

УДК 519.65,629.73

АПРОКСИМИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ВЕЛИЧИН ПОДБОРОМ
ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ФОРМУЛАХ ОСРЕДНЕНИЯ

АНТОНЕЦ А. В.

Излагается метод получения простых аппроксимационных формул на основе критериального осреднения заданных значений величин, пригодный для построения приближений неинтерполяционного типа. Примеры вывода полезных трехточечных корреляций давления и проекций аэродинамических сил от различных параметров сопровождаются сравнениями с результатами численных расчетов сверхзвукового обтекания тел.

1. Формализм критериального осреднения. Рассмотрим задачу аппроксимирования общих функциональных зависимостей (функций или функционалов) от произвольного числа аргументов по формулам N -точечного осреднения

$$F(M) \approx \sum_{i=1}^N F_i Q_i(M) \quad (1.1)$$

Здесь F_i — известные для эталонного базиса величины (в частности, заданные в табличных узлах значения восстанавливаемой функции); $Q_i(M)$ — искомые весовые множители; M — произвольная точка пространства независимых переменных и определяющих параметров.

Для классических приближений разложение по выбранным пробным функциям $q_k(M)$ дает

$$F(M) \approx \sum_{k=1}^K C_k q_k(M), \quad F_i = F(M_i)$$

Множители Q_i находятся в этом случае из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N q_k(M_i) Q_i = q_k(M), \quad k=1, 2, \dots, K \leq N \quad (1.2)$$

Если число условий K совпадает с числом опорных узлов N и определитель $\det \{q_k(M_i)\} \neq 0$, то $Q_i(M)$ представляют собой один из наборов базисных интерполирующих функций, удовлетворяющих соотношениям $Q_i(M_j) = \delta_{ij}$; $i, j=1, 2, \dots, N$. При $K \neq N$ искомые коэффициенты подбираются из условий минимизации невязок в уравнениях (1.2) каким-либо из подходящих методов.

Единообразную трактовку можно придать еще одной группе эвристических приемов, сводящих задачу отыскания весовых множителей в (1.1) к удовлетворению одного единственного уравнения вида (1.2). Оно выводится при подстановке в (1.1) вместо F и F_i их аналитических аппроксимаций. Тогда, переходя от осреднения (1.1) к идентичному соотношению с теми же самыми неизвестными Q_i между выбранными критериальными функциями, будем иметь

$$\Phi(M, P) \approx \sum_{i=1}^N \Phi_i(M_i, P) Q_i \quad (1.3)$$

где P — точка пространства варьируемых переменных. При выборе критериальных функций следует, очевидно, обращать внимание на то, что чем полнее учитываются особенности конкретной физической задачи, тем более удачно может быть проведена требующаяся аппроксимация.

Легко реализуемыми формальными математическими критериями выбора оптимальных выражений для коэффициентов являются: 1) минимизация квадрата невязки

$$\min_{Q_1, \dots, Q_N} \int_{v_P} \left(\Phi - \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i \right)^2 dv_P$$

2) ортогональность невязки некоторому набору $f_1(P), \dots, f_N(P)$ из полной системы независимых функций

$$\int_{v_P} \left(\Phi - \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i \right) f_j dv_P = 0, \quad j=1, 2, \dots, N$$

3) обращение в нуль невязки в характерных точках коллокации

$$\Phi(M, P_j) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(M_i, P_j) Q_i, \quad j=1, 2, \dots, N$$

4) дополнительные связи между неопределенными коэффициентами аппроксимаций, устанавливаемые для тэйлоровских разложений в (1.1)

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 1$$

и т. д.

Для определения неизвестных Q_i тем или иным способом выписывается замкнутая система линейных алгебраических уравнений. Во многих случаях благодаря возможности получения систем линейных уравнений с матрицами специальной структуры удается записать их решение в виде простых формул. Не возникает сложностей с выводом аналитических формул и при построении аппроксимаций невысокого порядка ($N \approx 5$). В прикладных исследованиях широко используются линейные разложения сложных решений физических задач по базисам, составленным из более простых частных решений [1-4].

