

УДК 532.526.5

СУЩЕСТВОВАНИЕ И НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ ЛОКАЛЬНЫХ ЗОН ОТРЫВА В ВЯЗКИХ СТРУЯХ

ЗАМЕТАЕВ В. Б.

Рассматривается плоская стационарная задача обтекания вязкой пристенной струей сглаженного излома контура тела. Для удобства изучается течение, возникающее в окрестности сочленения двух плоских пластин, расположенных под углом друг к другу. Вследствие малой протяженности исследуемой области поле течения разбивается на два слоя: основную часть струи, которая разворачивается невязким образом, и пристенный тонкий подслой, обеспечивающий выполнение условия прилипания. Интерес представляет режим течения, при котором решение в этом подслое удовлетворяет уравнениям пограничного слоя Прандтля с заданным градиентом давления.

Аналогичная задача изучалась в [1-4]. Данный случай отличается от рассмотренного структурой области свободного взаимодействия, возникающей в малой окрестности точки нулевого напряжения поверхностного трения. С помощью метода срачиваемых асимптотических разложений, примененного к анализу уравнений Навье — Стокса, установлено, что имеет место механизм взаимодействия, описанный в [5-7]. В результате получено интегродифференциальное уравнение, описывающее поведение функции напряжения трения на поверхности тела. Приведено численное решение этого уравнения. Определен диапазон углов наклона пластины, в котором существуют решения найденного уравнения и соответственно реализуются течения такого типа в целом. Установлена существенная неединственность возможных решений, в частности указан случай существования шести допустимых распределений трения.

1. Пусть затопленная струя распространяется вдоль плоской пластины. Будем считать, что жидкость вязкая и несжимаемая, а течение стационарно и двумерно. Начало декартовой системы координат x' , y' совместим с передней кромкой пластины, ось абцисс направим вдоль ее поверхности. Пусть при $x'=L$ форма пластины претерпевает излом, описываемый следующим уравнением:

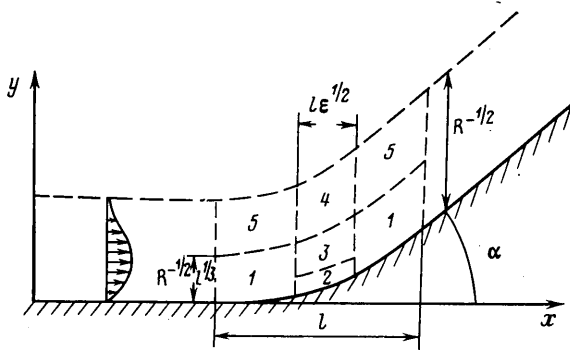
$$y' = l_1/2 \alpha \{x' - L + [(x' - L)^2 + l_1^2]^{1/2}\}$$

Перейдем к безразмерным координатам $x = x'/L$, $y = y'/L$. Компоненты вектора скорости u , v считаем нормированными на некоторую скорость в струе V_0 , а давление — отнесенным к удвоенному скоростному напору ρV_0^2 . Течение характеризуется числом Рейнольдса $R = \rho V_0 L \mu^{-1}$ (величины плотности и вязкости постоянны) и размером скругления излома $l = l_1/L$. Точечный источник жидкости разместим в передней кромке пластины; при больших значениях числа R толщина струи порядка $O(R^{-1/2})$. Схематически структура течения представлена на фиг. 1.

Вязкая струя налетает на излом поверхности тела и разворачивается на малом расстоянии. Вследствие действия центробежных сил поперек струи в окрестности угла генерируется градиент давления, причем течение в этой области является эффективно невязким (слой 5 на фиг. 1). Чтобы удовлетворить условию прилипания на теле, необходимо ввести вязкий подслей (область 1). Интерес представляет режим разворота, при котором решение в этом подслое удовлетворяет уравнениям пограничного слоя Прандтля с заданным градиентом давления, определяемым формой

тела [8, 9]. Именно из этого условия выберем порядок величины угла α в форме поверхности пластины. Простой анализ дает $\alpha \sim l^{2/3} R^{1/2}$. Физический смысл имеют $\alpha \ll 1$, поэтому существует верхняя граница для l , а именно $l \leq R^{-3/10}$. При больших размерах скругления градиент давления, индуцируемый разворотом струи, не будет влиять на решение в окрестности излома в главном приближении.

