МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1986

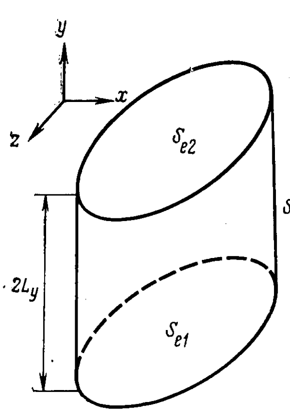
УДК 533.95.8

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОВОЙ МОДЕЛИ РАЗРЯДА

ГЛИНОВ А. П.

Работа посвящена нелинейному анализу перегревной [1, 2] неустойчивости электрического разряда, стабилизированного электродами [3], в рамках тепловой модели [4], где в линейном приближении доказана устойчивость разряда по отношению к длинноволновым и коротковолновым возмущениям. Сходные краевые задачи возникают в теориях химически и биологически реагирующих смесей [5–7], теплового пробоя диэлектриков [8], теплового взрыва [9], при исследовании нелинейных волн в полупроводниках и сверхпроводниках [10, 11] и при исследовании куэттовского течения с переменной вязкостью [12]. В [3, 13] доказана единственность одномерных стационарных решений тепловой модели разряда и устойчивость по отношению к малым пространственным возмущениям соответственно для экспоненциальной и ступенчатой зависимости электропроводности от температуры. Единственность решений в одномерном случае при одинаковой температуре электродов и произвольных зависимостях электропроводности и коэффициента теплопроводности от температуры установлена в работе [14]. В данной работе аналитически доказано существование и единственность стационарных решений тепловой модели разряда в трехмерной постановке при произвольных достаточно гладких функциях электропроводности и коэффициента теплопроводности от температуры в случае изотермических изопотенциальных электродов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим электрический разряд, стабилизированный электродами [3], т. е. такой дуговой разряд, когда передача тепла происходит в направлении электрического тока к электродам. Предполагается, что электроды ($y=\pm L_y$) плоские охлаждаемые (см. фигуру), но их температура достаточно высока, чтобы в задаче не учитывать приэлектродные эффекты. На электродах поддерживаются постоянными температура T и электрический потенциал φ: $T=T_1$, $\varphi=-\varphi_e$ при $y=-L_y$, $T=T_2\geqslant T_1$, $\varphi=\varphi_e$ при $y=L_y$. Воздействием магнитного поля и движения межэлектродной среды на возмущения электрического поля, а также излучением пренебрегается. Считается, что электропроводность среды $\sigma=\sigma(T)$ и коэффициент теплопроводности $\varkappa=\varkappa(T)$ — заданные функции температуры T, а растекание электрического тока между электродами стационарно. Для математического описания разряда используем уравнения [3, 4]



$$\nabla(\sigma\nabla\varphi)=0,\ \nabla(\varkappa\nabla T)+\sigma(\nabla\varphi)^2=0$$
$$\varphi=\varphi(x, y, z),\ T=T(x, y, z) \qquad (1.1)$$

В соответствии с различными граничными условиями на боковой поверхности S_w рассмотрим три задачи для определения решений (1.1):

Задача 1. Электроды ($y=\pm L_y$) бесконечные и ищутся пространственно периодические решения (1.1)

$$\left(T,\varphi,\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=L_x}=\left(T,\varphi,\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=-L_x}$$
$$\left(T,\varphi,\frac{\partial T}{\partial z},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=L_z}=\left(T,\varphi,\frac{\partial T}{\partial z},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-L_z} \tag{1.2}$$

где комплексом (a, b, c, d) обозначена вектор-функция с компонентами a, b, c, d; $2L_x$, $2L_z$ – длина волны периодической структуры в направлении x, z.

Задача 2. Боковая поверхность S_w, ограничивающая разряд, имеет цилиндрическую форму и является тепло- и электроизолятором

$$\mathbf{r}\in S_w:\ \frac{\partial T}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{r}=(x, y, z)$, n – единичная внешняя нормаль к S_w.

