

УДК 536.25

**КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ  
В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ**

**ЧЕРКАСОВ С. Г.**

Численное моделирование естественной конвекции в частично заполненном вертикальном цилиндрическом сосуде позволило получить ряд важных результатов. Установлено, что в зависимости от величины числа Рэлея можно выделить режимы слабой и интенсивной конвекции [1]. При интенсивной конвекции имеются четко выраженные пограничный слой на боковой стенке сосуда и центральное ядро, температура в котором постоянна по горизонтали. В [1, 2] показано, что температурное расслоение (разность между средней температурой свободной поверхности и среднemasсовой температурой жидкости) в случае бокового подвода тепла имеет максимум при числе Рэлея, соответствующем переходу от слабой к интенсивной конвекции. В [1, 3] изучались нестационарные режимы конвекции. Показано, что при интенсивной конвекции можно выделить четыре нестационарных режима конвективного течения: режим развития конвекции, режим конвективных колебаний, переходный и квазистационарный режимы. Исследованы особенности пространственной структуры течения и поля температуры для каждого из режимов. В [4, 5] изучалось влияние подвода тепла к свободной поверхности и дну. Установлено, что подвод тепла к свободной поверхности приводит к значительным изменениям характеристик конвекции.

Основное внимание в указанных выше работах уделялось изучению отдельных качественных особенностей конвекции. Главной целью данной работы является исследование количественных закономерностей квазистационарного режима конвекции. Этот режим, важный с точки зрения практических приложений, наступает при достаточно большом времени прогрева и характеризуется тем, что конвективное течение и пространственные неоднородности поля температуры не зависят от времени. В ходе проведенного параметрического исследования варьировались все критерии подобия, определяющие течение и теплообмен в рамках принятой постановки задачи. Для обобщения результатов расчетов предложены критериальные зависимости.

Рассматривается естественная конвекция в вертикальном цилиндрическом сосуде радиуса  $R$ , частично заполненном до высоты  $L$ . Свободная поверхность жидкости предполагается плоской при отсутствии на ней трения. К боковой и свободной поверхностям жидкости подводятся постоянные во времени и равномерно распределенные тепловые потоки  $q$  и  $q_1$ . Предполагается также, что поля скорости и температуры осесимметричны и угловая составляющая скорости отсутствует.

Численная реализация квазистационарного режима достигалась путем решения нестационарной задачи с начальными условиями, соответствующими неподвижной и однородно прогретой жидкости. Уравнения конвекции в приближении Буссинеска [6], а также граничные и начальные условия представим в следующем безразмерном виде:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \text{Fo}} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + v \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{u\omega}{r} \right) = \text{Ra}_r^* \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \omega r$$

$$r \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} + \frac{\partial}{\partial r} (ru \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (rv \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \psi|_{r=0} &= \psi|_{r=1} = \psi|_{z=0} = \psi|_{z=H} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=1} &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \omega|_{r=0} = \omega|_{z=H} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=0} &= \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=H} = q_s \\ \omega|_{r=0} &= \psi|_{r=0} = \theta|_{r=0} = 0 \\ \omega &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ Ra_R^* &= \frac{g\beta q R^4}{\nu a \lambda}, \quad Pr = \frac{\nu}{a}, \quad H = \frac{L}{R}, \quad q_s = \frac{q_1}{q} \\ Fo &= \frac{at}{R^2}, \quad \theta = \frac{(T-T_0)\lambda}{qR} \end{aligned}$$

Здесь  $u$ ,  $v$  — составляющие скорости по осям  $r$  и  $z$  (ось  $z$  направлена вверх),  $\theta$  — безразмерная температура ( $T_0$  — начальная температура),  $Ra_R^*$  — число Релея,  $Pr$  — число Прандтля,  $H$  — степень заполнения,  $q_s$  — безразмерный тепловой поток, подводимый к свободной поверхности,  $Fo$  — число Фурье (безразмерное время),  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $a$  — коэффициенты теплового расширения, теплопроводности и температуропроводности,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