Решение задачи будем строить методом сращиваемых асимптотических разложений, применяя его к анализу уравнений Навье — Стокса при двойном предельном переходе $R \rightarrow \infty$, $l \rightarrow 0$. Наложим при этом дополнительно условие $l \gg R^{-3/4}$, исключающее из рассмотрения случаи течения со



Фиг. 1

свободным взаимодействием типа «double — deck» [5—7] и компенсационные режимы взаимодействия.

Решение уравнений Навье — Стокса в области 1 (фиг. 1) ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= l^{1/2} u_1 + \dots, \quad v = l^2 R^{1/2} y_0'(x_1) u_1 + l^{-1/2} R^{-1/2} v_1 + \dots \\ p &= l^{7/3} p_1 + \dots \\ x &= 1 + l x_1, \quad y = l^{2/3} R^{1/2} y_0(x_1) + l^{1/3} R^{-1/2} y_1 \end{aligned}$$

Здесь $y_0(x_1)$ — форма поверхности пластины, она имеет следующий вид: $y_0 = 1/2 \alpha_1 [x_1 + (x_1^2 + 1)^{1/2}]$, где величина $\alpha_1 = O(1)$.

В результате подстановки данных асимптотических разложений в уравнения Навье — Стокса получим следующую краевую задачу для области 1 (фиг. 1):

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u_1 = v_1 = 0 \quad (y_1 = 0), \quad u_1 = \lambda y_1 \quad (x_1 \rightarrow -\infty) \\ \partial u_1 / \partial y_1 = \lambda \quad (y_1 \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

где λ — величина напряжения трения на стенке, вычисленная в струе при $x=1$.

Чтобы замкнуть задачу (1.1), необходимо задать выражение для градиента давления. С этой целью ищем асимптотическое разложение решения в области 5 в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0(y_5) + l^{1/3} u_5 + \dots, \quad v = l^{2/3} R^{1/2} y_0'(x_5) u + l^{-2/3} R^{-1/2} v_5 + \dots \\ p &= l^{2/3} p_5 + \dots \\ x &= 1 + l x_5, \quad y = l^{2/3} R^{1/2} y_0(x_5) + R^{-1/2} y_5 \end{aligned}$$

Подстановка данных разложений в уравнения Навье — Стокса позволяет найти искомое решение

$$u_5 = A_5(x_5)u_0'(y_5), \quad v_5 = -A_5'(x_5)u_0(y_5)$$

$$p_5 = y_0''(x_5) \left[\gamma - \int_0^{y_5} u_0^2 dy_5 \right], \quad \gamma = \int_0^{+\infty} u_0^2 dy_5$$

Функция A_5 находится из условия сращивания решений в областях 5 и 1.

Окончательно после соответствующих аффинных преобразований и введения функции тока по формулам $u_1 = \partial\psi_1/\partial y_1$, $v_1 = -\partial\psi_1/\partial x_1$ для области 1 (фиг. 1) сформулируем краевую задачу в виде

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y_1^2} = -\frac{dp_1}{dx_1} + \frac{\partial^3\psi_1}{\partial y_1^3} \quad (1.2)$$

$$\psi_1 = \partial\psi_1/\partial y_1 = 0 \quad (y_1 = 0), \quad \partial^2\psi_1/\partial y_1^2 = 1 \quad (x_1 = -\infty, y_1 = +\infty)$$

$$dp_1/dx_1 = y_0''', \quad y_0 = 1/2 k(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}), \quad k = \lambda^{-1/2} \gamma \alpha_1$$

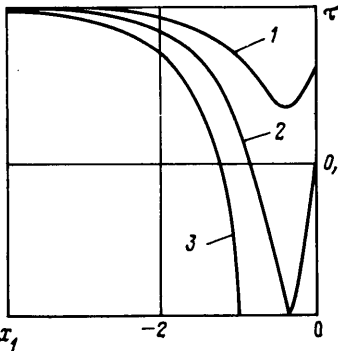
Здесь k является параметром подобия для течений рассматриваемого типа.

Отметим, что краевая задача (1.2) сформулирована в том же виде, как и аналогичная задача в [1, 2]. Ее решение строилось численно методом Крэнка — Никольсона. Результаты расчетов распределения напряжения поверхностного трения для трех значений параметра $k=0,5; 1,0774; 2$ представлены на фиг. 2 (кривые 1, 2 и 3). Установлено, что непрерывное решение существует только при $k \leq k_0 = 1,0774$. При $k < k_0$ решение уравнений пограничного слоя гладкое, при $k > k_0$ решение имеет особенность Гольдштейна. Если $k = k_0$, то согласно [1], уравнения пограничного слоя допускают особое, но продолжимое решение (кривая с изломом на фиг. 2). Точка нулевого напряжения трения имеет координату $x_0 = -0,33$, а градиент давления в ней — величину $p_{00} = 0,87$.

