

УДК 533.6.013.42

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ
С ЭЛАСТИЧНЫМ УЧАСТКОМ СТЕНКИ**

АЛЕКСАНДРОВ В. М., БОЕВ С. И.

Рассматриваются задачи о распространении акустических волн в плоском волноводе, стенки которого считаются недеформируемыми, за исключением части конечной длины, изгиб которой описывается уравнениями теории тонких пластин в рамках гипотез Кирхгофа – Лява. Исследованы звукоизоляционные характеристики описанного волновода и вопросы устойчивости вынужденных колебаний рассматриваемой системы. Приведены постановки задачи активной виброакустической защиты и задачи о перистальтическом насосе.

Вопросы звукоизоляции в волноводах рассматривались в ряде работ, достаточно полный обзор которых приведен в [1].

1. Рассмотрим задачу генерирования акустических волн в плоском волноводе (фиг. 1) посредством периодической по времени нагрузки $q(x, t) = Qe^{-i(\pi x + \omega t)}$, приложенной к упругому участку стенки. Для описания деформирования упругого элемента стенки волновода используются уравнения теории тонких пластин Кирхгофа – Лява. Предполагается, что волновод заполнен идеальной сжимаемой жидкостью, волновые процессы в которой будем описывать уравнениями акустического приближения.

Отделив временную переменную, положив, что зависимость от времени всех искомым величин выражается множителем $e^{-i\omega t}$, в системе координат, изображенной на фиг. 1, получим следующую совокупность уравнений:

$$\Delta \varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (0, H) \quad (1.1)$$

$$y=0: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y=H: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad |x| > a \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -i\omega w, \quad Dw^{IV} - \rho\omega^2 hw = i\rho_0\omega\varphi - Qe^{-i\pi x}, \quad |x| < a$$

$$w(\pm a) = w'(\pm a) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь φ – акустический потенциал; ρ_0, c – плотность жидкости и скорость звука в ней соответственно; w – форма колебаний пластинки; D, h – цилиндрическая жесткость и толщина пластинки; ρ – плотность материала пластинки; H – расстояние между твердыми стенками волновода; a – полудлина упругой вставки. Отметим, что уравнения (1.3) описывают условия закрепления пластинки в жестких стенках волновода.

Для замыкания системы уравнений (1.1)–(1.3) необходимо добавить условия излучения [2].

Акустическое поле, порождаемое внешней нагрузкой, в областях $|x| > a$ будем отыскивать в виде рядов по собственным расходящимся волнам волновода с твердыми стенками [3], а именно

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\pm iz_n(x \mp a)} \cos\left(\frac{\pi n y}{H}\right), \quad |x| > a \quad (1.4)$$

$$z_n = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{H^2} \right)^{1/2}, \quad n \leq \frac{\omega H}{\pi c}; \quad z_n = i \left(\frac{\pi^2 n^2}{H^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad n > \frac{\omega H}{\pi c}$$

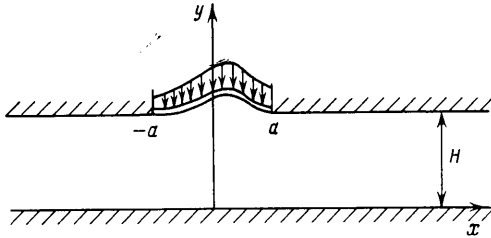
Введем в рассмотрение мероморфную функцию $L(u)$ комплексного переменного u , такую, что $\pm z_n$ являются ее полюсами, и уравнение

$$L(u) = 0 \quad (1.5)$$

$$L(u) = Du^4 - \rho\omega^2 h - \rho_0\omega^2 \frac{\text{cth}[\gamma(u)H]}{\gamma(u)}, \quad \gamma(u) = \left(u^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

Уравнение (1.5) представляет собой дисперсионное соотношение для бесконечного акустического волновода, одна стенка которого жесткая, а другая упругая, моделируемая пластинкой Кирхгофа — Лява [4].

При любом вещественном ω уравнение (1.5) имеет конечное (не равное нулю) число вещественных корней, соответствующих свободно распростра-



Фиг. 1

нящимися (незатухающим) волнам. Все корни уравнения (1.5), лежащие либо на положительной части вещественной оси, либо в верхней полуплоскости комплексного переменного u , соответствуют волнам, распространяющимся вправо, обозначим это множество корней Ω_+ . Аналогично, волнам, распространяющимся влево, соответствует множество Ω_- , причем если $\zeta \in \Omega_+$, то $-\zeta \in \Omega_-$, и наоборот.