Задача 3. На боковой поверхности заданы одномерные решения (1.1)

$$\mathbf{r}\in S_w:\quad \varphi=\varphi_0(y),\qquad T=T_0(y) \tag{1.4}$$

Рассматриваемые задачи допускают одномерные решения $\varphi=\varphi_0(y)$, $T=T_0(y)$, условия существования которых обсуждаются в [2, 3, 14]. В частности, при $\varkappa=\mathrm{const}$, $T_1=T_2$ в режиме заданной разности потенциалов $U=2\varphi_e=\mathrm{const}$ одномерные решения (1.1) если существуют, то единственны как при растущей, так и при убывающей зависимости $\sigma(T)$. При этом одномерные решения при $d\sigma/dT<0$ существуют при любой разности потенциалов, а при $d\sigma/dT>0$ – лишь при $U<U_*$, если $\sigma(T)/T\to\infty$ при $T\to\infty$ (иначе $U_*=\infty$).

Очевидно, что (1.1) не имеет однородных $T=\mathrm{const}$ решений при $\nabla\varphi\neq0$. Аналогичные (1.1) нелинейные задачи (но с объемным источником тепловыделения, допускающим однородные решения) возникают в теории химически и биологически реагирующих смесей [5–7], при исследовании нелинейных волн и неустойчивостей в полупроводниках и сверхпроводниках [10, 11], в теории горения [9]. Достаточные условия единственности решения краевой задачи $\Delta\psi+f(\psi)=0$, где ψ задано на границе, $f>0$: $df/d\psi>0$, $d^2f/d\psi^2<0$ получены в [15].

Рассмотрим одномерные решения (1.1) $T=T_0(y)$, $\varphi=\varphi_0(y)$

$$\sigma\frac{d\varphi_0}{dy}=j_0=\mathrm{const},\qquad \frac{d}{dy}\varkappa\frac{dT_0}{dy}+\frac{j_0^2}{\sigma(T_0)}=0$$
$$\frac{d}{dy}\left[\varkappa\frac{dT_0}{dy}+\sigma(\varphi_0-\varphi_{00})\frac{d\varphi_0}{dy}\right]=0 \tag{1.5}$$

где $\varphi_{00}=\mathrm{const}$. Следовательно, $dT_0/dy=(q-j_0(\varphi_0-\varphi_{00}))/\varkappa$, где $q=\mathrm{const}$. По закону Ома $d\varphi_0=j_0dy/\sigma$. Тогда, выражая в последнем равенстве dy через dT_0 и определяя q, φ_{00} из условий $\varphi_0=-\varphi_e$, при $T=T_1$, $\varphi_0=\varphi_e$, при $T=T_2$, после интегрирования получим

$$-\int_{T_1}^{T_0}\frac{\varkappa}{\sigma}dT_0=\frac{\varphi_0^2-\varphi_e^2}{2}-\frac{\varphi_0+\varphi_e}{2\varphi_e}\int_{T_1}^{T_2}\frac{\varkappa}{\sigma}dT_0 \tag{1.6}$$

В дальнейшем будет показано, что соотношению (1.6) удовлетворяют не только одномерные, но и произвольные решения задач 1–3.

Покажем, что задачи 1–3 имеют единственное решение. Это будет означать после доказательства существования одномерных решений, что не существует ни плоских, ни пространственных стационарных токовых структур при изотермических изопотенциальных электродах.

2. Доказательство существования и единственности. Покажем, что $T=T(\varphi)$ — единственный класс решений задач 1—3. Действительно, ввиду первого уравнения (1.1)

$$\sigma(\nabla\varphi)^2=\nabla\cdot(\sigma\varphi\nabla\varphi) \tag{2.1}$$

Сделаем замену искомой функции $T=T(u)$ [16]

$$u(T)=-\int_{T_1}^{T}\frac{\varkappa}{\sigma}dT \tag{2.2}$$

$$u(x,\ -L_y,\ z)=0,\qquad u(x,\ L_y,\ z)=u(T_2)\equiv-\alpha$$

Тогда из (1.1), (2.1) получим

$$\nabla\cdot[\sigma(u)\nabla\varphi]=0,\ \ \nabla\cdot[\sigma(u)\nabla(u-{}^1/_2\varphi^2)]=0 \tag{2.3}$$

