МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1985

УДК 532.59+551.466

СИММЕТРИЯ В ЗАДАЧЕ О ВНУТРЕННИХ ВОЛНАХ

ИНОГАМОВ Н. А.

Пусть жидкий слой, ограниченный свободной и жесткой границами, находится в гидростатическом равновесии. Рассмотрим задачу о спектре возмущений в слоистой (стратифицированной), тяжелой жидкости. Обозначим через $\{E\}$ набор собственных чисел. В работе исследуются свойства инвариантности $\{E\}$ при преобразовании профиля плотности внутри слоя $\rho(\xi)\to[\rho(-\xi)]^{-1}$. В дальнейшем это преобразование называется инверсией $\hat{R}$.

Задача о спектре возникает, например, при исследовании внутренних гравитационных волн, связанных с термоклинной стратификацией атмосферы и океана [1, 2]. Экспериментальное измерение спектра может быть использовано для диагностики состояния океана. С точки зрения океанологических приложений наибольший интерес представляет случай слоя, ограниченного свободной и жесткой границами.

В другом примере слоистой тяжелой жидкостью является многослойная оболочка, находящаяся в эффективном «поле тяжести», обусловленном абляционным ускорением [3]. Практический интерес представляет расчет спектра неустойчивых рэлей-тейлоровских мод [3, 4].

В данной работе доказано, что спектр $\{E\}$ слоя со свободной и жесткой границами инвариантен при инверсии R в случае ступенчатого профиля с числом ступенек $N\leqslant4$; высказана гипотеза о том, что этот результат сохраняется при произвольных N; показано, что если утверждение об инвариантности при инверсии R справедливо в случае слоя со свободной и жесткой границами, то это утверждение будет справедливо и в неограниченной жидкости, и наоборот, вычислен спектр внутренних волн и рэлей-тейлоровских мод в случае степенного профиля.

1. Возмущения в слоистой тяжелой жидкости. Спектральная задача о малых возмущениях гидростатического равновесия в покоящейся, слоистой, несжимаемой жидкости, ограниченной снизу жесткой (дно) и сверху свободной границами, приводится [2] к следующим уравнению и граничным условиям:

$$v''+Rv'-(1+ER)v=0 \tag{1.1}$$

$$v'(-a)-Ev(-a)=0,\quad v(a)=0 \tag{1.2}$$

$$v'=\frac{dv}{d\xi},\quad \xi=\frac{2\pi y}{\lambda},\quad R=(\ln\rho)',\quad E=-\frac{2\pi g}{\lambda\omega^2}$$

Здесь v—y-компонента скорости, λ — длина волны возмущения, E — спектральный параметр, a — конечное, $a>0$. Для определенности выберем направление оси y вдоль вектора $\mathbf{g}$, так что $(\mathbf{g})_y=g>0$.

Из спектральной теории Штурма — Бохера следует [2], что спектр задачи (1.1) — (1.2) дискретный и содержит в случае непрерывной функции $\rho(\xi)$ бесконечное число собственных значений. Поскольку

$$E_n\left[\rho|V_n(-a)|^2+\int_{-a}^{a}\rho'|V_n|^2d\xi\right]+\int_{-a}^{a}\rho|V_n|^2d\xi+\int_{-a}^{a}\rho|V_n'|^2d\xi=0 \tag{1.3}$$

то нетрудно видеть, что спектр действительный. В (1.3) $V_n(\xi)$ — собственная функция.

В зависимости от характера стратификации (устойчивая $\rho'>0$ или не-устойчивая $\rho'<0$) возможно существование внутренних волн с $E<0$ и (или) неустойчивых рэлей-тейлоровских мод с $E>0$ [2]. Спектр с $E<0$ ($E>0$) появляется, если существует хотя бы один конечный подынтервал, на котором $R(\xi)>0$ ($R(\xi)<0$).