В качестве масштабов длины и скорости использованы величины  $R$  и  $a/R$ . Такой выбор масштабов безразмерных величин не является единственно возможным для данной задачи. Например, в качестве масштаба длины можно использовать высоту заполненной части сосуда  $L$ , а за масштаб скорости принять величины  $\nu/R$ ,  $\nu/L$  или  $a/L$ . Неоднозначен также и выбор системы определяющих критериев подобия. В частности, вместо числа Релея  $Ra_R^*$  можно использовать число Грасгофа  $Gr_R^* = Ra_R^*/Pr$ , а также числа Релея или Грасгофа, определенные не через радиус сосуда, а через высоту  $L$ . Однако проведенные расчеты показали, что для квазистационарного режима наиболее предпочтительной является система масштабов и определяющих критериев подобия, принятая в данной работе. В этой системе упрощается вид обобщающих критериальных зависимостей. Обнаружено, в частности, что число Прандтля не оказывает влияния на основные характеристики конвекции, а степень заполнения заметно влияет только на температурное расслоение. Поэтому основными определяющими параметрами являются число Релея  $Ra_R^*$  и безразмерный тепловой поток  $q_s$ . В проведенных расчетах число Релея варьировалось от  $10^6$  до  $10^9$ . При дальнейшем увеличении числа Релея конвекция становится турбулентной [3], так что охваченный в расчетах диапазон числа Релея соответствует наиболее интенсивной ламинарной конвекции. Тепловой поток  $q_s$  изменялся от 0 до 1, что полностью охватывает диапазон, в котором конвекция влияет на температурное расслоение. Число Прандтля варьировалось от 1 до 7. Этот диапазон интересен с точки зрения практических приложений (криогенные жидкости, вода). Степень заполнения изменялась от 1 до 4.

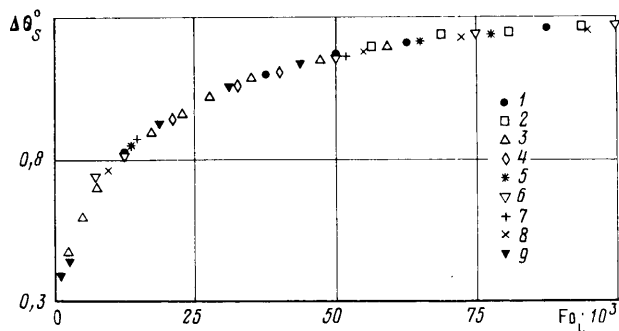
Применявшийся метод численного моделирования в основном совпадает с методом [3]. Единственное отличие состоит в том, что для решения уравнения конвективной теплопроводности использовалась консервативная разностная схема [7], повышающая точность расчетов.

Рассмотрим сначала вопрос о времени установления квазистационарного режима. В [4, 5] отмечалось, что наиболее медленно устанавливается распределение температуры по вертикали. Определим через  $\Delta\theta_s$  разность между средними температурами свободной поверхности при наличии и отсутствии конвекции. При боковом подводе тепла величина  $\Delta\theta_s$  совпадает с температурным расслоением, а при комбинированном подводе тепла — с конвективной добавкой к температурному расслоению [4]. По изменению во времени величины  $\Delta\theta_s$  удобно контролировать процесс установления квазистационарного режима конвекции. На фиг. 1 для случая бокового подвода тепла показано изменение во времени относительной величины температурного расслоения в переходном режиме конвекции. В ка-

честве безразмерного времени использовано число Фурье  $Fo_L = at/L^2$ , определенное через высоту столба жидкости, а температурное расслоение нормировано на температурное расслоение в момент времени  $Fo_L = 0,025$ .

Точкам 1–9 на фиг. 1 соответствуют следующие значения критериев подобия:  $Ra_R^* = 10^6; 10^7; 10^8; 10^9; 1,2 \cdot 10^7 (5-6); 1,4 \cdot 10^8; 2 \cdot 10^7; 1,2 \cdot 10^7; Pr = 1 (1-4); 4; 4; 7; 2; 1; H = 2 (1-5); 1; 2; 2; 4$ .