При этом на боковой поверхности S_w и удовлетворяет тем же граничным условиям, что T и φ в задачах 1, 2 (в задаче 1 S_w состоит из четырех плоскостей: $x=\pm L_x$, $z=\pm L_z$); а в задаче 3 задано

$$u=u_0(y)={}^1/_2(\varphi_0^2(y)-\varphi_e^2)-{}^1/_2\alpha(\varphi_0(y)+\varphi_e)/\varphi_e$$

Уравнения (2.3) имеют частное решение

$$u={}^1/_2\varphi^2+C_1\varphi+C_2;\qquad C_1,\ C_2=\mathrm{const} \tag{2.4}$$

В рассматриваемых задачах 1—3 граничные условия таковы, что позволяют однозначно найти C_1, C_2. Тогда имеем

$$u={}^1/_2(\varphi+\varphi_e)(\varphi-\varphi_e-\alpha/\varphi_e) \tag{2.5}$$

В силу (1.6) соотношению (2.5) удовлетворяют одномерные решения задач 1—3. Поскольку зависимость $u(T)$ монотонна $(du/dT=-\varkappa/\sigma<0)$, то (2.5) однозначно разрешимо в виде $T=T(\varphi)$ при любой разности потенциалов между электродами $U=2\varphi_e$, если $|u(\infty)|=\infty$. В противном случае $(|u(\infty)|\equiv u_\infty<\infty)$ (2. 5) однозначно разрешимо при $0<\varphi_e<\varphi_{e*}$, где критический потенциал φ_{e*} определяется из условия обращения максимальной температуры плазмы $T_м$ в бесконечность

$$2u_\infty=\varphi_{e*}^2+\alpha+\frac{\alpha^2}{4\varphi_{e*}^2}\qquad u_\infty\equiv\int_{T_1}^{\infty}\frac{\varkappa}{\sigma}dT \tag{2.6}$$

где правая часть (2.6) с обратным знаком представляет собой удвоенный минимум по φ правой части (2.5), достигаемый при $\varphi=\alpha/2\varphi_e$. Условие принадлежности критического $\varphi=\alpha/2\varphi_e$ интервалу $-\varphi_e<\varphi<\varphi_e$ позволяет рассматривать решения (2.6): $\varphi_{e*}^2>\alpha/2$ (φ_e, при которых правая часть (2.5) монотонна по φ, гарантируют разрешимость (2.5) в виде $T=T(\varphi)$, так как тогда $T_м=T_2\neq\infty$). Поскольку (2.6) представляет собой квадратное уравнение относительно φ_{e*}^2, то меньший корень (2.6) следует отбросить, так как по теореме Виетта произведение корней равно $\alpha^2/4$ и, следовательно,

$$\varphi_{*e}^2=u_\infty-{}^1/_2\alpha+\sqrt{u_\infty(u_\infty-\alpha)} \tag{2.7}$$

Когда $\varkappa=\mathrm{const}$, $\sigma=\sigma_*\exp(\beta T)$, $T_1=T_2=T_e$, из (2.7) получим $\varphi_e^2<\varphi_{e*}^2=2\varkappa/\beta\sigma(T_e)$, что совпадает с условием существования решения для одномерной задачи, рассмотренной в [3].

Отметим, что решение типа (2.5) не существует для поперечной задачи $(\nabla T_0\perp\nabla\varphi_0$: $T_0=T_0(y)$, $\varphi_0=\varphi_0(x))$, в которой единственность стационарных решений не имеет места [3, 14].

Доказательство единственности решения задач 1—3 поведем от противного. Предположим, что существуют решения, отличные от (2.4), т. е.

$$u-{}^1/_2\varphi^2=C_1\varphi+C_2+\chi(x,\ y,\ z) \tag{2.8}$$

$$\nabla\cdot(\sigma\nabla\chi)=0 \tag{2.9}$$

На боковой поверхности χ удовлетворяет тем же граничным условиям, что T и φ в задачах 1, 2; а в задаче 3 задано $\chi=0$ ввиду (1.6), (2.5). При этом во всех задачах $\chi(x,\ \pm L_y,\ z)=0$.

