Зависимости $Q^*(t^*)$, полученные при решении задач (1.3), (1.2), (2.5) для значений чисел Пекле, соответствующих условиям эксперимента, удовлетворительно согласуются с экспериментально полученными зависимостями. В качестве примера на фиг. 3 приведены экспериментальные и расчетные кривые для случаев Pe=1,3 (*1*) и 0,11 (*2*); кривые, построенные по данным эксперимента, отмечены точками. Видно, что начальные участки экспериментальных зависимостей имеют несколько больший наклон по сравнению с расчетными кривыми. Сравнение кривых показывает, что отличие результатов находится в пределах точности эксперимента [3].

Автор выражает признательность Л. Т. Черному, поставившему задачу, и В. В. Гогосову за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 536 с.
2. *Ватажин А. Б., Грабовский В. И., Лихтер В. А., Шульгин В. И.* Электрогазодинамические течения. М.: Наука, 1983. 344 с.
3. *Hewitt G. W.* The charging of small particles for electrostatic precipitation.— AIEE Trans., 1957, v. 76, pt 1, p. 300—307.
4. *Satoh V.* Measurement of the space potential and the density of the space charge in d.c. corona discharge.— Mem. Ryejen. Coll. Eng., 1932, v. 5, № 3, p. 205—226.
5. *Ушаков В. В.* К теории зонда Сато в электрогазодинамике.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 134—140.
6. *Варенцов О. К.* Обтекание проводящей сферы электрогазодинамическим потоком.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 4, с. 677—685.
7. *Васильева Н. Л., Черный Л. Т.* Электризация дисперсных частиц в униполярно заряженных двухфазных средах.— ПММ, 1982, т. 44, вып. 1, с. 107—115.
8. *Фукс Н. А.* О величине зарядов на частицах атмосферных аэроколлоидов.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1947, т. 11, № 4, с. 341—348.
9. *Мирзабекян Г. З.* Зарядка аэрозолей в поле коренного разряда.— В сб.: Сильные электрические поля в технологических процессах. (Электронно-ионная технология). Вып. 1. М.: Энергия, 1969, с. 20—39.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.II.1985

УДК 532.59:534.22

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ С ПЕРЕМЕННЫМ ПО ПРОСТРАНСТВУ ГАЗОСОДЕРЖАНИЕМ

АХАТОВ И. Ш., БАЙКОВ В. А., БАЙКОВ Р. А.

Исследуются особенности распространения нелинейных волн в газожидкостных системах пузырьковой структуры с переменным по направлению распространения волны газосодержанием. Показано, что в ряде случаев возможно усиление волн давления. Получены ограничения на степень неоднородности газосодержания, при выполнении которых это усиление возможно. Исследовано влияние неоднородности газосодержания на структуру нелинейных стационарных волн типа «солитон» и «ударная волна».

Система уравнений, описывающая плоское одномерное движение газожидкостной среды пузырьковой структуры, включает уравнения неразрывности смеси, движения смеси, осцилляций пузырьков и состояния газа внутри пузырька [1, 2]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v}{\partial x}=0,\qquad \rho=\rho_1^\circ\alpha_1+\rho_2^\circ\alpha_2,\qquad \alpha_1+\alpha_2=1$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x},\qquad p=\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2$$

$$R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{1}{\rho_1^\circ}\left[p_2-4\mu_1\frac{dR}{dt}-p_1\right],\qquad p_2=p_0\left(\frac{\rho_2^\circ}{\rho_{20}^\circ}\right)^\gamma \tag{1}$$

Здесь v, p, ρ — скорость, давление и плотность смеси; p_i, α_i, ρ_i° — давление, объемное содержание и истинная плотность жидкой ($i=1$) и газовой ($i=2$) фаз; R — радиус пузыря; μ_1 — вязкость жидкости; γ — показатель политропы газа в пузыре. Жидкая фаза считается несжимаемой (ρ_1°=const). Это предположение справедливо при $\alpha\gg\alpha_2^*$ ($\alpha_2^*=p/\rho_1^\circ c_1^2$), где c_1 — скорость звука в чистой жидкости.