2. Примеры аппроксимационных зависимостей для аэродинамических расчетов. Применим изложенный в п. 1 математический формализм к построению корреляций газодинамических величин. Весовые множители Q_i в формуле (1.1) будем вычислять по разложениям (1.2) или (1.3) с критериальными функциями, подсказываемыми теорией локального взаимодействия.

Для зависимости давления от угла атаки в фиксированных точках поверхности обтекаемых тел в ньютоновском приближении справедливо разложение

$$p \approx C_1 \sin^2 \alpha + C_2 \cos^2 \alpha + C_3 \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.1)$$

Если коэффициенты C_i взять не из формулы Ньютона, а найти по условиям (1.2) при $N=K=3$, используя заданные значения давления в опорных точках при углах атаки $\alpha = \alpha_i$ ($i=1, 2, 3$), то будем иметь

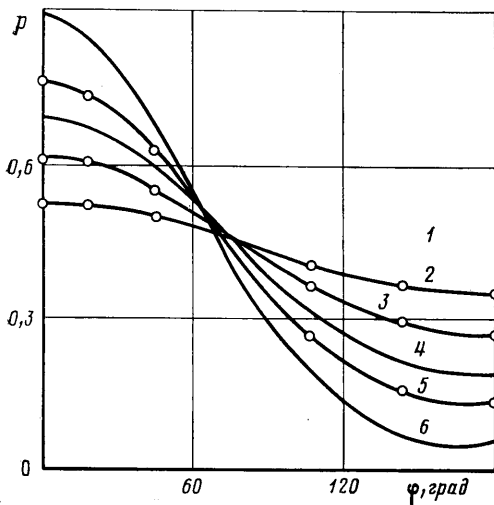
$$p \approx \sum_{i=1}^3 p_i Q_i, \quad Q_i = D_i / D, \quad (2.2)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - \\ - \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1)$$

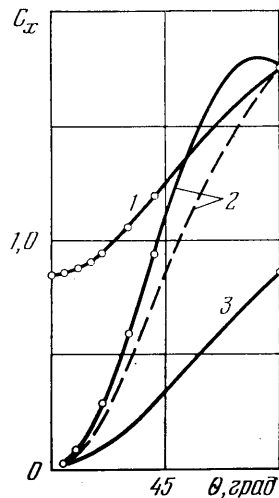
Выражения для определителей D_i получаются из формулы вычисления определителя D после замены в ней величины α_i на α .

На фиг. 1 показаны рассчитанные по программе [5] зависимости давления от меридионального угла φ на остром конусе с углом полураствора $\theta=40^\circ$ и условиями обтекания при числе Маха $M_\infty=20$, показателе адиабаты $\gamma=1.4$; углах атаки $\alpha=0-30^\circ$. Кривые 1-6 соответствуют значениям $\alpha=0, 5, 10, 15, 20$ и 30° . Кружками нанесены значения, вычисленные по формуле (2.2) с узлами $\alpha_i=0, 15, 30^\circ$. Погрешности построенной корреляции во всем диапазоне углов $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$ не превышают 4%, что можно считать хорошим подтверждением обоснованности приближения (2.1).

В тех случаях, когда прямые численные исследования затруднены, возрастает интерес к построению разложений вида (1.1) для оперативного определения аэро-



Фиг. 1



Фиг. 2

динамических характеристик (АХ) различных тел по их известным значениям для заготовленного набора эталонных тел. Особым преимуществом критериального подбора весовых коэффициентов перед более изученными методами безусловной интерполяции по выделенным переменным является его применимость к любому базису без обязательного отнесения всех рассматриваемых тел к единому параметрическому семейству. Это значительно облегчает внедрение такого рода экономичных расчетов АХ по формам заданных поверхностей тел $r(x, \varphi)$ независимо от условий обтекания и «индивидуальности» восстанавливаемой характеристики.