Нетрудно видеть, что все собственные значения имеют ранг 1. Действительно, из обратного следует, что некоторому собственному значению E_* соответствуют две линейно независимые собственные функции V_1 и V_2. Умножим уравнение (1.1), в которое подставлены V_1 и E_*, на V_2, а уравнение (1.1), в которое подставлены V_2 и E_*,— на V_1 и вычтем одно уравнение из другого, получим $[\rho(V_2V_1'-V_2'V_1)]'=0$. Интегрируя последнее уравнение один раз по ξ и используя любое из граничных условий (1.2), получаем $V_2 \infty V_1$, и условие линейной независимости V_1 и V_2 не выполняется.

Рассмотрим N-ступенчатый профиль $\rho_s^{(N)}$

$$\rho_s^{(N)}=\rho_1+\sum_{i=1}^{N-1}(\rho_{i+1}-\rho_i)\theta_i, \qquad \theta_i=\theta(\xi-\xi_i) \tag{1.4}$$

$$-a<\xi_1<\ldots<\xi_i<\xi_{i+1}<\ldots<\xi_{N-1}<a$$

$$l_i=\xi_i-\xi_{i-1}, \quad l_1=a+\xi_1, \quad l_N=a-\xi_{N-1}$$

Толщина i-й прослойки обозначена через l_i.

Плотность входит линейно в уравнение (1.1), поэтому абсолютная величина плотности несущественна и профиль $\rho_S^{(N)}$ полностью характеризуется последовательностями толщин $\{l_i\}$, $i=1,\ldots,N$, и отношений плотностей на скачка́х

$$\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{N-1}\}, \qquad \mu_i=\rho_i\rho_{i+1}^{-1} \tag{1.5}$$

Исследуем задачу (1.1)–(1.2) с профилем (1.4), (1.5). Общее решение уравнения (1.1) на i-м интервале имеет вид

$$v=A_ie^{\xi}+B_ie^{-\xi} \tag{1.6}$$

Если в невозмущенном состоянии жидкость покоится, то функция $v(\xi)$ непрерывна в точках ξ_i в силу условия непрерывности вертикальной компоненты скорости на скачках плотности. Обозначим $v(\xi_i)$ через v_i. Имеем

$$A_i=\frac{e^{l_i}v_i-v_{i-1}}{2S_i}e^{-\xi_i}, \qquad B_i=\frac{v_{i-1}-e^{-l_i}v_i}{2S_i}e^{\xi_i}, \qquad S_i=\operatorname{Sh} l_i \tag{1.7}$$

Проинтегрируем уравнение (1.1) через скачок плотности в ξ_i. После вычислений получим

$$[v(\xi_i+0)]'-\mu_i[v(\xi_i-0)]'=E(1-\mu_i)v_i \tag{1.8}$$

Функция $[v(\xi)]'$ испытывает скачок в ξ_i. Для вычисления $[v(\xi_i-0)]'$ используем формулу (1.6), в которой A_i, B_i выражены через v_i, v_{i-1} по формулам (1.7). Аналогично вычисляем $[v(\xi_i+0)]'$. Подставляя результаты этих вычислений в (1.8) и преобразуя, получаем

$$\frac{v_{i+1}-C_{i+1}v_i}{S_{i+1}}+\mu_i\frac{v_{i-1}-C_iv_i}{S_i}=E(1-\mu_i)v_i, \qquad C_i=\operatorname{Ch} l_i \tag{1.9}$$

Уравнения (1.9) пригодны при $i=1, 2,\ldots, N-2$. Концевые точки $\xi_0=-a$ и ξ_{N-1} требуют отдельного исследования. Рассмотрим сначала точку ξ_0, соответствующую свободной границе (1.2). Подставляя (1.6) с $i=1$ в (1.2) и выражая в получившемся уравнении A_1, B_1 через v_0 и v_1

по формулам (1.7), получаем

$$v_0(C_1+ES_1)-v_1=0, \quad v_0=v(\xi_0) \tag{1.10}$$

Отметим, что (1.10) следует из (1.9) при $i=0$, $\mu_0=0$.