Если газосодержание α_{20} мало меняется на расстояниях порядка длины волны возмущения, то система (1) в приближении слабонелинейных волн сведется к одному уравнению для возмущения давления

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2(x)\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{d(x)}{c^4(x)}\frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2\rho_0 c(x)}\frac{\partial^2 p'^2}{\partial x\,\partial t} + \tag{2}$$
$$+\frac{1}{2\rho_0}\frac{\partial^2 p'^2}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial^3 p'}{\partial x^2\,\partial t} + b(x)\frac{\partial^4 p'}{\partial x^2\,\partial t^2}$$

$$c^2(x) = \frac{\gamma p_0}{\alpha_{20}(x)\rho_1^\circ}, \qquad a(x) = \frac{4\mu_1}{3\alpha_{20}(x)\rho_1^\circ}$$

$$b(x) = \frac{R_0^2}{3\alpha_{20}(x)}, \qquad d(x) = \frac{c^2(x)(\gamma+1)}{2\alpha_{20}(x)\rho_1^\circ}$$

где $c(x)$ — равновесная скорость звука.

Уравнение (2), описывающее процесс распространения нелинейных волн в неоднородных диссипативных и диспергирующих средах, представляет собой уравнение Буссинеска с переменными коэффициентами. Будем считать, что члены в правой части уравнения (2) не изменяют волнового характера процесса, а приводят лишь к медленному изменению профиля волны. Тогда для волн, бегущих слева направо, решение целесообразно искать в виде

$$p' = p'(\varepsilon x, \tau), \qquad \tau = t - \int_0^x \frac{dx'}{c(x')} \tag{3}$$

где ε — малый параметр. В этом случае (2) допускает понижение порядка и для функции $\varphi = p'c^{-1/2}(x)$ принимает вид уравнения Бюргерса — Кортевега — де Вриза с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \sigma(x)c^{1/2}(x)\frac{\partial\varphi^2}{\partial\tau} - \frac{a(x)}{2c^3(x)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} - \frac{b(x)}{2c^3(x)}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\tau^3} = 0, \qquad \sigma(x) = \frac{d(x)}{2c^5(x)} \tag{4}$$

Отметим, что уравнения типа (4) описывают поведение волн на мелкой воде с переменной глубиной дна (см., например, [3]).

Эволюция волн достаточно большой длины $\lambda \gg \max(\mu_1/\alpha_{20}c^2\rho_1^\circ,\ R_0/\sqrt{\alpha_{20}})$, когда членами, ответственными за дисперсию и диссипацию, в (4) можно пренебречь, описывается уравнением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \beta(x)\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \qquad \beta(x) = \frac{(\gamma+1)\rho_0^{1/4}}{2(\gamma p_0)^{5/4}}\alpha_{20}^{1/4}(x) \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что решение (5) при условии $\varphi(0, \tau) = \Psi(\tau)$ имеет вид

$$\varphi = \Psi(\tau + \varphi I), \qquad I = \int_0^x \beta(x')\,dx' \tag{6}$$

Положим $\Psi(\tau) = \varphi_0 \sin\omega\tau$ и режим (6) относительно τ

$$\omega\tau = \arcsin\frac{\varphi}{\varphi_0} - Z(x)\frac{\varphi}{\varphi_0}, \qquad Z(x) = \omega\varphi_0\int_0^x \beta(x')\,dx' \tag{7}$$

Из (7) следует, что образование разрывного пилообразного решения начинается на расстоянии x_p, определяемом из условия $Z(x_p) = 1$. При $\alpha_{20}(x) = A\exp(-mx)$, $m > 0$, имеем

$$Z(x) = Z_0\left(1 - \exp\left(-\frac{mx}{4}\right)\right), \qquad Z_0 = \frac{2\omega\varphi_0(\gamma+1)\rho_0^{1/4}A}{m(\gamma p_0)^{5/4}} \tag{8}$$

Из (8) следует, что при достаточно больших темпах уменьшения газосодержания $m > m_* = 2\omega\varphi_0(\gamma+1)A\rho_0^{1/4}(\gamma p_0)^{-5/4}$ разрывное решение сформироваться не может. В случае, когда газосодержание увеличивается с расстоянием ($\alpha_{20}(x) = A\exp(mx)$), трансформация гладкого синусоидального профиля в разрывную пилообразную волну происходит на меньших расстояниях, чем в однородной по газосодержанию среде. При этом $x_p = (4/m)\ln(1 + {}^1/_4 m x_p^\circ)$, где $x_p^\circ = 2(\gamma p_0)^{5/4}\rho_0^{-1/4}/(\omega\varphi_0 A(\gamma+1))$ — расстояние, соответствующее образованию разрыва при $\alpha_{20}(x) = A = \mathrm{const}$.