Ниже используется общий прием отождествления множителей Q_i в (1.1) с множителями соотношения (1.3), идентичного исходному между эвристически устанавливаемыми критериальными функциями $\Phi_i(x, \varphi, r(x, \varphi))$. В методе вычисления АХ [6] с помощью теории локального взаимодействия для тел вращения с выпуклой образующей обосновывается введение критериальных функций

$$\Phi_i = r_i^2(x), \quad i=0, 1, \dots, N \quad (F = C_{i0}, Q_i = \beta_i)$$

Полезные приближения этим методом удастся вывести также и в элементарном базисе из трех предельных тел: цилиндрического торца 1, сферического сегмента 2 и касательного к нему острого конуса 3. Форму тел в таком базисе удобно представлять в переменных (η, r) , где $\eta = \cos \theta = [1 + (dr/dx)^2]^{-1/2}$. Интегральным методом наименьших квадратов по критерию

$$\min_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda} \left\{ \int_0^{\eta_k} \left(r_0^2 - \sum_{i=1}^3 \beta_i r_i^2 \right)^2 d\eta + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^3 \beta_i \right) \right\}$$

найдем общие формулы вычисления искомых приближенных значений коэффициентов β_i разложения произвольной функции $r^2(\eta)$ по выбранному базису

$$\beta_1 = 0,75(3A - 5B), \quad \beta_2 = 3,75(3B - A), \quad \beta_3 = 1 - \beta_1 - \beta_2 \quad (2.3)$$

$$A = \left(\int_0^{\eta_k} r^2(\eta) d\eta \right) / (r_k^2 \eta_k), \quad B = \left(\int_0^{\eta_k} r^2(\eta) \eta^2 d\eta \right) / (r_k^2 \eta_k^3)$$

Для сложных функций провести интегрирование позволяет замена образующей $r(\eta)$ ломаной линией из N прямолинейных отрезков (ординаты в точках изломов контура $t_i = \eta_i / \eta_k$ берутся в долях радиуса миделевого сечения r_k). В переменных (η, r) ломаными с двумя гладкими участками точно задаются образующие затупленных по сфере конусов ($N=2, t_0=0, t_1=t_2=1$), а ломаными с тремя участками — оживальные образующие ($N=3, r_0=r_1=0, r_2=r_3=r_k, t_0=0, t_3=1$), для которых получаем

$$A = 1 - (t_1 + 2t_2) / 3 \quad (2.4)$$

$$B = [10 + t_1^2 t_2 - 3t_2^3 - (t_1 + t_2)^3] / 30$$

Для приближенных расчетов коэффициентов сопротивления затупленных по сфере конусов с одинаковыми углами полураствора $\theta_k = \arccos \eta_k$ и значениями радиусов миделевого концевого поперечного сечения r_k выводим корреляцию по величине радиуса в сечении сопряжения со сферическим носком r_* (отнесенного к длине радиуса миделя r_k) $C_{x_2} \approx C_{x_3} + (C_{x_2} - C_{x_3}) r_*^2$, $0 \leq r_* \leq 1$. Видно, что корреляционная формула приводит к линейной зависимости от параметра r_*^2 . Этот же результат следует и непосредственно из допущения о независимости АХ боковой поверхности усеченного конуса от формы носового затупления. Как показывают сравнения с эталонными численными расчетами [7], данная корреляция коэффициентов осевой силы имеет более высокую точность для небольших углов атаки и растворов конуса. Точность согласования коэффициентов нормальной силы несколько ниже. При необходимости снижения погрешности можно обеспечить, переходя к локальным интерполяциям по параметру r_*^2 .