Видно, что зависимость относительной величины температурного расслоения от числа Фурье  $Fo_L$  является универсальной для переходного режима конвекции. Из этого, в частности, следует, что время установления квазистационарного режима не зависит от числа Рейля. Кроме того, само время установления ( $Fo_L \approx 0,1$ ) приблизительно совпадает со временем установления квазистационарного режима при кондуктивном прогреве



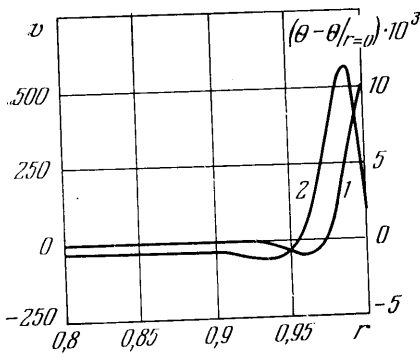
Фиг. 1

жидкости по вертикали [8]. Указанные особенности установления квазистационарного режима конвекции отмечались в [4] для случая комбинированного подвода тепла. Результаты, представленные на фиг. 1, показывают, что и при боковом подводе тепла установление квазистационарного режима происходит аналогичным образом.

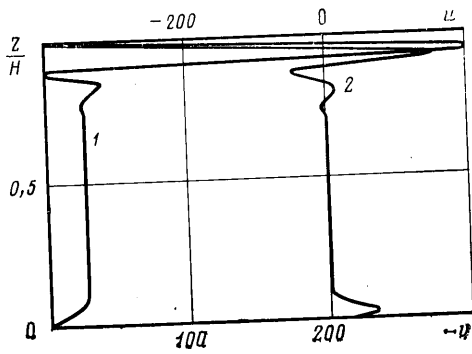
Следует отметить, что в переходном режиме конвекции горизонтальные разности температуры изменяются гораздо меньше, чем вертикальные. В [1, 3] установление квазистационарного режима контролировалось в основном по изменению горизонтальных разностей температуры. Поэтому приведенные в [1] данные о времени установления квазистационарного режима не согласуются с результатами, представленными на фиг. 1. По этой же причине формулы [3] дают несколько завышенные значения для скорости на поверхности, и заниженные — для вертикальной разности температуры.

Перейдем к рассмотрению квазистационарного режима, который при используемых начальных условиях устанавливается приблизительно при  $Fo_L = 0,1$ . На квазистационарном режиме скорости не зависят от времени, а рост температуры во всех точках объема одинаков и определяется величиной подводимых к жидкости тепловых потоков (при этом пространственные неоднородности поля температуры не меняются во времени).

Рассмотрим сначала структуру и характеристики течения и поля температуры при боковом подводе тепла. На фиг. 2 показаны профили температуры (1) и вертикальной составляющей скорости (2) в центральном горизонтальном сечении  $z = H/2$  ( $Ra_R^* = 10^9$ ,  $Pr = 1$ ,  $H = 2$ ). Отчетливо различаются динамический и тепловой пограничные слои на боковой стенке сосуда и центральное ядро, в котором вертикальная составляющая скорости и температура практически постоянны по горизонтали. На внешней границе пограничных слоев профили скорости и температуры имеют локальные минимумы, причем минимум температуры располагается приблизительно в той точке, где скорость обращается в нуль. Эти особенности подробно рассмотрены в [3]. Обозначим через  $\delta_w$  расстояние от боковой



Фиг. 2



Фиг. 3

стенки до точки максимума скорости. Полученные в расчетах значения параметра  $\delta_w$  аппроксимируются формулой

$$\delta_w = 0,91 (Ra_R^*)^{-0,21}$$

Проведенные расчеты показали, что форма профиля скорости в пограничном слое слабо меняется при изменении определяющих критериев подобия. В частности, при различных значениях критериев подобия расстояние от стенки до точки, в которой скорость равна нулю, приблизительно в 3,3 раза превышает расстояние до точки максимальной скорости  $\delta_w$ . Вычисленные значения максимальной скорости обобщаются формулой

$$v_{\max} = 0,28 (Ra_R^*)^{0,37}$$

На фиг. 3 приведены вертикальные профили вертикальной составляющей скорости на оси симметрии (1) и горизонтальной составляющей скорости (2) на расстоянии  $r=0,5$  от оси симметрии ( $Ra_R^*=10^9$ ,  $Pr=1$ ,  $H=2$ ). В верхней части сосуда, вблизи свободной поверхности, течение имеет слоистую структуру. Механизм этого явления подробно рассмотрен в [3]. Вблизи дна, как и около свободной поверхности, имеется значительное радиальное течение. Среднюю по высоте часть сосуда занимает центральное ядро, в котором радиальное течение практически отсутствует, а вертикальная составляющая скорости постоянна по высоте. Последние два фактора указывают, что расход жидкости через пограничный слой не зависит от высоты. Поэтому приведенные выше формулы справедливы не только для центрального горизонтального сечения, но и для всей центральной (по высоте) части сосуда.