Таким образом, для всех $k < k_0$ решение можно построить указанным способом, т. е. сначала решить численно задачу (1.2), далее найти функцию вытеснения $A(x_1)$ при заданной величине k , а затем выписать аналитически решение в области 5 (фиг. 1). Тогда в первом приближении решение задачи о развороте струи будет построено полностью.

2. Следуя [1, 2], выясним поведение особого решения краевой задачи (1.2) при $k \rightarrow k_0$. Для удобства будем пользоваться теми же обозначениями, что и в [1, 2], в частности введем малый параметр $\epsilon = |\Delta k|$, $\Delta k = k - k_0$.

Последовательность действий при этом такова. В малой окрестности точки x_0 нулевого напряжения трения, следуя Гольдштейну, вводится вязкий схлопывающийся слой, обозначаемый далее как 1ϵ , а над ним — невязкая область $1a$. В [1] показано, что при достаточно малых $\Delta x = x_1 - x_0$ равномерная пригодность асимптотического разложения решения по параметру ϵ в областях $1a$ и 1ϵ нарушается. Поэтому вводится область размером порядка $O(\epsilon^{1/2})$; зоны 2 и 3 (фиг. 1) имеют именно такую протяженность и являются продолжениями вязкой области 1ϵ и невязкой $1a$. При $k \rightarrow k_0$, как это следует из [1], а также из численного расчета уравнений пограничного слоя, особенность формируется не только в поведе-



Фиг. 2

нии поверхностного напряжения трения τ (фиг. 2), но и в наклоне линий тока. В частности, если $k=k_0$, то при $x_1=x_0$ и $y_1 \rightarrow +\infty$ наклон линий тока претерпевает излом. Асимптотический анализ показывает, что сглаживание происходит в масштабе областей 2 и 3. Ясно, что при достаточно малых ε вытесняющее действие вязкого слоя 2 будет таково, что может возникнуть взаимодействие либо с внешним потенциальным потоком (случай, рассмотренный в [1, 2]), либо с основной вихревой частью струи (случай, изучаемый в данной работе). Это означает, что в уравнениях, которым удовлетворяет решение в вязкой области 2, должен появиться индуцируемый градиент давления, зависящий от вытесняющего действия. Конкретный вид зависимости определяется типом взаимодействия.

В общем виде задача об особенностях такого типа изучена в [1, 2]. Поэтому выпишем сразу решение в областях, указанных на фиг. 1, применительно к описываемому случаю.

Удобно переобозначить в краевой задаче (1.2) функцию тока ψ_1 и давление p_1 на ψ и p . Тогда решение [1, 2] запишется следующим образом.

При $s=x_1-x_0 \rightarrow 0$ область 1 разбивается на две подобласти 1а и 1в. В каждой из них

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0(x_1, y_1) + \varepsilon \psi_1(x_1, y_1) + \dots \\ p &= p_0(x_1) + \varepsilon p_1(x_1) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для подобласти 1а при $s \rightarrow -0$, $y_1 = O(1)$

$$\psi_0 = \psi_{00}(y_1) + (-s)\psi_{01}(y_1) + \dots, \quad \psi_1 = (-s)^{-1}\psi_{10} + \dots \quad (2.2)$$

$$\psi_{01} = \psi_{00}' \left[\frac{a_0}{p_{00}} + \int_0^{y_1} \frac{p_{00} - \psi_{00}'''}{(\psi_{00}')^2} dy_1 \right]$$

$$\psi_{10} = \frac{k_1 a_1}{p_{00}} \psi_{00}'$$

Здесь k_1 получено из соотношения $k = k_0 + \varepsilon k_1$, $k_1 = O(1)$, а относительно функции ψ_{00} известно, что

$$\psi_{00} = \frac{p_{00} y_1^3}{6} + \frac{p_{00} a_0^2 y_1^9}{40320} + \dots \quad (y_1 \rightarrow 0)$$

В целом функция ψ_{00} может быть получена из расчета пограничного слоя в области 1 при $k = k_0$ и $x_1 = x_0$.