Примеры еще трех выведенных корреляционных зависимостей представлены графиками на фиг. 2. Кривая 1 изображает зависимость коэффициента осевой силы у сферических сегментов с одинаковыми значениями радиуса миделя r_k от величины угла ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$) между осью симметрии и касательной к меридиональному контуру в концевой точке. Выражения для весовых множителей (берется базовый конус нулевого угла раствора с $\theta_k = 0$ и $C_{x_3} = 0$) выводятся при значениях $t_1 = 0$, $t_2 = t = \cos \theta$ из (2.3), (2.4): $\beta_1 = 1 - t(3 - t^2)/2$, $\beta_2 = t[1 + 3(1 - t^2)/2]$.

Кривые 2 соответствуют вырожденному случаю острых конусов с углами полураствора $5^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ$, для которых $C_x = C_p = 2(p - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2)$. Штриховая кривая 2 построена по значениям β_i из (2.3), (2.4). Значительные погрешности этой формально полученной корреляции, видимо, обусловлены игнорированием особенностей, вызванных нарушением взаимно однозначного соответствия между переменными r и $\eta = \cos \theta = \text{const}$. Сплошная кривая 2 иллюстрирует один из возможных способов оперативного улучшения неудовлетворительных интерполяций посредством коррективы полинома Лагранжа

$$F(t) = \sum_{i=1}^N F_i q_i(t) / q_i(t_i) + x \prod_{i=1}^N (t - t_i)$$

где t_i — узлы интерполяционного полинома Лагранжа степени $N-1$, x — управляющий множитель в корректирующем слагаемом. Немонотонность интерполяции, свойственная обычно полиному Лагранжа, ослабляется подбором значения параметра x из условия минимума интеграла от квадрата второй производной $F''(t)$ на заданном отрезке $a \leq t \leq b$. В простейшем случае интерполяции по трем узлам имеем

$$x = -3G(\mu + \nu) / [2(\mu^2 + \mu\nu + \nu^2)]$$

$$G = \sum_{i=1}^3 F_i / q_i(t_i), \quad \mu = 3b - s, \quad \nu = 3a - s, \quad s = \sum_{i=1}^3 t_i$$

Для построения сплошной кривой 2 использовались значения $t_i = \cos \theta_i = 0$, $\cos 40^\circ$, $\cos 5^\circ$; $a = 0$; $b = 1$.

Кривая 3 на фиг. 2 отвечает зависимости коэффициента сопротивления оживальных затуплений, гладко пристыкованных к круговому конусу с углом полураствора $\theta_k = 5^\circ$, от угла заострения оживала θ_0 . Выражения для множителей β_i , как и выше, при $t_1 = t = \cos \theta_0 / \cos \theta_k$, $t_2 = 1$ непосредственно следуют из (2.3), (2.4)

$$\beta_1 = t[(1+t)^2 - 4]/8, \quad \beta_2 = (1-t)[1 + 3t(3+t)]/8, \quad \beta_3 = t[1 - (1-t)(3+t)]/4$$

Во всех сравнениях на фиг. 2 точками нанесены данные [7] при $M_\infty = 3$, $\gamma = 1,4$. По аналогии с разобранными примерами можно попытаться по осредняющим формулам (1.1) уточнить пересчет газодинамических параметров (относительных величин проекции скорости, давления и т. д.) внутри ударного слоя на все допустимые узловые значения чисел Маха набегающего потока $M_\infty > 1$, связывая критерияльное условие уже не с формой тел, а с формой ударных волн. В качестве такого условия для осесимметричных ударных волн удобно взять совпадающее по форме с [6] соотношение

$$r_0^2 = \sum_{i=1}^N \beta_i r_i^2$$

Такой выбор весовых множителей β_i обеспечивает инвариантность относительно координаты вдоль оси течения весового осреднения поступающего в ударный слой безразмерного расхода газа при расчетном числе Маха $M_\infty^{(0)}$ через расходы, отвечающие опорным числам Маха $M_\infty^{(i)}$. При этом возможно повторное использование осред-

пяющих коэффициентов, получаемых для степенных тел по методу [6], с привлечением степенных аппроксимаций ударных волн [8].