Правило «равенства площадей» [4, 5] дает, что при $x>x_p$ ударный фронт в волне, которая первоначально при $x=0$ была синусоидальной, располагается в точке $\tau_p=0$ при любом значении x. Полагая в (7) $\tau=0$, получим уравнение для определения амплитуды разрыва

$$\frac{\varphi_p}{\varphi_0}=\sin\left(Z(x)\frac{\varphi_p}{\varphi_0}\right) \tag{9}$$

Решение (9) при различных Z приведено в [5]. Из этого решения следует, что при $x_p<x<x_\Phi$ $(Z(x_\Phi)=\pi/2)$ происходит формирование разрыва, амплитуда его возрастает, волна становится пилообразной. При $x>x_\Phi$ амплитуда разрыва φ_p уменьшается из-за нелинейного затухания. При $Z(x)>2$ справедливо приближенное аналитическое решение $\varphi_p/\varphi_0=\pi/(1+Z(x))$, которое для давления $P=p_p'/p_0'$ имеет вид

$$P=\frac{\pi}{1+Z(x)}K(x),\qquad K(x)=\sqrt{\frac{c(x)}{c_0}}$$

Из (8) следует асимптотика амплитуды волны на больших расстояниях.

$$P=\frac{\pi}{1+Z_0}K(x)$$

В случае, когда газосодержание уменьшается, имеет место усиление пилообразной волны давления.

Рассмотрим эволюцию одиночного треугольного импульса вида $\varphi_1=0$, $\tau<0$, $\tau>\tau_0$; $\varphi_1=1-\tau/T_0$, $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$ $(\varphi_1=\varphi/\varphi_0)$.

Из правила равенства площадей [4, 5] для амплитуды импульса φ_1, длительности T и давления P получим

$$\varphi_1=\left(1+\frac{\varphi_0}{T_0}I\right)^{-1/2},\qquad T=T_0\left(1+\frac{\varphi_0}{T_0}I\right)^{1/2},\qquad P=K(x)\left(1+\frac{p_0'}{\sqrt{c_0}\,T_0}I\right)^{-1/2}$$

Отметим, что в случае неоднородной среды амплитуда волны давления может как возрастать, так и уменьшаться, в то время как в однородной среде амплитуда треугольного импульса всегда уменьшается пропорционально $x^{-1/2}$. Легко показать, что если газосодержание падает быстрее, чем $x^{-4/3}$, то происходит увеличение амплитуды треугольного импульса, если медленнее, то уменьшение. Длительность импульса все время возрастает.

Отметим, что частный случай распространения бесконечного ступенчатого импульса получается предельным переходом $T_0\to\infty$. При этом имеем $P=K(x)$.

Исследуем задачу о распространении бесконечного импульса постоянной амплитуды с экспоненциально нарастающим фронтом $\varphi_1=1-\exp(-n\tau)$. Тогда решение уравнения (5) до момента образования разрыва имеет вид

$$\varphi_1(x,\tau)=1-\exp(-n(\tau+\varphi I))$$

Из правила равенства площадей следует, что величина образующегося скачка определяется из дифференциального уравнения (10), решение которого при начальном условии $Z=1$, $y=0$ имеет следующий вид:

$$Z=-\frac{1}{y^2}(\ln(1-y)+y)$$

$$\frac{dZ}{dy}=\frac{2(1-Z+Zy)}{y(1-y)},\qquad y=\varphi_1,\qquad Z=n\varphi_0 I \tag{10}$$

Решение задачи для случая экспоненциально падающего газосодержания $\alpha_{20}(x)=A\exp(-mx)$ при $m=1$ м$^{-1}$, $n=65$ с$^{-1}$, $c_0=\sqrt{\gamma p_0/\rho_1^\circ A}=100$ м/с, $\gamma=1$ приведено на фигуре $(P=p'/p_0')$. Линии *1–5* соответствуют моментам времени $t_1=0$, $t_2=12{,}6$ мс, $t_3=17{,}3$ мс, $t_4=19$ мс, $t_5=19{,}6$ мс. Линия *6* изображает зависимость величины скачка от x и при больших x ведет себя как $0{,}8\exp(0{,}5mx)$. Линия *7* — огибающая амплитуды волны $\sim\exp(0{,}5mx)$.