Используя теорему Руше [5], можно показать, что при достаточно больших n в полосе $0 \leq \text{Im } u \leq \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) / H$ находится ровно $n+3$ эле-

ментов множества Ω_+ , в то время как в той же полосе содержится лишь $n+1$ точек z_n ($n=0, 1, 2, \dots$). Пронумеруем все точки множества Ω_+ в порядке возрастания модулей и обозначим их ζ_m ($m=-2, -1, 0, 1, \dots$). Имеет место асимптотическое соотношение

$$|\zeta_m - z_n| = O(n^{-3}), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

Прогиб w и потенциал φ в области $|x| < a$ представим в виде

$$\varphi(x, y) = -i\omega \left[W_0 e^{-i\eta x} \psi(\eta, y) + \sum_{m=-2}^{\infty} W_m(x) \psi(\zeta_m, y) \right] \quad (1.7)$$

$$w(x) = W_0 e^{-i\eta x} + \sum_{m=-2}^{\infty} W_m(x)$$

$$W_m(x) = W_m^+ e^{-i\zeta_m(x-a)} + W_m^- e^{i\zeta_m(x+a)}$$

$$\psi(u, y) = \frac{\text{ch}[\gamma(u)y]}{\gamma(u) \text{sh}[\gamma(u)H]}$$

Нетрудно показать, что решение в форме (1.4), (1.7) удовлетворяет всем уравнениям (1.2) при условии $L(\eta)W_0 = -Q$. Здесь и далее, если не оговорено обратное, предполагается, что $\eta \neq \pm z_n$, $\eta \neq \pm \xi_m$ ($n=0, 1, 2, \dots$; $m=-2, -1, 0, 1, \dots$) и что все нули ξ_m и полюсы z_n функции $L(u)$ однократные.

Решения (1.4) и (1.7) удовлетворяют уравнению (1.1) лишь в соответствующих областях ($|x| > a$, $|x| < a$). Для того чтобы получить решение во всей области ($-\infty < x < +\infty$), необходимо добавить условия сшивания полей [3] на границах ($x = \pm a$)

$$\varphi(a-0, y) = \varphi(a+0, y), \quad \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.8)$$

и аналогичные условия при $x = -a$.

2. Подставив (1.4) и (1.7) в (1.8) и умножив скалярно оба соотношения на $\cos(\pi s y / H)$ ($s=0, 1, 2, \dots$), исключим неизвестные A_s^+ ; аналогично исключаются A_s^- из условий сшивания при $x = -a$. Далее, удовлетворяя условиям заземления (1.3) и учитывая соотношение $L(\eta)W_0 = -Q$, приходим к бесконечной линейной системе уравнений относительно W_m^\pm

$$\sum_{m=-2}^{\infty} (W_m^- + W_m^+ e_m) = \frac{Qe^+}{L(\eta)}, \quad \sum_{m=-2}^{\infty} (W_m^- e_m + W_m^+) = \frac{Qe^-}{L(\eta)} \quad (2.1)$$

$$\sum_{m=-2}^{\infty} (\xi_m W_m^- - \xi_m W_m^+ e_m) = \frac{\eta Qe^+}{L(\eta)}$$

$$\sum_{m=-2}^{\infty} (\xi_m W_m^- e_m - \xi_m W_m^+) = \frac{\eta Qe^-}{L(\eta)}$$

$$\sum_{m=-2}^{\infty} \left(\frac{W_m^-}{-\xi_m + z_s} + \frac{W_m^+ e_m}{\xi_m + z_s} \right) = \frac{Qe^+}{(\eta + z_s)L(\eta)}$$

$$\sum_{m=-2}^{\infty} \left(\frac{W_m^- e_m}{-\xi_m - z_s} + \frac{W_m^+}{\xi_m - z_s} \right) = \frac{Qe^-}{(\eta - z_s)L(\eta)}, \quad s=0, 1, 2, \dots$$

$$e_m = \exp(2i\xi_m a), \quad e^\pm = \exp(\pm i\eta a)$$

Заметим, что существуют ограниченные пределы правой части системы (2.1) при $\eta \rightarrow \pm z_s$ (z_s — однократный полюс $L(u)$), тем самым можно снять одно из ограничений сделанных в конце п. 1.