Для подобласти 1в при $s \rightarrow -0$ и $y_1 (-s)^{-1/2} = \eta = O(1)$ имеем

$$\begin{aligned} \psi_0 &= (-s)^{3/4} \frac{1}{6} p_{00} \eta^3 + (-s)^{5/4} \frac{1}{2} a_0 \eta^2 + \\ &+ (-s)^{7/4} \left(\frac{1}{2} b_0 \eta^2 - \frac{1}{120} a_0^2 \eta^5 + \frac{1}{40320} p_{00} a_0^2 \eta^9 \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\psi_1 = (-s)^{-1/2} \frac{1}{2} k_1 a_1 \eta^2 + (-s)^{1/4} \frac{1}{2} k_1 b_1 \eta^2 + \dots$$

Функции p_0 и p_1 при $s \rightarrow 0$ могут быть представлены в виде

$$p_0 = P_0 + p_{00}s + p_{01} \frac{1}{2}s^2 + \dots, \quad p_1 = P_1 + p_{10}s + \dots$$

Величина p_{00} приведена в п.1, константы a_0 и a_1 имеют значения 1,2 и -0,14 соответственно, а значения постоянных b_0 , b_1 , P_0 , P_1 , p_{01} , p_{10} не вычислялись и в дальнейшем не используются.

Решение в зоне 3 (фиг. 1) области взаимодействия представляется в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0^*(x_*, y_1) + \varepsilon^{1/2} \psi_1^*(x_*, y_1) + \dots, \quad x_1 = x_0 + \varepsilon^{1/2} x_*. \\ p &= P_0 + \varepsilon^{1/2} p_{00} x_* + \dots + \varepsilon^{5/4} p_* + \dots, \quad \psi_0^* = \psi_{00} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\psi_1^* = \psi_{00}' \left[\frac{A_1(x_*)}{p_{00}} + x_* \int_0^{y_1} \frac{\psi_{00}''' - p_{00}}{(\psi_{00}')^2} dy_1 \right], \quad \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial p_*}{\partial x_*} \right) = 0$$

Функция $A_1(x_*)$ является произвольной, но с асимптотикой вида $A_1 = a_0(-x_*) + k_1 a_1(-x_*)^{-1} + \dots$ при $x_* \rightarrow -\infty$.

Решение в зоне 2 описывается разложениями

$$\psi = \varepsilon^{3/8} / p_{00} y_*^3 + \varepsilon^{3/4} \Psi_1^* + \varepsilon^{9/8} \Psi_2^* + \dots \quad (2.5)$$

$$p = P_0 + \varepsilon^{1/2} p_{00} x_* + \dots + \varepsilon^{5/4} p_* + \dots$$

$$x_* = \varepsilon^{-1/2} (x_1 - x_0), \quad y_* = \varepsilon^{-1/8} y_1$$

Здесь $\Psi_1^* = 1/2 A_1 y_*^2$, функция A_1 остается произвольной. Для ее определения необходимо рассмотреть следующую задачу относительно Ψ_2^* :

$$\frac{1}{2} p_{00} y_*^2 \frac{\partial^2 \Psi_2^*}{\partial x_* \partial y_*} - p_{00} y_* \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_*} = \frac{\partial^3 \Psi_2^*}{\partial y_*^3} - \frac{\partial p_*}{\partial x_*} - \frac{1}{2} A_1 A_1' y_*^2 \quad (2.6)$$

$$\partial p_* / \partial y_* = 0; \quad \Psi_2^* = \partial \Psi_2^* / \partial y_* = 0 \quad (y_* = 0)$$

$$\Psi_2^* = \frac{p_{00} a_0^2}{40320} y_*^9 + \frac{a_0^2}{120} x_* y_*^5 + \frac{1}{2} A_2 y_*^2 + \dots, \quad (x_* \rightarrow -\infty, y_* \rightarrow +\infty)$$

Относительно функции $A_2(x_*)$ известно, что

$$A_2 = b_0(-x_*)^{7/4} + k_1 b_1(-x_*)^{-1/4} + \dots, \quad x_* \rightarrow -\infty$$

Для замыкания задачи (2.6) в работе [2] рассматривалась область потенциального течения, из анализа которой и было найдено недостающее условие, связывающее давление p_* и неизвестную функцию A_1 . Эта связь получена с помощью линейной теории невязких течений.