Умножив (2.9) на χ, преобразуем его к виду

$$\nabla\cdot(\chi\sigma\nabla\chi)=\sigma(\nabla\chi)^2 \tag{2.10}$$

Обозначим через $\Omega=2L_yS_{e1}$ объем токовой ячейки (см. фигуру), а через $S=S_w+S_{e1}+S_{e2}$ — ограничивающую ее поверхность. Интегрируя (2.10) по объему Ω, используя теорему Гаусса — Остроградского, получим

$$\int\limits_S \chi\sigma\frac{\partial\chi}{\partial n}dS=\int\limits_\Omega \sigma(\nabla\chi)^2d\Omega \tag{2.11}$$

где n — единичная внешняя нормаль к S. Ввиду граничных условий для каждой из задач 1—3 левая часть равенства (2.11) обращается в нуль. Это означает, что $\chi\equiv\mathrm{const}$, так как $\sigma>0$. Граничные же условия при $y=\pm L_y$ дают $\chi\equiv0$.

Таким образом доказано, что не существует решений задач 1—3, не удовлетворяющих (2.5), т. е. всегда $u=u(\varphi)$, $T=T(\varphi)$. Следовательно, можно сделать замену $\varphi=\varphi(V)$

$$V=\int\limits_{-\varphi_e}^{\varphi}\sigma(T(\varphi))d\varphi \tag{2.12}$$

Поскольку $dV=\sigma d\varphi$, то получаем для V краевую задачу

$$\Delta V=0,\qquad V(x,-L_y,z)=0,\qquad V(x,L_y,z)=V_e\equiv\int\limits_{-\varphi_e}^{\varphi_e}\sigma\,d\varphi \tag{2.13}$$

На боковой поверхности S_w V удовлетворяет тем же граничным условиям, что T и φ в задачах 1, 2; а в задаче 3 задано $V=V_0(y)$

$$V_0(y)=\int\limits_{-\varphi_e}^{\varphi_0(y)}\sigma(T_0(\varphi_0))d\varphi_0 \tag{2.14}$$

Покажем, что краевая задача для V имеет единственное решение при любых V_e. Предположим, что наряду с V существует другое решение: $V_1\neq\neq V$. Тогда их разность V_1-V будет решением однородной краевой задачи (2.9) при $\sigma=1$. Поскольку задача (2.9) имеет лишь нулевые решения, следует единственность решений (2.13). Существование решений (2.13) очевидно

$$V=\frac{V_e}{2}\left(\frac{y}{L_y}+1\right) \tag{2.15}$$

В силу (2.12) $dV/d\varphi=\sigma>0$, следовательно, существует однозначная обратная функция $\varphi=\varphi(V(y))$. Обращая (2.5), найдем $T=T(\varphi(y))$.

Доказано, что в рамках тепловой модели разряда существует лишь единственное стационарное решение при изотермических изопотенциальных электродах при $\varphi_e<\varphi_{e*}$. При $\varphi_e\geqslant\varphi_{e*}$ стационарных решений не существует, что соответствует тепловому взрыву [9] (температура плазмы стремится к бесконечности). Для величины критической разности потенциалов $U_*=2\varphi_{e*}$ получено аналитическое выражение (2.7). Приведенная в работе процедура построения решения краевых задач может быть доведена при некоторых частных зависимостях $\varkappa(T)$, $\sigma(T)$ до определения решения в явном виде. В общем случае для получения решения требуется обращение двух строго монотонных функций $u=u(T)$, $V=V(\varphi)$, что достаточно просто может быть реализовано с помощью ЭВМ.