Бесконечные системы вида (2.1) называют системами первого рода [6]. Сделав замену переменных

$$T_1 = W_{-2}^-, \quad T_2 = W_{-2}^+, \quad T_3 = W_{-1}^-, \quad T_4 = W_{-1}^+ \\ T_{2s+5} = W_s^- / (-\xi_s + z_s), \quad T_{2s+6} = W_s^+ / (\xi_s - z_s), \quad s=0, 1, 2, \dots$$

получим систему с матрицей вида $\delta_{ij} + a_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. При этом, используя (1.6), можно показать, что сходится двойной ряд

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$$

т. е. преобразованная система будет уже системой второго рода. Здесь достаточно простой переход от системы первого рода к системе второго рода ока-

заялся возможен лишь благодаря соотношению (1.6). Кроме того, преобразованная система является системой Пуанкаре — Коха, для которой имеет место обобщенное правило Крамера [7]. Последнее будет использовано ниже при исследовании особых случаев.

Выпишем здесь выражение для величин A_s^\pm

$$A_s^+ = i \frac{(-1)^s}{\varepsilon_s} \left[\sigma_s(\eta) \frac{Qe^-}{L(\eta)} + \sum_{m=-2}^{\infty} (W_m^- e_m + W_m^+) \sigma_s(\xi_m) \right] \quad (2.2)$$

$$A_s^- = i \frac{(-1)^s}{\varepsilon_s} \left[\sigma_s(\eta) \frac{Qe^+}{L(\eta)} + \sum_{m=-2}^{\infty} (W_m^- + W_m^+ e_m) \sigma_s(\xi_m) \right]$$

$$\sigma_s(u) = (u^2 - z_s^2)^{-1}, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 1/2, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Предположим, что упругий элемент стенки волновода свободен от внешних усилий, а в волноводе на бесконечности (без ограничения общности считаем слева от упругого включения) находится гармонический источник возмущений, порождающий в волноводе с жесткими стенками свободно распространяющуюся моду

$$\varphi_i(x, y, t) = \varphi_i e^{i(z_n x - \omega t)} \cos\left(\frac{\pi n y}{H}\right), \quad \text{Im } z_n = 0 \quad (3.1)$$

Заметим, что случай $z_n = -z_n = 0$, соответствующий резонансу волновода с недеформируемыми стенками, нет смысла рассматривать, так как в этом случае групповая скорость волны будет равна нулю, т. е. такие волны не достигнут упругого включения.

Величина акустической энергии, переносимой модами вида (3.1), выражается формулой [8]

$$E_n = \frac{1}{2} \varepsilon_n \rho_0 c^2 H v_n |\varphi_i|^2, \quad v_n = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{H^2} \right), \quad n \leq \frac{\omega H}{\pi c}$$

аналогичное выражение имеет место и для волн, свободно распространяющихся влево.

Вернемся к рассмотрению волновода с упругим элементом стенки. Полное акустическое поле φ_i , генерируемое источником с описанными выше свойствами, будем искать в виде суперпозиции набегающей волны φ_i и рассеянного поля φ . Подставив $\varphi_i = \varphi_i + \varphi$ в (1.1), (1.2), отделив предварительно временную переменную, для определения φ приходим к краевой задаче (1.1) — (1.3), где следует положить

$$Q = (-1)^n i \rho_0 \omega \varphi_i, \quad \eta = -z_n$$

Амплитуды волн, распространяющихся вправо от упругого включения, отыскиваем по формуле $A_{is}^+ = \varphi_i \delta_{sn} + A_s^+$, где A_s^+ находятся посредством (2.2), отраженные от упругого включения волны имеют амплитуды A_s^- , которые также находятся посредством (2.2). Так как свободно распространяющиеся (незатухающие) моды не обмениваются между собой энергией, то энергия, переносимая вправо (E_+) и влево (E_-) от упругого включения, находится посредством выражений

$$E_+ = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 H \sum_n \varepsilon_n v_n |A_{in}^+|^2, \quad E_- = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 H \sum_n \varepsilon_n v_n |A_n^-|^2$$

где суммирование ведется по всем n , таким, что $n \leq \omega H / \pi c$. Уравнение баланса энергии имеет вид $E_0 = E_+ + E_-$, где E_0 — энергия набегающей волны.