На жесткой границе $v_N=0$, поэтому уравнение (1.9) при $i=N-1$ принимает вид

$$\left[\frac{1}{T_N}+\frac{\mu_{N-1}}{T_{N-1}}+E(1-\mu_{N-1})\right]v_{N-1}-\frac{\mu_{N-1}}{S_{N-1}}v_{N-2}=0$$
$$T_i=\operatorname{th} l_i=\frac{S_i}{C_i}, \quad v_N=v(\xi_N), \quad \xi_N=a \tag{1.11}$$

Формулы (1.9)–(1.11) приводят задачу (1.1)–(1.2) к решению системы однородных уравнений (1.12). Спектр квадратной $N\times N$ трехдиагональной матрицы M дается характеристическим уравнением (1.13)

$$M\mathbf{v}=E\mathbf{v} \tag{1.12}$$

$$\det(M_{ij}-E\delta_{ij})=0 \tag{1.13}$$

$$\mathbf{v}=(v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}), \quad G_i=T_i^{-1}=C_iS_i^{-1}=\operatorname{Cth} l_i$$

$$M=\begin{bmatrix} -G_1 & S_1^{-1} & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ & \dfrac{\mu_i S_i^{-1}}{1-\mu_i} & \dfrac{G_{i+1}+\mu_i G_i}{\mu_i-1} & \dfrac{S_{i+1}^{-1}}{1-\mu_i} & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & & \dfrac{\mu_{N-1}S_{N-1}^{-1}}{1-\mu_{N-1}} & \dfrac{G_N+\mu_{N-1}G_{N-1}}{\mu_{N-1}-1} \end{bmatrix}$$

Число корней характеристического многочлена (1.13) равно N.

Решение задачи (1.1)–(1.2) выражается через решение системы (1.12) формулой

$$v(\xi)=\sum_{0}^{N-1} v_i g_i, \quad g_i=g_i(\xi) \tag{1.14}$$

$$g_0=-\frac{S^1\theta_0\theta_1'}{S_1}, \quad g_i=\frac{S^{i-1}\theta_{i-1}\theta_i'}{S_i}-\frac{S^{i+1}\theta_i\theta_{i+1}'}{S_{i+1}}$$
$$S^i=\operatorname{Sh}(\xi-\xi_i), \quad \theta_i=\theta(\xi-\xi_i), \quad \theta_i'=\theta(\xi_i-\xi)$$
$$S_i=\operatorname{Sh} l_i, \quad l_i=\xi_i-\xi_{i-1}, \quad g_i(\xi)\geqslant 0, \quad g_i(\xi_i)=1$$

Разложение (1.14) является следствием формул (1.6), (1.7).

Отметим, что достаточно ограничиться случаем, когда в (1.5) все $\mu_i\neq 1$. Действительно, если какое-либо из μ_i, например μ_α, равно 1, то, как нетрудно показать, появляются $E_\alpha=\infty$, $V_\alpha=g_\alpha$. Остальные $E_i\neq\infty$, $\mu_i\neq 1$, $i\neq\alpha$. Полагая $E\neq\infty$ и $\mu_\alpha=1$, используя строку α, не содержащую E, для исключения v_α, понижаем порядок системы (1.12) на единицу. В результате приходим к задаче с набором $\{\mu_i\}$, не содержащим единицы.

Для вычисления определителя $t_N=\det T_N$ трехдиагональной матрицы T_N ранга N нетрудно, раскрывая t_N по нижней строке, вывести рекуррентную формулу

$$t_1=a_0, \quad t_2=a_0a_1-c_1b_1, \quad t_N=a_{N-1}t_{N-1}-c_{N-1}b_{N-1}t_{N-2} \tag{1.15}$$

где $(a_0,\ldots, a_{N-1})$, $(b_1,\ldots, b_{N-1})$, $(c_1,\ldots, c_{N-1})$ — соответственно диагональные, наддиагональные и поддиагональные элементы, нумеруемые из верхнего угла.