3. О ветвлении решений. Отметим, что обнаруженные в [14, 17–19] неустойчивости (бифуркации решений) обусловлены иными граничными условиями. Так, исследованная в [19] неустойчивость при убывающей зависимости $\sigma(T)$ реализуется в режиме заданного электрического тока. В режиме же заданной разности потенциалов одномерное (фоновое) решение всегда существует, единственно и устойчиво. Бифуркации решений в [14, 17, 18] обусловлены конечным термическим сопротивлением электродов, когда коэффициенты переноса $\varkappa$, σ будут еще зависеть от y. В плазме $(-y_*<y<y_*)$: $\varkappa=\varkappa_p(T)$, $\sigma=\sigma_p(T)$. В электродах $(-L_y<y<-y_*$, $y_*<y<L_y)$: $\varkappa=\varkappa_e$, $\sigma=\sigma_e$. Полагая $T_1=T_2=T_e$ (симметричная задача), нетрудно получить аналог соотношения (2.11), считая, что при $y=\pm y_*$ непрерывны потенциалы, температуры и нормальные составляющие плотности тока и теплового потока

$$\int\limits_{\Omega}\sigma(\nabla\chi)^2\,d\Omega=2\int\limits_{y=y_*}\sigma\frac{\partial\chi}{\partial y}\left[\int\limits_{T_e}^{T_*(x,z)}\left(\frac{\varkappa_e}{\sigma_e}-\frac{\varkappa_p}{\sigma_p}\right)dT\right]dx\,dz \tag{3.1}$$

где $T_*(x, z)$ — температура на границе плазма — электрод, а χ $(\nabla\cdot(\sigma\nabla\chi)=0)$ определяется соответственно для плазмы и электродов

$$\chi_i=\frac{\varphi_e^2-\varphi^2}{2}-\int\limits_{T_e}^{T}\frac{\varkappa_i}{\sigma_i}\,dT;\qquad i=e,p \tag{3.2}$$

В общем случае из (3.1) не следует, что $\chi\equiv0$, если $\varkappa_e/\sigma_e\neq\varkappa_p/\sigma_p$. Очевидны частные решения

$$T_*=\text{const},\qquad \chi_e=0,\qquad \chi_p=\int\limits_{T_e}^{T_*}\left(\frac{\varkappa_e}{\sigma_e}-\frac{\varkappa_p}{\sigma_p}\right)dT \tag{3.3}$$

Однако при $\sigma_e\gg\sigma_p$ граничная температура T_* может определиться неоднозначно. Частные примеры приведены в [14, 17, 18]. Общее решение системы уравнений (1.1), линеаризованной относительно одномерного фона $T_0(y)$, $\varphi_0(y)$, для случая $\varkappa=\text{const}$, $\sigma=\sigma_*\exp(\beta T)$ получено в [17], где исследована в линейном приближении устойчивость разряда при $\sigma_e=\infty$. Оказалось, что наиболее опасны одномерные, зависящие только от y возмущения. При $\sigma_e\neq\infty$ [18] наиболее опасными становятся трехмерные периодические по x, z возмущения, что может способствовать образованию пространственно периодических токовых структур.

Единственность решения краевых задач 1–3 может в принципе нарушаться и при иных обобщениях. В частности, при учете в (1.1) объемных потерь энергии на излучение $Q_r(T)$, существенных при достаточно большой разности потенциалов между электродами $U=2\varphi_e$ (так как с ростом U растет температура плазмы), (1.1) допускает изотермические решения $T=\text{const}$, $j=\sigma\partial\varphi/\partial y=\text{const}$, определяемые из условия $Q_r(T)=j^2/\sigma$. Исследование влияния излучения на вид одномерных пространственно неоднородных решений применительно к электрическим дугам, когда $\nabla T\perp\nabla\varphi$, проведенное в работах [20–22], показало, что в пространстве параметров задачи всегда существует область, соответствующая неединственности решений, если число корней уравнения $Q_r(T)=\sigma(T)(\nabla\varphi)^2$ превышает единицу. При достаточно большой разности потенциалов U существенным станет также и вклад движения межэлектродной среды в баланс энергии разряда, что в принципе может способствовать ветвлению решений. Так, экспериментальное исследование электрической дуги в спутном потоке газа [23] показало, что при достаточно большой скорости потока установившееся состояние существенно зависит от начальных условий. Но указанные и иные обобщения выходят за рамки данной работы, которая ограничивается исследованием краевых задач 1—3.