4. Далее укажем примеры других важных с практической точки зрения задач.

Задача активной виброакустической защиты. Пусть, как и ранее, на бесконечности находится источник возмущений, порождающий систему набегающих волн $\varphi_i(x, y, t)$, а к упругому включению приложена нагрузка $q(x, t)$, где

$$\varphi_i(x, y, t) = \sum_{n=0}^N \varphi_{in} e^{i(z_n x - \omega t)} \cos\left(\frac{\pi n y}{H}\right)$$

$$q(x, t) = q(x) e^{-i\omega t}, \quad q(x) = \sum_{m=0}^M Q_m e^{-i\eta_m x}$$

Какова должна быть функция $q(x)$, чтобы величина полной акустической энергии $E = E_+ + E_-$, излучаемой на бесконечность, была минимальной? При указанном виде $q(x)$ величины E_+ , E_- — квадратичные формы от Q_m . Тогда, если η_m фиксированы, решение задачи активной виброакустической защиты сводится к линейной системе уравнений относительно Q_m

$$\frac{\partial E}{\partial Q_m} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M$$

Отметим, что в случае $N = M$ возможно добиться полного гашения падающего поля, т. е. величина акустической энергии, переносимой на бесконечность, будет равна нулю.

В качестве другого примера рассмотрим задачу о перистальтическом насосе, в котором жидкость перекачивается посредством волновых движений стенок трубы. Колебательная энергия, подводимая к жидкости, расходуется на преодоление потерь в трубопроводе. Так, если жидкость перекачивается слева направо, то желательно приложить к упругому элементу стенки такую нагрузку $q(x) e^{-i\omega t}$, чтобы величина отношения E_-/E_+ была минимальна. Задача о выборе оптимального режима работы насоса может быть исследована следующим образом.

Пусть к упругому элементу стенки приложена нагрузка

$$q(x, t) = Q e^{-i(\eta x + \omega t)}$$

В этом случае отношение E_-/E_+ не зависит от амплитуды нагрузки Q . Найдем значения ω , η , при которых достигается минимальное значение отношения E_-/E_+ ; таким образом будет найден режим работы с наибольшим к. п. д. (при данной форме внешней нагрузки). В случае подбора нагрузки $q(x, t)$, такой, что $E_-/E_+ = 0$, получаем насос с теоретическим к. п. д., равным 100%.

5. Как уже отмечалось в пунктах 1 и 2, построенное решение справедливо при условиях $z_n \neq 0$ или $\omega \neq \pi n c/H$ ($n = 1, 2, \dots$); все ξ_n — однократные корни уравнения (1.5); $\eta \neq \pm \xi_m$ ($m = -2, -1, 0, 1, \dots$). Для исследования задачи в этих случаях воспользуемся принципом предельной амплитуды [2], а именно будем полагать, что в начальный момент времени система находилась в покое. К упругому элементу приложена нагрузка $q(x, t) = Q e^{-i(\eta x + \omega t)} H(t)$ ($H(t)$ — функция Хевисайда). Применяя к исходным уравнениям интегральное преобразование Лапласа по времени, приходим к системе уравнений (1.1) — (1.3), в которой следует положить $\omega = ip$. Проведя выкладки, аналогичные тем, что использовались ранее в пунктах 1 и 2, приходим к бесконечной системе, подобной (2.1), где следует помнить, что $\xi_m, z_n, L(u)$ — функции параметра преобразования p . Полученная система также может быть сведена к системе типа Пуанкаре — Коха, так как свойство (1.6) имеет место и в этом случае.

Обобщенное правило Крамера позволяет исследовать аналитические свойства решения системы как функции комплексного переменного p . Используя эти свойства при нахождении обратного преобразования Лапласа при больших значениях времени t , приходим к следующим результатам.

Если ξ_m — двукратный корень уравнения (1.5) и $\eta = \xi_m$, то

$$\varphi(x, y, t) = O(t^{1/2}), \quad w(x, t) = O(t^{1/2}), \quad t \rightarrow \infty$$

В частности, если $\xi_m = 0$ — двукратный корень, то в системе возникает резонанс лишь тогда, когда внешние нагрузки несамоуравновешены.

