеет. Найдено, что существует определенный интервал $10 < \tau < 40$, когда поток наиболее устойчив.

1. Рассматривается плоское течение несжимаемого вязкого газа, содержащего облако недеформируемых частиц, при следующих упрощающих допущениях [1, 4, 8, 11, 13]: 1) частицы сферические и движение частиц подчиняется закону Стокса; 2) объемная концентрация частиц α мала ($\alpha \ll 1$), так что взаимодействием между отдельными частицами можно пренебречь; 3) не учитывается эйнштейновская поправка к вязкости, пропорциональная объемной концентрации частиц.

При таких предположениях исходные уравнения, записанные в безразмерной форме, имеют вид [11]

$$(1-\alpha) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -(1-\alpha) \nabla p + \alpha \frac{s_1}{\tau} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial (1-\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (1-\alpha) \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\alpha \frac{1}{S_1} \nabla p + \alpha \frac{1}{\tau} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla = i\partial/\partial x + j\partial/\partial y, \quad S_1 = \rho_2/\rho_1, \quad \tau = S \text{Re} \\ \text{Re} = \rho_1 U_0 L / \mu, \quad S = s^2 / (a/L)^2 \rho_2 / \rho_1$$

Здесь v и u — векторы скорости чистого газа и частиц соответственно, p — давление, s_1 — отношение плотностей, ρ_1 — плотность чистого газа, ρ_2 — плотность материала частиц, τ — безразмерный параметр — время релаксации частиц, s — параметр, где a — радиус частиц, L — полуширина канала, U_0 — характерная скорость течения, μ — вязкость, i и j — единичные векторы в направлении x и y .

Отметим, что в [8] уравнение (1.3) рассматривается без члена с градиентом давления (считается, что он мал, так как для твердых частиц $s_1 \gg 1$). Вообще говоря, это допустимо только при малых значениях τ , т. е. когда слагаемое $(\mathbf{v} - \mathbf{u})/\tau$ по порядку величины много больше, чем $1/s_1 \nabla p$. Однако с увеличением τ эти слагаемые становятся одного порядка и их следует учитывать (см. [11–13]).

Для исследования устойчивости двухфазного потока решение системы (1.1)–(1.4) будем искать в виде суперпозиции основного ламинарного течения $V(y)$, $U(y)$ с постоянной объемной концентрацией α_0 и малого возмущения

$$\mathbf{v} = V(y)\mathbf{i} + \mathbf{v}'(x, y, t), \quad \mathbf{u} = U(y)\mathbf{i} + \mathbf{u}'(x, y, t), \quad p = p_0(x, y) + p'(x, y, t), \\ \alpha = \alpha_0 + \alpha'(x, y, t)$$

Оставляя в уравнениях только члены первого порядка малости по возмущениям, получим

$$(1-\alpha_0) \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + v_2' \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{i} \right) = -(1-\alpha_0) \nabla p' + \alpha' \nabla p_0 + \\ + \alpha_0 \frac{s_1}{\tau} (\mathbf{u}' - \mathbf{v}') + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v}' \quad (1.5)$$

$$-\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + (1-\alpha_0) \nabla \cdot \mathbf{v}' - V \frac{\partial \alpha'}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + u_2' \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \mathbf{i} = -\frac{1}{s_1} \nabla p' + \frac{1}{\tau} (\mathbf{v}' - \mathbf{u}') \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \alpha_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Здесь и далее наряду с векторными обозначениями скорости газа и частиц используется и покомпонентная запись $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$; $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$.