Автор выражает благодарность А. Г. Куликовскому и А. А. Бармину за постановку задачи и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадомцев Б. Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы.– В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963, с. 132–176.
2. *Руткевич И. М., Синкевич О. А.* Волны и неустойчивости в низкотемпературной плазме.– Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 14. М., 1981, с. 127–204.
3. *Недоспасов А. В., Хаит В. Д.* Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1979. 168 с.
4. *Куликовский А. Г., Регирер С. А.* О влиянии стенок на перегревную неустойчивость в магнитогидродинамическом канале.– ПМТФ, 1965, № 5, с. 34–39.
5. *Вольперт А. И., Иванова А. Н.* О пространственно-неоднородных решениях нелинейных диффузионных уравнений. Препринт № Т 10824, Черноголовка, Ин-т химическ. физ., АН СССР, 1981. 32 с.
6. *Коэн Д. С.* Колебания в нелинейных диффузионных процессах.– В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Тр. 14-го Междунар. конгр. IUTAM. Делфт, 30 авг.– 4 сент. 1976. М., 1979, с. 583–597.
7. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983. 397 с.
8. *Франц В.* Пробой диэлектриков. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 207 с.
9. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 491 с.
10. *Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Миронов А. Г.* Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках. М.: Наука, 1972, с. 262–267.
11. *Гуревич А. Вл., Минц Р. Г.* Локализованные волны в неоднородных средах.– Успехи физ. наук, 1984, т. 142, вып. 1, с. 61–98.
12. *Joseph D. D.* Variable viscosity effects on the flow and stability of flow in channels and pipes.– Phys. Fluids, 1964, v. 7, № 11, pt 1, p. 1761–1771.
13. *Глинов А. П.* Об устойчивости электрического разряда, стабилизированного электродами.– Теплофиз. высоких температур, 1981, т. 19, № 5, с. 903–908.
14. *Руткевич И. М., Синкевич О. А.* О свойствах нелинейных стационарных режимов джоулева нагрева низкотемпературной плазмы.– Теплофиз. высоких температур, 1980, т. 18, № 1, с. 27–39.
15. *Келлер Г. Б.* Некоторые позитонные задачи, выдвигаемые нелинейной теорией генерации тепла.– В сб.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974, с. 129–151.
16. *Fock V.* Zur Wärmetheorie des elektrischen Durchschlages.– Archiv für Elektrotechnik, 1927, B. 19, № 1, S. 71–81.
17. *Глинов А. П.* О влиянии конечной толщины электродов на устойчивость дугового разряда.– Теплофиз. высоких температур, 1981, т. 19, № 6, с. 1162–1166.
18. *Глинов А. П.* Влияние сопротивления электродов и прикатодного падения потенциала на перегревную неустойчивость диффузного разряда в плотной плазме.– Теплофиз. высоких температур, 1982, т. 20, № 5, с. 812–817.
19. *Глинов А. П.* Влияние убывающей зависимости электропроводности от температуры на перегревную неустойчивость.– Теплофиз. высоких температур, 1982, т. 20, № 5, с. 1013–1015.
20. *Левитан Ю. С., Назаренко И. П., Паневин И. Г.* Влияние продольного магнитного поля на характеристики стабилизированной канаповой дуги.– ПМТФ, 1975, № 2, с. 147–153.
21. *Мойжес Б. Я., Немчинский В. А., Перетц Л. Н.* О неоднозначности решения уравнения Эленбааса – Хеллера для сильноточных дуг.– Журн. техн. физики, 1976, с. 46, № 7, с. 1427–1431.
22. *Гурович В. Ц., Десятков Г. А., Энгельшт В. С.* Качественное исследование уравнения Эленбааса – Хеллера.– Теплофиз. высоких температур, 1978, т. 16, № 5, с. 922–925.
23. *Вуцке, Пфендер, Эккерт.* Характерные особенности горения электрической дуги в газовом потоке.– Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 8, с. 41–52.

Москва

Поступила в редакцию
18.II.1985