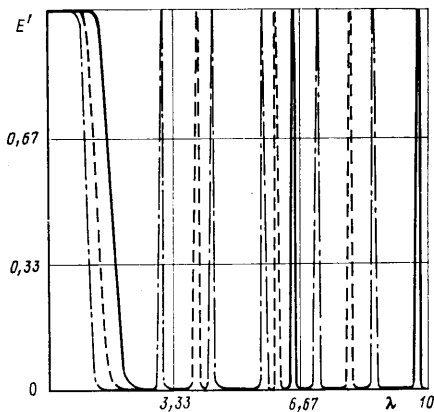
Если $\omega = \pi n c / H$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), т. е. z_n — двукратный полюс $L(u)$ и $\eta = z_n$, то при $t \rightarrow \infty$

$$w(x, t) = O(t^{-1/2})$$

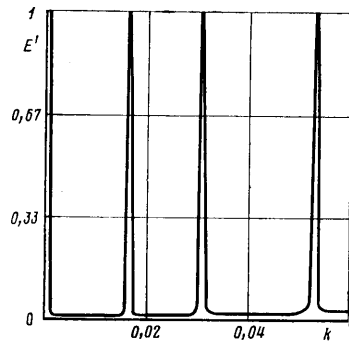
$$\varphi(x, y, t) = (-1)^n \frac{Q}{i\rho_0\omega} e^{-i\omega t} \cos\left(\frac{\pi n y}{H}\right) + O(t^{-1/2})$$

т. е. имеет место явление антирезонанса. В канале волновода возникает стоячая (непереносящая энергии) волна, уравнивающая внешние воздействия на упругий элемент.

Во всех остальных случаях решение ограничено во времени и может быть построено по схеме, описанной в пунктах 1, 2. В частности, если $\eta =$



Фиг. 2



Фиг. 3

$= \pm \xi_m$, то изменится лишь вид решения в области $|x| < a$, а именно первые слагаемые в выражениях (1.7) будут содержать множитель x . Аналогичные изменения будут, если ξ_m — двукратный корень уравнения (1.5) и $\eta \neq \xi_m$.

6. Численное исследование проводилось для задачи распространения нулевой нормальной волны, т. е. набегающая волна имеет вид

$$\varphi_i(x, y, t) = \varphi_0 e^{-i\omega(t-x/c)}$$

Для расчетов использовались параметры стальной пластинки толщины $h = 0,001$ м, в качестве акустической среды, заполняющей волновод, рассматривалась вода ($\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $c = 1500$ м/с), расстояние между стенками $H = 0,03$ м.

Количество уравнений бесконечной системы, используемых при численном анализе, выбиралось одновременно по двум критериям: близости последовательных приближений и баланса акустической энергии $E_0 = E_+ + E_-$. Для достижения относительной погрешности менее 10% во всем диапазоне параметров, указанном на фиг. 2, 3, достаточно использовать первые восемь уравнений бесконечной системы, а для частот ниже 1 кГц величина относительной погрешности не превосходит 3%. В указанном на фиг. 3 диапазоне изменения частоты рассматриваемый волновод является одномодовым, т. е. имеется лишь одно вещественное значение z_n , а именно $z_0 = \omega/c$, и лишь один вещественный положительный корень дисперсионного уравнения (1.5).

На фиг. 2 представлены зависимости отношения $E' = E_+/E_0$ от длины упругого включения при различных частотах (сплошная линия — 100 Гц, пунктир — 400 Гц, штрихпунктир — 1000 Гц). Как известно, при малых длинах упругого элемента набегающая волна «не замечает» упругой вставки, что нашло отражение и на графиках (фиг. 2), несмотря на то, что при малых a возникает вопрос о правомерности применения теории тонких пластин. При дальнейшем увеличении длины упругого

элемента E' убывает до значений, меньших относительной погрешности вычислений, и остается малым в достаточно широком диапазоне изменения параметра $\lambda = a/H$. Далее, имеется весьма узкая область изменения λ , в которой E' резко вновь убывает до значений, меньших относительной погрешности. Назовем эту область пиком. При дальнейшем увеличении λ происходит чередование зон запирания (диапазон изменения λ , где E' не превосходит относительной погрешности) и пиков, причем появление пиков носит периодический характер.