Формула (1.15) позволяет находить явный вид характеристических многочленов (1.13). Трудоемкость вычислений экспоненциально растет с ростом порядка уравнения N. Поэтому, разумеется, реально можно вычислить только несколько первых определителей. Вычислим (1.13) при $N=4$ в случае, когда $l_1=\ldots=l_N=l$. После довольно громоздких преобразований получаем

$$t_4=\sum_0^4 A_n\lambda^n=a_0a_1a_2a_3-\mu_1a_2a_3-\mu_2a_0a_3-\mu_3a_0a_1+\mu_1\mu_3 \qquad (1.16)$$

$$a_i=\alpha_i+\lambda\beta_i, \quad \alpha_i=-C(1+\mu_i), \quad \beta_i=-(1-\mu_i)$$

$$\lambda=ES, \quad S=\operatorname{Sh} l, \quad C=\operatorname{Ch} l, \quad \mu_0=0$$

$$A_4=(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)$$

$$A_3=2C(2-\mu_1-\mu_2-\mu_3+\mu_1\mu_2\mu_3)$$

$$A_2=2C^2(3-\mu_1\mu_2-\mu_1\mu_3-\mu_2\mu_3)-\mu_1-\mu_2-\mu_3+$$
$$+\mu_1\mu_2+2\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3-\mu_1\mu_2\mu_3$$

$$A_1=2C^3(2+\mu_1+\mu_2+\mu_3-\mu_1\mu_2\mu_3)-2C(\mu_1+\mu_2+\mu_3-\mu_1\mu_2\mu_3)$$

$$A_0=C^4(1+\mu_1)(1+\mu_2)(1+\mu_3)-C^2(\mu_1+\mu_2+\mu_3+$$
$$+\mu_1\mu_2+2\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2\mu_3)+\mu_1\mu_3$$

2. Скрытая симметрия в случае слоя, ограниченного свободной и жесткой границами. Рассмотрим преобразование

$$R_u(\xi)=R(-\xi) \qquad (2.1)$$

Будем называть это преобразование инверсией R. Вычислим $\rho_u(\xi)$. По определению имеем

$$R=(\ln\rho)', \quad \rho(\xi)=\rho(-a)\exp\left[\int_{-a}^{\xi} R(\eta)\,d\eta\right]$$

$$R_u=(\ln\rho_u)', \quad \rho_u(\xi)=\rho_u(-a)\exp\left[\int_{-a}^{\xi} R_u(\eta)\,d\eta\right]$$

Подставляя (2.1) в последнюю формулу для ρ_u, делая замену переменной $\eta\to\zeta=-\eta$, меняя верхний и нижний пределы интегрирования местами и комбинируя пределы интегрирования, получаем

$$\frac{\rho_u(\xi)}{\rho_u(-a)}=\exp\left[\int_{-\xi}^{a} R(\zeta)\,d\zeta\right], \quad \exp\left[\int_{-a}^{a} R(\eta)\,d\eta\right]=\frac{\rho(a)}{\rho(-a)}$$

$$\int_{-\xi}^{a}=\int_{-a}^{-\xi}+\int_{-\xi}^{a}-\int_{-a}^{-\xi}=\int_{-a}^{a}-\int_{-a}^{-\xi}$$

$$\rho_u(\xi)=\frac{\rho_u(-a)\rho(a)}{\rho(-\xi)}\infty\frac{1}{\rho(-\xi)} \qquad (2.2)$$

Вычислим преобразование (2.1) в случае ступенчатого профиля. Нетрудно видеть, что преобразование (2.2) оставляет профиль в классе ступенчатых функций. Используя (2.2) и (1.4), получаем следующие формулы для искомых величин ρ_{ui}, ξ_{ui}, μ_{ui}, l_{ui}:

$$\rho_{us}^{(N)} \infty \frac{1}{\rho_s^{(N)}(-\xi)} = \left[\rho_1 + \sum_1^{N-1} (\rho_{i+1}-\rho_i)\theta(-\xi-\xi_i) \right]^{-1} =$$

$$= \rho_N^{-1} + \sum_1^{N-1} (\rho_{N-i}^{-1} - \rho_{N-i+1}^{-1})\theta(\xi-\xi_{ui})$$