В данном случае внешний поток отсутствует и потому взаимодействие определяется иными причинами. Ситуация фактически аналогична рассмотренной в [5-7]. Единственное отличие заключается в существовании дополнительной промежуточной области 3 (фиг. 1), в остальном сходство механизмов взаимодействия полное. Наличие области 3, однако, не изменяет картины взаимодействия. Вязкий пристенный слой 2 оказывает вытесняющее воздействие, которое без изменения передается через зону 3 и поджимает невязкий поток в области 4. В результате возникает перепад давления поперек зоны 4, стремящийся компенсировать сжатие. Существование равновесия между этими действиями вынуждает решать задачи в областях 2 и 4 совместно.

Определим порядок величины ε , при котором необходимо учитывать явление взаимодействия. Из физических соображений ясно, что индуцируемый поперечный градиент давления в области 4 $\Delta p_* / \Delta y_* \sim l^{1/2} \varepsilon^{3/4} R^{1/2}$ должен иметь тот же порядок величины, что и кривизна линий тока, т. е. $O(l^{-3/2} R^{-1/2} / \varepsilon^{1/2})$. Соответственно находим, что $\varepsilon = R^{-4/7} l^{-4/3}$.

Для определенности будем строить решение задачи при $l = R^{-3/5}$, для других размеров скругления l приведенный ниже анализ может быть повторен без существенных изменений.

Асимптотическое разложение решения в области 4 ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0(y_4) + R^{-1/50} u_5(x_0, y_4) + R^{-9/50} U(x_4, y_4) + \dots \\ v &= (R^{-7/50} y_0'(x_0) + R^{-9/50} y_0''(x_0) x_4 + \dots) u_0 + R^{-14/50} (y_0'(x_0) u_5 + V) + \dots \\ p &= R^{-14/50} p_5(x_0, y_4) + R^{-18/50} \partial p_5 / \partial x_5 |_{x_5=x_0} x_4 + \dots + R^{-19/50} p_* + \dots \\ x &= 1 + R^{-3/5} (x_0 + R^{-1/25} x_4), \quad y = R^{-1/2} [y_0(x_0 + R^{-1/25} x_4) + y_4] \end{aligned}$$

Подстановка данных разложений в уравнения Навье — Стокса дает краевую задачу относительно неизвестных функций U , V и p_* . Решение ее с учетом условий срачивания на границах с областями 5 и 3 дается выражениями

$$V = -[A_1'(x_i) p_{00} + d] u_0$$

$$p_* = -\gamma A_1''(x_i) / p_{00} \quad (y_i = 0)$$

Параметры p_{00} и γ определены в п. 1, величина d не вычисляется и в дальнейшем не используется.

Полученное выражение для давления p_* замыкает задачу (2.6). После замены переменных

$$\Psi_2^* = \Psi_2 + \frac{p_{00} a_0^2}{40320} y_*^9 + x_* \frac{a_0^2}{120} y_*^5 + \frac{1}{2} A_2(x_*) y_*^2 + \frac{A_1^2 - a_0^2 x_*^2 - 2k_1 a_0 a_1}{2p_{00}} y_*$$

и аффинных преобразований

$$\Psi_2 = \gamma^{3/4} p_{00}^{-11/4} a_0^{19/4} \Psi, \quad x_* = \gamma^{2/3} p_{00}^{-1/3} a_0^{-2/3} X$$

$$y_* = \gamma^{1/4} p_{00}^{-2/3} a_0^{-1/4} Y, \quad p_* = \gamma^{5/3} p_{00}^{-5/3} a_0^{9/3} p$$

$$A_1 = \gamma^{2/3} p_{00}^{-1/3} a_0^{5/3} A$$

задача о взаимодействии (2.6) может быть записана в виде

$$\frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} - Y \frac{\partial \Psi}{\partial X} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} - \frac{dp}{dX} \quad (2.7)$$

$$p = -A''(X), \quad \Psi|_{Y=0} = \Psi|_{Y=+\infty} = \Psi|_{X=-\infty} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right|_{Y=0} = -\frac{1}{2} (A^2 - X^2 - 2a), \quad a = k_1 a_1 p_{00}^{2/3} \gamma^{-4/3} a_0^{-3/3}$$

где a — параметр подобия для течений рассматриваемого типа.