На фиг. 3 представлена частотная зависимость $k = \omega H/c$ отношения E' при значении $\lambda = 5$. Так же как и для зависимостей, изображенных на фиг. 2, имеются: область длинных волн (малых частот), которые «не замечают» упругое включение; зоны запирания и пики. Однако здесь появление пиков уже не носит периодический характер.

7. Для объяснения полученных результатов рассмотрим модельную задачу о распространении волн сжатия в бесконечном кусочно-однородном стержне. Пусть стержень состоит из трех частей: две полубесконечные части со скоростью распространения волн c соединены стержнем длины $2a$, скорость распространения волн в котором c_1 . Из бесконечности (слева) набегают волна смещений $u_i(x, t) = U_0 \exp[-i\omega(t-x/c)]$. Величина отношения E_+/E_0 для такой системы имеет следующее выражение:

$$\frac{E_+}{E_0} = \left[\cos^2 \left(\frac{2a\omega}{c_1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c_1} + \frac{c_1}{c} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{2a\omega}{c_1} \right) \right]^{-1} \quad (7.1)$$

Заметим, что если $c/c_1 \gg 1$ (или, наоборот, $c/c_1 \ll 1$), то вид зависимости (7.1) имеет такой же характер, как и для зависимостей, представленных на фиг. 2, 3, т. е. имеются как достаточно широкие зоны запирания, так и узкие пиковые зоны.

Далее, резонансные частоты стержня длины $2a$ с закрепленными краями находятся из уравнения

$$\sin(2a\omega/c_1) = 0 \quad (7.2)$$

Из (7.1), (7.2) следует, что на резонансных частотах $E_+/E_0 = 1$. На основании решения модельной задачи можно предположить, что появление широких зон запирания обусловлено большим отношением скоростей свободно распространяющихся волн в жесткой и упругой частях волновода, а наличие пиков связано с явлениями продольного резонанса в упругой части волновода.

В пользу первого предположения говорит следующее:

Дисперсионное соотношение (1.5) при малых ω имеет лишь один вещественный положительный корень, определяющий свободно распространяющуюся волну, обозначим его ζ_0 , причем

$$\zeta_0 = O(\omega^{1/2}), \quad \omega \rightarrow 0, \quad \zeta_0 = \frac{\omega}{c} + O(1), \quad \omega \rightarrow \infty$$

Фазовая и групповая скорости этой волны изменяются от нуля при малых частотах до c (скорость звука в жидкости) при больших ω . Фазовая и групповая скорости нулевой нормальной волны в волноводе с жесткими стенками равны и совпадают со скоростью звука в жидкости. Численный анализ показывает, что $0 \leq c_*/c \leq 0,06$ при изменении частоты в интервале от 0 до 3 кГц (c_* — фазовая скорость моды, определяемой волновым числом ζ_0). Кроме того, увеличение отношения E_+/E_0 в зонах запирания при больших частотах обусловлено увеличением отношения c_*/c .

Относительно второго предположения можно отметить следующее:

Исходя из того, что частоты продольного резонанса в упругой части волновода имеют характер распределения такой же, как и для сухой пластинки, получим, что распределение пиков на частотной зависимости не имеет периодического характера, так как для сухой пластинки при больших s имеет место соотношение $\omega_s - \omega_{s-1} = O(s)$, где ω_s — собственные частоты сухой пластинки. С другой стороны, рассматривая a_s — собственные длины

сухой пластинки (частота фиксирована), получим при больших s : $a_s - a_{s-1} = O(1)$, что находится в соответствии с результатами, изображенными на фиг. 2, где появление пиков носит периодический характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапин А. Д. Звукоизоляция в волноводах (Обзор).— Акуст. журн. 1975, т. 21. Вып. 3, с. 337–350.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974, 327 с.
4. Боев С. И., Коваленко Е. В. Исследование характеристик излучения вибрирующего упругого стержня, контактирующего с пластиной, покрывающей слой жидкости.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1982, т. 35, № 4, с. 41–54.
5. Лаверентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965, 716 с.
6. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974, 455 с.
7. Канторович Л. В., Крылов В. Н. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
8. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.

Москва
Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
8.II.1985