Важной характеристикой интенсивности течения в замкнутом объеме является максимальное абсолютное значение функции тока. Полученные в расчетах значения этой величины описываются формулой

$$|\psi|_{\max} = 0,7 (Ra_R^*)^{0,14}$$

Для рассматриваемой задачи максимальная функция тока связана с максимальным расходом жидкости  $Q_{\max}$  через пограничный слой соотношением  $Q_{\max} = 2\pi |\psi|_{\max}$ . Поскольку расход  $Q$ , как показано выше, слабо меняется по высоте сосуда, то максимальная функция тока характеризует расход через пограничный слой во всей центральной (по высоте) части сосуда. Расход жидкости через ядро равен расходу через пограничный слой, а так как скорость в ядре постоянна, то, пренебрегая малой толщиной пограничного слоя, можно выразить скорость в ядре через максимальную функцию тока:  $v_0 = -2|\psi|_{\max}$ .

Прогреваясь в пограничном слое, жидкость всплывает вдоль боковой стенки к свободной поверхности и далее движется вдоль поверхности к оси симметрии в виде узкой струи. Поэтому около свободной поверх-

ности течение весьма интенсивно, а максимальная скорость на свободной поверхности соизмерима с максимальной скоростью в пограничном слое. Результаты по средней и максимальной скоростям на свободной поверхности обобщаются формулами

$$\langle |u_s| \rangle = 0,63 (Ra_R^*)^{0,31}, \quad |u_s|_{\max} = 0,6 (Ra_R^*)^{0,33}$$

Максимум скорости на свободной поверхности реализуется около боковой стенки, причем расстояние от стенки до этого максимума при различных значениях критериев подобия приблизительно в 4,5 раза превышает расстояние  $\delta_w$ .

В отличие от поля течения поле температуры имеет на квазистационарном режиме сравнительно простую структуру. На фиг. 4 показаны профили избыточной (относительно среднемассовой) температуры на боковой стенке (штриховые линии) и оси симметрии ( $Pr=1$ ,  $H=2$ ,  $1-Ra_R^*=10^6$ ,  $2-10^7$ ,  $3-10^8$ ,  $4-10^9$ ). За исключением узких зон около дна и свободной поверхности, профили близки к линейным, причем перепад температуры между стенкой и осью практически постоянен по высоте. Последнее обстоятельство указывает, что среднее число Нуссельта  $Nu = \langle \theta_w - \theta_0 \rangle^{-1}$  ( $\theta_w$ ,  $\theta_0$  — значения температуры на боковой стенке и оси симметрии) с хорошей точностью совпадает с локальным числом Нуссельта. Среднее число Нуссельта описывается формулой

$$Nu = 0,66 (Ra_R^*)^{0,22}$$

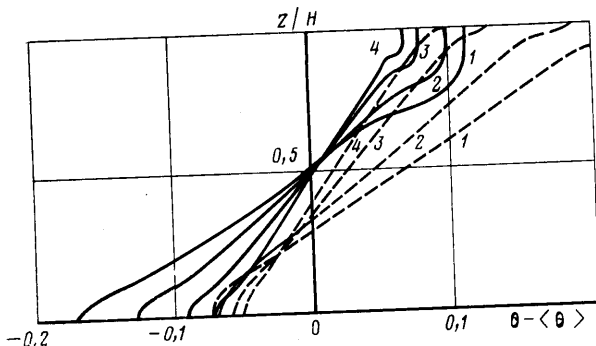
В верхней части оси симметрии имеется небольшая область с постоянной температурой. Данная особенность связана со слоистой структурой течения в верхней части сосуда [3] и имеет место только вблизи оси симметрии. Вертикальный профиль средней по горизонтали температуры уже не содержит указанной особенности.