С целью дальнейшего упрощения системы уравнений устойчивости сделаем, как и в [11], дополнительное допущение, что возмущением объемной концентрации можно пренебречь, и положим $\alpha' = 0$. Решение уравнений (1.5)–(1.8) ищем в виде

$$|\mathbf{v}'|, |\mathbf{u}'|, |p'| = |\mathbf{v}^*(y), \mathbf{u}^*(y), p^*| e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.9)$$

Тогда после подстановки (1.9) в (1.5)–(1.8), исключения давления из уравнений (1.5), (1.7) и введения для интегрирования уравнений неразрывности (1.6) и (1.8) двух функций тока

$$\begin{aligned} -v_1 &= \partial\psi/\partial y, & -u_1 &= \partial\varphi/\partial y \\ v_2 &= ik\psi, & u_2 &= ik\varphi \end{aligned}$$

уравнения (1.5)–(1.8) принимают вид

$$D^2\psi - ik \operatorname{Re} \left(V - \lambda - \frac{if}{k\tau} \right) D\psi + ik \operatorname{Re} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \psi + \frac{f}{s} D\varphi = 0 \quad (1.10)$$

$$D\psi - ik\tau \left(U - \lambda - \frac{i}{k\tau} \right) D\varphi + ik\tau \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \varphi = 0 \quad (1.11)$$

$$D = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2, \quad \lambda = \lambda_r + i\lambda_i = \frac{\omega}{k}, \quad f = \alpha_0 s_1$$

где k – волновое число, λ – неизвестная постоянная, подлежащая определению, λ_r – фазовая скорость волнового возмущения, λ_i – коэффициент нарастания, f – массовая концентрация частиц. Если $\lambda_i > 0$, то течение неустойчиво, если $\lambda_i < 0$ – устойчиво. Если же $\lambda_i = 0$, то колебания нейтрально-устойчивы.

В уравнениях (1.10) и (1.11) через $V(y)$ и $U(y)$ обозначены скорости стационарного течения чистого газа и частиц соответственно. Для течения Пуазейля в канале, как показано в [14], их разность при сделанных выше допущениях пропорциональна величине $\Delta \sim (a/L)^2 \sim (\rho_1/\rho_2)\tau/\operatorname{Re}$. В диапазоне рассматриваемых в данной работе параметров величина $\Delta \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ пренебрежимо мала, поэтому в уравнениях (1.10) и (1.11) искажением среднего течения будем пренебрегать и положим

$$V(y) = U(y) = 1 - y^2.$$

Граничные условия для возмущений в потоке Пуазейля для (1.10)–(1.11) имеют вид

$$\psi(\pm 1) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(\pm 1) = 0 \quad (1.12)$$

$$\varphi(\pm 1) = 0 \quad (1.13)$$

Равенства (1.12) выражают обычные требования непроницаемости и прилипания для чистого газа, а (1.13) – условие непроницаемости для твердых частиц. Заметим, что в [8, 9] условие (1.13) не учитывалось.

2. Уравнения (1.10)–(1.11) и граничные условия (1.12)–(1.13) обладают свойством инвариантности относительно замены y на $-y$, поэтому решение можно искать отдельно для четных и нечетных функций ψ и φ . Приближенное решение системы (1.10)–(1.13) будем искать в виде

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y), \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(y) \quad (2.1)$$

где $T_n(y)$ – полиномы Чебышева первого рода.

Подставляя выражения (2.1) в (1.10)–(1.13) и приравнявая члены при одинаковых полиномах T_n , получим следующую алгебраическую систему относительно коэффициентов a_n и b_n (ср. [15]):