Для длин волн $\lambda\sim(\mu_1/\alpha_{20}c^2\rho_1^\circ,\ R_0/\sqrt{\alpha_{20}})$ членами с высшими производными в уравнении (4) пренебречь нельзя. Учет того факта, что свойства среды мало изменяются на расстояниях порядка длины волны, позволяет считать коэффициенты в (4) медленно меняющимися функциями x. В случае, когда дисперсия в среде пренебрежимо мала по сравнению с диссипацией, полученное нестационарное решение типа пилообразной волны в рассматриваемом приближении примет вид размытой пилообразной волны, амплитуда и ширина которой зависит от x

$$\frac{p'}{p_0'}=K(x)\frac{1}{1+Z(x)}\left[-\omega\tau+\pi\,\mathrm{th}\frac{\pi\omega\tau c^2(x)\beta(x)p_0'}{a(x)c_0^{1/2}\omega(1+Z(x))}\right]$$

$$-\pi<\omega\tau<\pi$$

Для исследования влияния неоднородности газосодержания на структуру стационарных образований типа «солитон» и «ударная волна», имеющих место в однородных газожидкостных средах, решение уравнения (4) будем искать в виде квазистационарной волны бегущей слева направо со скоростью $c(x)+W\,(W\ll c(x))$

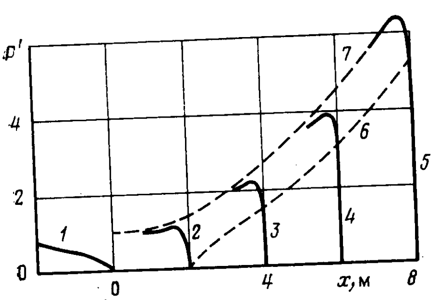
$$\varphi(\xi)=\varphi\left(\tau+W\int\limits_0^x\frac{dx'}{c^2(x')}\right)$$

В том случае, когда затухание в среде пренебрежимо мало по сравнению с дисперсией, уравнение (4) имеет решение в виде солитона, движущегося с переменной скоростью $c(x)+W$, шириной $\delta(x)\sim\alpha_{20}^{-1/4}(x)$, амплитудой $A(x)\sim\alpha_{20}^{1/2}(x)$

$$p(x,\xi)=A(x)\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{\xi}{\delta(x)}\right)$$

$$\delta(x)=\sqrt{\frac{2b(x)}{Wc(x)}},\qquad A(x)=\frac{3W}{c^{3/2}(x)\beta(x)}$$

В том случае, когда дисперсия в среде пренебрежимо мала, уравнение (4) имеет решение в виде монотонной ударной волны



$$p(x,\xi)=\frac{A_1(x)}{1+\exp(-\xi/\delta_1(x))}$$

$$A_1(x)=\frac{2W}{c^{3/2}(x)\beta(x)},\qquad \delta_1(x)=\frac{\alpha(x)}{2Wc(x)}$$

распространяющейся с переменной скоростью $c(x)+W$, шириной $\delta_1(x)\sim\alpha_{20}^{-1/2}(x)$ и амплитудой $A_1(x)\sim\alpha_{20}^{1/2}(x)$.

Если дисперсия существенна: $\alpha_{20}(x)>\mu_1^4/9\rho_0^3W^2R_0^4\gamma p_0$, то уравнение (4) описывает ударную волну, содержащую осцилляции вблизи фронта. Видно, что при уменьшении газосодержания осцилляционная ударная волна может выродиться в монотонную.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1973. 336 с.
2. *Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.* Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
3. *Островский Л. А.* Ударные волны и солитоны.— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, т. 19, № 5, 6, с. 661—690.
4. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.

Поступила в редакцию
28.I.1985

Уфа