В целом пространственная структура квазистационарной конвекции при боковом подводе тепла имеет ряд специфических черт: для течения — постоянство характеристик пограничного слоя по высоте и наличие центрального ядра, в котором скорость практически постоянна по вертикали и горизонтали; для поля температуры — линейное изменение температуры по высоте и постоянство по высоте горизонтального перепада температуры. Эти особенности связаны, видимо, с постоянством теплового потока на боковой стенке и с отсутствием подвода тепла к горизонтальным границам. Сходная структура конвекции обнаружена в [9] для случая стационарной конвекции в полностью заполненной плоской прямоугольной области при подводе и отводе постоянных тепловых потоков через вертикальные границы и теплоизолированных горизонтальных границах. Постоянство характеристик пограничного слоя по высоте сосуда наблюдалось в эксперименте [10].

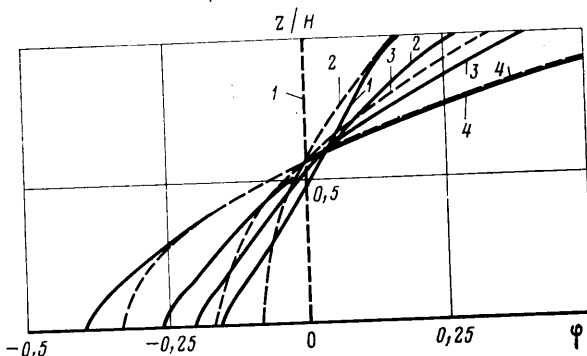
Расчеты, проведенные при различных степенях заполнения, показали, что с изменением высоты столба жидкости изменяется вертикальный размер ядра, а течение около свободной поверхности и дна, а также скорости в ядре и пограничном слое остаются неизменными. Не меняется также и перепад температуры между боковой стенкой и осью симметрии. Поэтому приведенные выше критериальные зависимости не содержат степени заполнения  $H$ . Не зависит от степени заполнения и вертикальный градиент температуры. При этом температурное расслоение, очевидно, линейно зависит от  $H$  и описывается формулой

$$\Delta\theta_s = 0,33H (Ra_R^*)^{-0,1}$$

При комбинированном подводе тепла (к боковой и свободной поверхностям) структура течения усложняется. Изменения, возникающие в поле течения и поле температуры при подводе тепла к свободной поверхности, рассмотрены в [4, 5]. Показано, что конвекция в целом ослабляется. В частности, уменьшаются скорости в пограничном слое и на свободной



Фиг. 4



Фиг. 5

поверхности. Вместе с тем усиливается радиальное течение жидкости в центральной части сосуда, что приводит к увеличению числа Нуссельта. Максимальный расход жидкости через пограничный слой реализуется в нижней части сосуда. Выше имеет место отток жидкости из пограничного слоя, поэтому параметры пограничного слоя и вертикальная составляющая скорости в ядре уже непостоянны по высоте.

Все эти изменения обусловлены увеличением температурной стратификации и ее неравномерностью по высоте сосуда. Обозначим через  $\varphi(z)$  разность между средней по горизонтали температурой жидкости и среднемассовой температурой. На фиг. 5 показаны вертикальные профили избыточной температуры  $\varphi$  при  $Ra_R^* = 10^6$ ,  $Pr = 1$ ,  $H = 2$  и различных значениях теплового потока  $q_s$  ( $1 - q_s = 0$ ;  $2 - q_s = 0,25$ ;  $3 - q_s = 0,5$ ;  $4 - q_s = 1$ ). Штриховыми линиями показаны соответствующие профили при отсутствии конвекции. Видно, что с ростом  $q_s$  уменьшается влияние конвекции на распределение температуры по вертикали. Это влияние заметно только в диапазоне  $0 < q_s < 1$ .