$$\frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N [p^3(p^2-4)^2 - 3n^2p^5 + 3n^4p^3 - pn^2(n^2-4)^2] a_p -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \left\{ \left[2k^2 + \frac{f}{s} + \frac{1}{4} ik \operatorname{Re}(4 - c_n - c_{n-1}) \right] p(p^2 - n^2) - \right. \\
& - \frac{1}{4} ik \operatorname{Re} c_n p [p^2 - (n+2)^2] - \frac{1}{4} ik \operatorname{Re} d_{n-2} p [p^2 - (n-2)^2] \left. \right\} a_p + \\
& + \left\{ ik \operatorname{Re} n(n-1) + \left[k^4 + \frac{fk^2}{s} + ik \operatorname{Re}(k^2 - 2) \right] c_n - \right. \\
& - \frac{1}{4} ik^3 \operatorname{Re} c_n (c_n + c_{n-1}) \left. \right\} a_n - \frac{1}{4} ik^3 \operatorname{Re} c_{n-2} a_{n-2} - \frac{1}{4} ik^3 \operatorname{Re} c_n a_{n+2} + \\
& + \frac{f}{s} \left[\sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) b_p - k^2 c_n b_n \right] - \\
& - \lambda \left\{ ik \operatorname{Re} \left[k^2 c_n a_n - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) a_p \right] \right\} = 0 \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0 \quad (2.3)$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) a_p - k^2 c_n a_n - \\
& - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \left\{ \left[1 + \frac{1}{4} ik\tau(4 - c_n - c_{n-1}) \right] p(p^2 - n^2) - \right. \\
& - \frac{1}{4} ik\tau c_n p [p^2 - (n+2)^2] - \frac{1}{4} ik\tau d_{n-2} p [p^2 - (n-2)^2] \left. \right\} b_p + \\
& + \left\{ ik\tau n(n-1) + [k^2 + ik\tau(k^2 - 2)] c_n - \frac{1}{4} ik^3 \tau c_n (c_n + c_{n-1}) \right\} b_n - \\
& - \frac{1}{4} ik^3 \tau c_{n-2} b_{n-2} - \frac{1}{4} ik^3 \tau c_n b_{n+2} - \lambda \left\{ ik\tau \left[k^2 c_n b_n - \right. \right. \\
& - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) b_p \left. \right\} = 0, \quad n=0, 1, \dots, N \quad (2.5)
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N b_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N b_n = 0 \quad (2.6)$$

В этих уравнениях $n \geq 0$, $c_l = d_l = 0$ если $l < 0$; $c_0 = 2$, $c_l = 1$ при $l > 0$ и $d_l = 1$ при $l \geq 0$. Согласно описанным выше свойствам инвариантности уравнений (1.10)–(1.13), система (2.2)–(2.5) распадается на следующие две независимые подсистемы: (2.2), (2.3), (2.5), и первое уравнение (2.6) с четными индексами n и (2.2), (2.4), (2.5) и второе уравнение (2.5) с нечетными n .

Рассмотрим для определенности случай четных n и обозначим $N = 2M$. Тогда, полагая в соответствии с τ -методом (см., например, [15, 16]) в (2.2) $n = 0, 2, \dots, 2(M-2)$, а в (2.5) $n = 0, 2, \dots, (M-1)$ и учитывая граничные условия (2.3) и второе условие в (2.6), приходим к системе $2M+2$ уравнений с $2M+2$ неизвестными.

Полученную систему удобно записать в матричном виде

$$(A - \lambda B)x = 0 \quad (2.7);$$

где комплексные матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 16 & \dots & (2M^2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \times & \times & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ \times & \times & \times & \dots & 0 & & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \times & & & & \\ & & & & & & & & \times & \times & \times & \dots & \times \\ & & & & 0 & & & & \dots & \dots & \dots & \times \\ & & & & & & & & \times & \times & \times & \dots & \times \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

а вектор $x = (a_0, a_2, \dots, a_{2M}, b_0, b_2, \dots, b_{2M})$.

Особенность обобщенной задачи на собственные значения (2.7) в том, что матрица B вырожденная и содержит три нулевые строки. В этом случае обратная матрица B^{-1} не существует и система (2.7) не сводится к стандартной форме $(F - \lambda E)x = 0$, где E — единичная матрица, а $F = AB^{-1}$. Поэтому поступим следующим образом. С помощью элементарных преобразований столбцов матриц A и B систему (2.7) приведем к виду

$$(AQ - \lambda BQ)(Q^{-1}x) = 0 \quad (2.8)$$

где Q — соответствующее вырожденное преобразование, а матрицы AQ и BQ принимают вид

$$AQ \equiv P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \times & \times & \boxed{\times \dots \times} & & \times & \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \times & \times & \boxed{\times \dots \times} & & \times & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad BQ \equiv S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \times & \times & \boxed{\times \dots \times} & & \times & \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \times & \times & \boxed{\times \dots \times} & & \times & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Обозначая $Q^{-1}x = z$ из (2.8), имеем