Краевая задача (2.7) формально записана в виде, указанном в [2], где установлено, что ее решение существует, если функция A удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

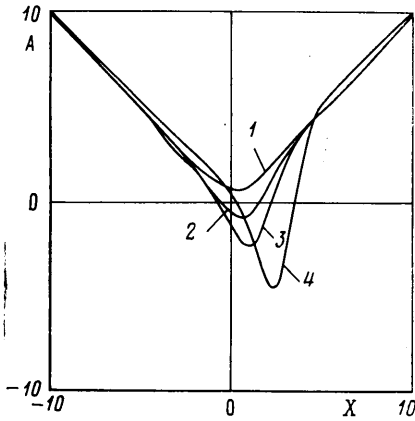
$$A^2 - X^2 - 2a = -\lambda \int_{-\infty}^X \frac{p'(t) dt}{\sqrt{X-t}}, \quad \lambda = \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{2} \Gamma(5/4)} \quad (2.8)$$

Здесь $A(X)$ — напряжение трения на поверхности тела в области взаимодействия, $p'(X)$ — индуцированный градиент давления. В случае обтекания струей препятствия (2.8) принимает вид

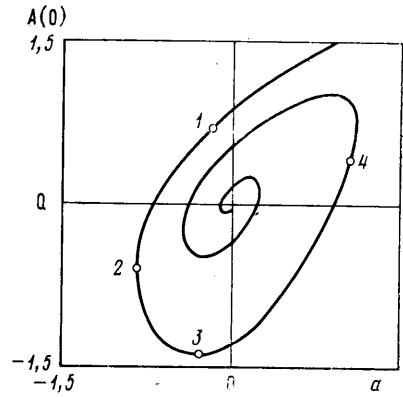
$$A^2 - X^2 - 2a = \lambda \int_{-\infty}^X \frac{A'''(t) dt}{\sqrt{X-t}} \quad (2.9)$$

Таким образом, течение данного типа реализуется, если существует решение уравнения (2.9).

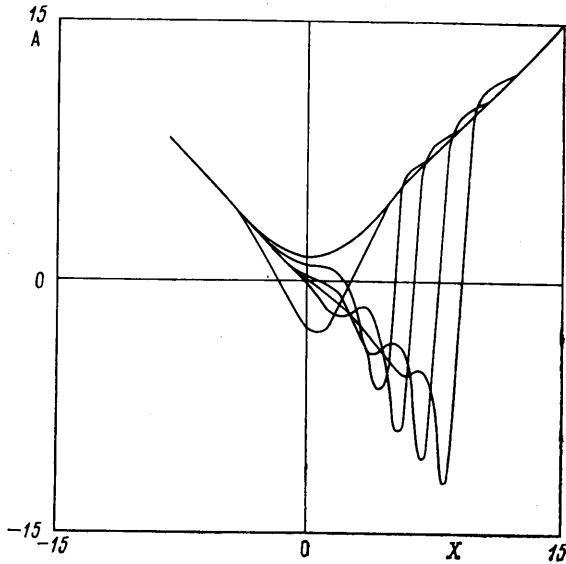
3. Прежде чем приступить к численному анализу полученного уравнения (2.9), необходимо решить вопрос о выборе для него нужного числа краевых условий. Одно из условий известно: $A = -X - a/X$ при $X \rightarrow -\infty$; оно следует из (2.4). Простой анализ показывает, что при $a \rightarrow +\infty$ (это соответствует уменьшению угла наклона стенки) вклад от интеграла в (2.9) становится незначительным; поэтому можно выписать решение, которое переходит в непрерывное решение уравнений пограничного слоя в области I (фиг. 1) [1, 2]: $A = (X^2 + 2a)^{1/2} + \dots$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Требуемое краевое условие при $X \rightarrow +\infty$ будет следующим: $A = X + a/X + \dots$

Для расчетов уравнение (2.9) и граничные условия преобразовывались к виду

$$A'' = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^x \frac{A^2 - t^2 - 2a}{\sqrt{X-t}} dt \quad (3.1)$$

$$A^2 - X^2 - 2a = \frac{15}{8}\pi\lambda a (-X)^{-7/2} + \dots \quad (X \rightarrow -\infty)$$

$$A^2 - X^2 - 2a = -\lambda X^{-7/2} + \dots \quad (X \rightarrow +\infty)$$

Интеграл от $-\infty$ до $-X_* \gg 1$ вычислялся аналитически, после чего уравнение (3.1) принимало вид

$$A'' = P(X, X_*, a) + \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-X_*}^x \frac{A^2 - t^2 - 2a}{\sqrt{X-t}} dt$$

$$P = \frac{15a}{4X^3} \left[\left(1 + \frac{X}{X_*}\right)^{3/2} - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{X}{X_*}\right)^{5/2} + \frac{1}{5} \left(1 + \frac{X}{X_*}\right)^{7/2} - \frac{8}{15} \right]$$