Таким образом, конструировать аппроксимации вида (1.1) естественно с оптимальным подбором весовых множителей из общего принципа инвариантности эвристических разложений. Простота и лучшая обоснованность аппроксимаций критерияльного осреднения позволяют создавать на их основе экономичные методы расчета сложных зависимостей величин, в том числе аэродинамических характеристик, по эталонным базисам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
2. Лунев В. В. Метод искривленных тел в задачах нестационарного гиперзвукового обтекания тонких тел.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 5, с. 64–72.
3. Katz J., Schiff L. B. Modelling of the aerodynamic response to arbitrary aircraft maneuvers.— AIAA Pap., 1984, № 2079.
4. Ramadi B. N., Taylor L. W. On the prediction of autorotational characteristics of light airplane fuselages.— AIAA Pap., 1984, № 2112.
5. Бачманова Н. С., Лавыгин В. И., Липницкий Ю. М. Исследование сверхзвукового обтекания круговых конусов на больших углах атаки.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6, с. 79–84.
6. Антонец А. В., Дубинский А. В. Метод вычисления аэродинамических характеристик тел на основе инвариантных соотношений теории локального взаимодействия.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 872–874.
7. Чушкин П. И., Шулишина Н. П. Таблицы сверхзвукового течения около затупленных конусов. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1961, 92 с.
8. Антонец А. В., Маринин В. П. О расчете давления на боковой поверхности сегментально-конических тел при сверхзвуковом обтекании.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 1, с. 178–183.

Москва

Поступила в редакцию
17.VIII.1984

УДК 532.529.6

РАЗРУШЕНИЕ КАПЕЛЬ ЖИДКОСТИ В ВОЛНАХ РАЗРЕЖЕНИЯ

БОРИСОВ А. А., ГЕЛЬФАНД Б. Е., ПОЛЕНОВ А. Н.,
ТИМОФЕЕВ Е. И., ЦЫГАНОВ С. А.

Описана отличная от традиционных методика наблюдения процессов дробления капель жидкости в плавно ускоряющихся потоках газа, генерируемых волной разрежения. В плавно ускоряющихся потоках обнаружен режим дробления со срывом пограничного слоя жидкости с капель. Показано, что критические условия начала дробления со срывом поверхностного слоя в волнах разрежения более жесткие, чем за ударными волнами. Отмечено слабое влияние на процесс дробления поверхностного натяжения и вязкости жидкости.

1. Исходные положения. При экспериментальных и теоретических исследованиях течений газ-частицы конденсированной фазы одним из главных параметров, определяющих характер течения, является размер частиц. В связи с этим процессы, способствующие изменению спектра размера частиц в потоке, оказывают заметное влияние на динамику течения и постоянно являются предметом пристального внимания. Особенно резко размер частиц конденсированной фазы может меняться при дроблении капель жидкости при обтекании их потоком газа. Обтекание капель всегда возникает в двухфазных потоках из-за различия инерционности частиц и газа при любых воздействиях, ведущих к изменению скорости газа: варьировании геометрии каналов, подводе тепла и массы, возникновения скачков уплотнения. Однако если явление дробления капель за ударными волнами достаточно хорошо изучено, то понимание процесса дробления в плавно ускоряющихся потоках нельзя признать удовлетворительным. Уже в работе [1] было выдвинуто предположение о том, что критические условия начала разрушения капель в потоках без скачков уплотнения и за ударными волнами заметно различаются. Результаты исследований в [2–5] частично подтверждают этот вывод.

В [2, 3] найдено, что начало дробления капель в сопловых потоках определяется значением числа Вебера $We^* = \rho u^2 d (2\sigma)^{-1} = 10-15$. Здесь ρ , u — плотность и скорость газа, d — размер капель, σ — поверхностное натяжение жидкости. Напомним, что в ударных волнах $We^* \approx 5$.

В отличие от исследований дробления капель в ударных волнах для плавно ускоряющихся потоков не установлены возможные режимы дробления капель и кри-