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_{2M+2} = 0 \quad (2.10)$$

$$(T - \lambda W)z = 0$$

где $z = (z_3, z_4, \dots, z_{2M+1})$. Квадратные матрицы T и W состоят из элементов матриц P и S . Их вид понятен из обозначений (2.9). Первые два и последнее уравнение в системе (2.10) автономны, поэтому задача отыскания значений λ , удовлетворяющих системе (2.7), эквивалентна следующей задаче:

$$(T - \lambda W)z = 0 \quad (2.11)$$

где W — в общем случае невырожденная квадратная матрица¹.

Умножая (2.11) слева на W^{-1} , получим

$$(D - \lambda E)z = 0 \quad (2.12)$$

где $D = TW^{-1}$. Собственные значения системы (2.12) могут быть найдены стандартными методами. В данной работе они определялись с помощью QR-алгоритма.

Для нечетных коэффициентов a_n и b_n матричное уравнение вида (2.12) выводится аналогично из системы (2.2), (2.4), (2.5) и второго уравнения (2.6).

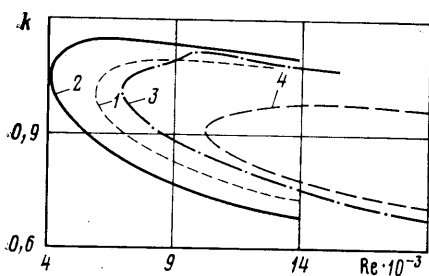
| τ | Re | k | $M+1$ | λ_r | λ_i |
|--------|--------|-------|-------|-------------|-------------|
| 1 | 9 930 | 0,75 | 16 | 0,20484 | 0,000145 |
| | | | 32 | 0,20488 | 0,000149 |
| 10 | 13 800 | 1,03 | 16 | 0,2224 | 0,00121 |
| | | | 32 | 0,2230 | 0,00064 |
| 30 | 7 200 | 1,0 | 16 | 0,2501 | -0,00050 |
| | | | 32 | 0,2506 | 0,00014 |
| 100 | 10 650 | 1,077 | 16 | 0,2414 | 0,0004 |
| | | | 32 | 0,2440 | 0,0002 |

3. В расчетах для четных функций ψ , φ использовались 24 четных полинома Чебышева. Для проверки сходимости метода расчеты проводились при $M=15; 31$. Таблица показывает точность вычисления наиболее неустойчивой моды $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ вблизи точки нейтральной кривой при $f=0,05$ и различных значениях времени релаксации τ . Для нечетных функций ψ , φ учитывались 23 нечетных полинома Чебышева. Результаты расчетов представлены на фиг. 1—4. На фиг. 1—3 в плоскости (Re, k) приведены кривые нейтральной устойчивости (массовая концентрация частиц f фиксирована и равна 0,05). Значение параметра времени релаксации τ менялось в пределах 1—100. Такому изменению τ при значениях физических параметров длины, скорости, плотности и кинематической вязкости, равных, например, $L=10^{-2}$ м, $U_0=15-30$ м/с, $\rho_1=1$ кг/м³, $\rho_2=10^3$ кг/м³, $\nu=15 \cdot 10^{-6}$ м²/с, соответствует изменение радиуса частиц a от 10 до 100 мкм.

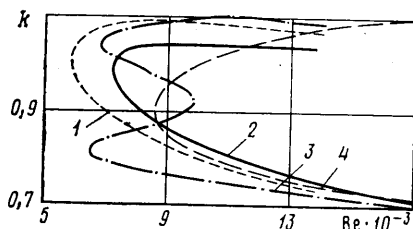
Всюду цифрой 1 отмечены кривые, построенные на основе решения задачи (1.10)–(1.13), а цифрой 4 — кривые, соответствующие упрощенным уравнениям Сафмэна [8]. Кривые 1, 2, 4 рассчитаны изложенным выше спектральным методом. Здесь же для сравнения приведены кривые нейтральной устойчивости 3, полученные в [9] асимптотическим методом.