Количественной характеристикой влияния конвекции на вертикальный профиль температуры может служить введенная выше величина  $\Delta\theta_s$ , которая при комбинированном подводе тепла является «конвективной добавкой» к температурному расслоению (в этом случае температурное расслоение существует и при отсутствии конвекции). Используя  $\Delta\theta_s$ , среднюю температуру свободной поверхности можно представить в виде

$$\langle \theta_s \rangle = \langle \theta \rangle + \frac{1}{3} H q_s + \Delta\theta_s$$

Здесь  $\langle \theta \rangle$  — среднемассовая температура жидкости. Второе слагаемое в этом равенстве соответствует решению задачи о кондуктивном прогреве.

При анализе конвекции при комбинированном подводе тепла характеристики конвекции удобно относить к соответствующим характеристикам

при боковом подводе тепла (такие относительные величины будем обозначать штрихом). Относительная величина параметра  $\Delta\theta_s$ , согласно проведенным расчетам, аппроксимируется формулой

$$\Delta\theta_s' = (1 + 0,14(Ra_R^*)^{0,25} q_s^{1,3})^{-1}$$

Используя эту формулу, можно выразить тепловой поток  $q_s^*$ , при котором конвекция и кондуктивный прогрев вносят равный вклад в температурное расслоение. Этот тепловой поток приближенно описывается формулой  $q_s^* = 1,2(Ra_R^*)^{-0,14}$ .

При  $q_s < q_s^*$  температурное расслоение в основном определяется конвекцией, при  $q_s > q_s^*$  — кондуктивным прогревом.

Полученные результаты позволяют предположить следующие критериальные зависимости для относительных характеристик конвекции:

$$\langle |u_s| \rangle' = (1 + 0,76(Ra_R^*)^{0,4} q_s)^{-1}, \quad |u_s|'_{\max} = (1 + 0,53(Ra_R^*)^{0,4} q_s)^{-1}$$

$$Nu' = 1 + 0,09(Ra_R^*)^{0,08} q_s^{0,85}$$

Из этих формул следует, что при одном и том же тепловом потоке  $q_s$  отличия от случая бокового подвода тепла возрастают с увеличением числа Релея. Таким образом, с ростом числа Релея конвекция становится более чувствительной к подводу тепла к свободной поверхности.

В проведенных расчетах не удалось выявить заметного влияния числа Прандтля, которое варьировалось в диапазоне  $1 \leq Pr \leq 7$ . Этот факт можно объяснить тем, что конвективные члены в уравнении переноса завихренности, множителем перед которыми является число Прандтля, в рассматриваемых условиях малы. Данное предположение подтверждается работой [9], где результаты прямого численного моделирования хорошо совпадают с результатами вычислений, проведенных без учета конвективных членов в уравнении переноса завихренности.

В целом предложенные выше формулы аппроксимируют результаты расчетов с погрешностью, не превышающей 10%. Максимальная погрешность имеет место при минимальных рассмотренных степени заполнения и числе Релея, так как при этом начинается взаимодействие донного течения и поверхностной струи, т. е. меняется структура течения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Полежаев В. И., Вальциферов Ю. В.* Численное исследование нестационарной тепловой конвекции в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1974, с. 137–174.
2. *Полежаев В. И.* Эффект максимума температурного расслоения и его приложения.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 4, с. 783–786.
3. *Полежаев В. И., Черкасов С. Г.* Нестационарная тепловая конвекция в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 4, с. 148–157.
4. *Полежаев В. И.* Конвективное взаимодействие в цилиндрическом сосуде, частично заполненном жидкостью, при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям и дну.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 4, с. 77–88.
5. *Черкасов С. Г.* Естественная конвекция в вертикальном цилиндрическом сосуде при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 6, с. 51–56.
6. *Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, 392 с.
7. *Черкасов С. Г.* Модифицированный численный метод для расчета тепловой конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде.— Численные методы механики сплошной среды, 1984, т. 15, № 5, с. 144–153.
8. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 599 с.
9. *Кимура, Бежан.* Свободная конвекция в режиме пограничного слоя внутри прямоугольной полости с равномерным тепловым потоком на боковых стенках.— Тр. амер. о-ва инж.-мех. Сер. С. Теплопередача, 1984, т. 106, № 1, с. 96–101.
10. *Hess C. F., Miller C. W.* Natural convection in a vertical cylinder subject to constant heat flux.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1979, v. 22, № 3, p. 421–430.

Москва

Поступила в редакцию  
28.III.1985