Пределы изменения аргумента выбирались в зависимости от значения параметра a из диапазонов от $[-10; 10]$ до $[-4; 24]$. Интеграл заменялся суммой по правилу трапеций, а производная записывалась через конечные разности. В результате для каждого узлового значения расчетной сетки X_m имелось нелинейное уравнение относительно A_m — значения функции A в узле с индексом m . Получающаяся в результате система нелинейных уравнений решалась двумя способами: методом нижней релаксации и методом Ньютона. Разница между результатами не превышала 1%. Основная часть расчетов выполнена с помощью метода Ньютона вследствие более высокой эффективности последнего. Как правило, было достаточно 6–7 итераций для получения решения; разность между последующими приближениями не превышала 10^{-6} . Численный расчет проводился с шагом $\Delta X=0,4$; при уменьшении его в 2 раза ошибка была в пределах 2%. Функция $A(X)$ для нескольких характерных значений $a=-0,17; -0,804; -0,27; 1,005$ показана на фиг. 3 (кривые 1–4). Эти кривые соответствуют точкам 1–4 на фиг. 4. Оказалось, что решение существует только при $a \geq -0,804$; причем в диапазоне $-0,804 \leq a \leq 1,05$ проявляется существенная неединственность возможных распределений напряжения поверхностного трения. На фиг. 5 показаны шесть возможных решений при значении $a=0$, причем только одно из них безотрывное. Чтобы был ясен характер неединственности, на фиг. 5 изображена зависимость $A(0)$ от величины параметра a . Эта кривая оказывается скручивающейся спиралью. В связи с этим отметим, что расчет выполнялся методом непрерывного движения вдоль спирали, начиная из области больших a . На вертикальных участках в качестве параметра использовалось значение $A(0)$, а a было искомым. По мере движения вдоль спирали координата точки присоединения монотонно растет.

Из численных результатов следуют два важных вывода.

1. При $a < -0,804$ решение не существует; это означает, по-видимому, разрушение отрывной зоны при дальнейшем увеличении угла наклона стенки и неприменимость данной теории. В [7] построено решение задачи об обтекании струей углов $\alpha=O(1)$ с «глобальной» зоной отрыва. Отметим, что при $l=R^{-1/2}$, согласно полученным выше результатам, $\alpha=O(1)$ и, следовательно, существует альтернативное «присоединенное» течение (но только до некоторого критического угла α).

2. Имеет место неединственность решения, возникающая несмотря на корректность постановки задачи в рамках используемого метода. Более того, характер кривой, изображенной на фиг. 5, наводит на мысль о бесконечном скручивании спирали при $|a| \rightarrow 0$, что соответствует счетному числу решений при $a=0$.

Автор выражает благодарность В. В. Сычеву и А. И. Рубану за полезные советы и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубан А. И. Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 6, с. 42–52.
2. Рубан А. И. Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 42–51.
3. Stewartson K., Smith F. T., Kaups K. Marginal separation.— Studies in Appl. Math., 1982, V. 67, № 1, p. 45–61.
4. Brown S. N., Stewartson K. On an integral equation of marginal separation.— SIAM J. Appl. Math., 1983, v. 43, № 5, p. 1119–1126.
5. Messiter A. F., Arbor A., Linan A. The vertical plate in laminar free convection: effects of leading and trailing edges and discontinuous temperature.— ZAMP, 1976, v. 27, № 5, p. 633–651.
6. Шидловский В. П. Структура течения вязкой жидкости вблизи кромки вращающегося диска.— ПММ, 1977, т. 41, № 3, с. 464–472.
7. Smith F. T., Duck P. W. Separation of jets of thermal boundary layers from a wall.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1977, v. 30, pt 2, p. 143–156.
8. Smith F. T., Brighton P. W. M., Jackson P. S., Hunt J. C. R. On boundary-layer flow past two-dimensional obstacles.— J. Fluid Mech., 1981, v. 113, p. 123–152.
9. Merkin J. H. Free convection boundary layers over humps and indentations.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1983, v. 36, pt 1, p. 71–85.
10. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.III.1985