На фиг. 1 приведен вид нейтральных кривых при значении параметра $\tau=1$. Видно, что кривая 2 лежит слева от кривой 1. Это означает уменьшение устойчивости течения при добавлении в поток частиц, характеризуемых сравнительно небольшими временами релаксации. Отметим, что указанный результат согласуется с более ранними выводами работы [8], где предсказывалось уменьшение критического числа Рейнольдса при $\tau \rightarrow 0$ (случай достаточно мелких и легких частиц). Интересным является, однако, тот факт, что при использовании более полных моделей эти выводы оказываются верными не только для $\tau \rightarrow 0$, но и для $\tau=1$, вплоть до $\tau=6$ (см. ниже). В то же время упрощенная модель, предложенная в работе [8], уже при $\tau=1$ дает увеличение устойчивости (кривая 4 расположена справа от кривой 1).

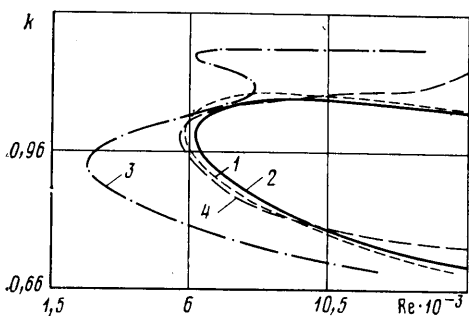
¹ Отметим, что описанный способ сведения алгебраических задач на собственные значения с вырожденными матрицами к виду (2.11) в более общей форме был предложен в [17]. В задачах гидродинамической устойчивости он успешно использовался в работе [15] при решении уравнения Орра — Зоммерфельда.



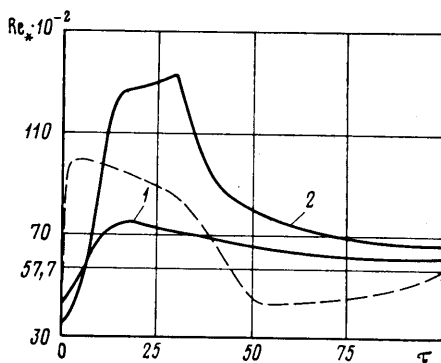
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Для сравнения методов на фиг. 1 приведена кривая 3 из [9], которая, как хорошо видно, не совпадает с кривой 4. Последнее свидетельствует о ненадежности асимптотик при возрастании τ , что и было отмечено в [9]. Различие между этими кривыми еще более заметно на фиг. 2 и 3.

Кривые нейтральной устойчивости, приведенные на фиг. 2, получены при $\tau=30$. Кривая 2 сдвинута вправо от кривой 1, что свидетельствует о стабилизирующем влиянии частиц с ростом τ ($Re_* > Re_0$), где Re_* и Re_0 — критические числа Рейнольдса для смеси и чистого газа). В то же время кривые 3 и 4 сдвигаются влево по сравнению с соответствующими кривыми 3 и 4 на фиг. 1. При дальнейшем увеличении значения τ кривые 3 и 4 продолжают двигаться влево и указывают тем самым на уменьшение устойчивости потока под влиянием дисперсной фазы ($Re_* < Re_0$). Обращает на себя внимание тот факт, что кривая 3 уже при таких значениях τ принимает сложный вид.

Кривые нейтральной устойчивости, приведенные на фиг. 3, получены при $\tau=100$. При таких больших значениях τ из поведения кривых 3 и 4 видно, что поток дестабилизируется ($Re_* < Re_0$). При этом кривая 3 приобретает весьма сложный вид. Интересно отметить, что кривая 2 указывает на стабилизирующее влияние частиц ($Re_* > Re_0$) и при таких значениях τ .

Наиболее наглядно указанные результаты иллюстрируются на фиг. 4, где приведена зависимость критического числа смеси Re_* от времени релаксации τ при различных значениях массовой концентрации частиц f . Все кривые рассчитаны спектральным методом. Прямой линией обозначено число Рейнольдса $Re_0=5770$ для чистого газа ($f=0$).

Кривым 1, 2 соответствуют значения $f=0,05; 0,1$. Из их поведения видно, что при $\tau < \tau_*$ поток дестабилизируется ($Re_* < Re_0$), а с увеличением τ , начиная с $\tau \approx 6,1$ при $f=0,05$ и $\tau_* = 6,3$ при $f=0,1$, частицы начинают оказывать стабилизирующее влияние ($Re_* > Re_0$). Интересно отметить, что существует интервал времени релаксации $10 \leq \tau \leq 40$, соответствующий

оптимальным размерам частиц, где эффект стабилизации выражен наиболее сильно. Кроме того, можно видеть, что при $\tau \geq 40$ стабилизирующее влияние взвешенных частиц слабеет. Таким образом, кривая 2, рассчитанная по уравнениям (1.10)–(1.13), показывает, что частицы в широком диапазоне изменений параметра τ увеличивают устойчивость течения.

Здесь же, на фиг. 4 приведена пунктирная кривая, построенная при $f=0,05$ на основе упрощенной модели из [8]. Сильное отличие поведения этой кривой от кривой 1 свидетельствует о важности учета сил плаучести в уравнениях гидромеханики двухфазных сред.

Отметим в заключение, что все приведенные результаты получены на основе анализа поведения первой моды возмущения. Расчеты высших собственных значений, результаты которых в данной работе не приводятся, показали, что запыление потока влияет на высшие моды незначительно и качественно не меняет вида спектра в задаче устойчивости течения Пуазейля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нугматулин Р. И. Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной в двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений. — Изв. АН СССР МЖГ, 1967, № 5, с. 33–47.
2. Осипцов А. Н. Тонкий профиль в потоке дисперсной смеси. — МЖГ, 1981, № 5, с. 147–154.
3. Drew D. A. Mathematical modeling of two-phase flow. — Annu. Rev. Fluid Mech. V. 15. Palo Alto, Calif., 1983, p. 261–291.
4. Марбл Ф. Динамика запыленных газов. — Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1971, № 6, с. 48–89.
5. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1975, 378 с.
6. Hewitt G. F. Applications of two-phase flow. — Chem. Eng. Progr., 1982, v. 78, № 7, p. 3846.
7. Sproull W. T. Viscosity of dusty gases. — Nature (Engl.), 1961, v. 190, № 4780, p. 976–978.
8. Saffman P. G. On the stability of laminar flow of a dusty gas. — J. Fluid Mech., 1962, v. 13, pt 1, p. 120–128.
9. Michael D. H. The stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas. — J. Fluid Mech., 1964, v. 18, pt 1, p. 19–32.
10. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
11. Drew D. A. Stability of a Stokes' layer of a dusty gas. — Phys. Fluids, 1979, v. 22, № 11, p. 2081–2086.
12. Drew D. A. Lift-generated instability of the plane Couette flow of a particle-fluid mixture. — Phys. Fluids, 1975, v. 18, № 8, p. 935–938.
13. Нугматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
14. Drew D. A. Two-phase flows: Constitutive equations for lift and Brownian motion and some basic flows. — Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1976, v. 62, № 2, p. 149–163.
15. Orszag S. A. Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. — J. Fluid Mech., 1971, v. 50, pt 4, p. 689–703.
16. Fox L., Parker J. B. Chebyshev polynomials in numerical analysis. London: Oxford univ. press, 1968. 205 p.
17. Gary J., Helgason R. A matrix method for ordinary differential eigenvalue problems. — J. Comput. Phys., 1970, № 5, p. 169–187.

Новосибирск

Поступила в редакцию
24.X.1984