$$\xi_{ui} = -a + \sum_{j=1}^{i} l_{N-j+1}, \qquad \mu_{ui} = \frac{\rho_{ui}}{\rho_{u(i+1)}}$$

$$\rho_{us}^{(N)} = \rho_{u1} + \sum_1^{N-1} (\rho_{u(i+1)} - \rho_{ui})\theta(\xi-\xi_{ui})$$

$$\rho_{ui} \infty \rho_{N-i+1}^{-1}, \qquad \xi_{ui} = -\xi_{N-i}, \qquad \mu_{ui} = \mu_{N-i}, \qquad l_{ui} = l_{N-i+1} \tag{2.3}$$

Рассмотрим спектральную задачу (1.1)—(1.2) в случае профиля R_u. Обозначим через E_u, v_u решение, соответствующее профилю R_u.

Представим теперь строгое утверждение об инвариантности спектра $\{E\}$ при инверсии R (собственные функции при этом, разумеется, измеменяются) в случае ступенчатого профиля (1.4) с $N \leqslant 4$. Доказательство этого утверждения основано на явной формуле для характеристического уравнения (1.16) и формулах (2.3). Подставляя в уравнение (1.16), записанное для набора $\{\mu_{ui}\}$, μ_{ui}, выраженные через μ_i (2.3), находим, что коэффициенты характеристического уравнения $A_0, \ldots, A_4$ не меняются. Отсюда следует, что $\{E\} = \{E_u\}$.

Выше было доказано утверждение об инвариантности $\{E\}$ при инверсии R в случае ступенчатого профиля с $N \leqslant 4$. Правдоподобная гипотеза состоит в том, что, поскольку случаи с $N \leqslant 4$ ничем не выделены, инвариантность $\{E\}$ сохранится и в случае ступенчатого профиля с произвольным N.

3. Другие граничные условия. Назовем рассмотренную выше спектральную задачу — задачей I. Представляет интерес рассмотреть и другие граничные условия.

Задача II: жидкость заполняет все пространство, причем $R(\xi) \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$. Граничные условия требуют затухания функции на $\xi = \pm\infty$. Задача III: слой ограничен двумя свободными границами. Задача IV: слой ограничен жесткими границами

$$\text{II:} \ v(+\infty) = 0, \quad v(-\infty) = 0 \tag{3.1}$$

$$\text{III:} \ v'(-a) - Ev(-a) = 0, \quad v'(a) - Ev(a) = 0 \tag{3.2}$$

$$\text{IV:} \ v(-a) = 0, \quad v(a) = 0 \tag{3.3}$$

Имеются следующие теоремы 1 и 2, доказательство которых основано на предельных переходах.

Теорема 1. Если спектр инвариантен для задачи I, то он инвариантен и для задачи II

$$\{E\}_{\mathrm{I}} = \{E_u\}_{\mathrm{I}} \Rightarrow \{E\}_{\mathrm{II}} = \{E_u\}_{\mathrm{II}}$$

где индексами I, II выделены соответствующие граничные условия.

Пусть $\{E\}_{\mathrm{I}}(l)$ — спектр N-ступенчатого профиля с $l_1 = l_N = l$, содержащего $N-1$ скачок и задаваемого последовательностями $\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}$; $l_1, l_2, \ldots, l_{N-1}, l_N$. Пусть $\{E\}_{\mathrm{II}}$ — спектр профиля, задаваемого теми же последовательностями значений $\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}$; $l_2, \ldots, l_{N-1}$. Покажем, что

$$\{E\}_{\mathrm{I}}(l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \{E\}_{\mathrm{I}}(\infty)=\{E\}_{\mathrm{II}}+(E=-1) \tag{3.4}$$

где запись $\{E\}+(E=-1)$ означает, что спектр $\{E\}$ следует дополнить модой $E=-1$.

Выпишем характеристическое уравнение для задачи (1.1), (3.1), которое вычисляется аналогично случаю задачи I.

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{G_2+\mu_1}{-\nu_1}-E & \dfrac{S_2^{-1}}{\nu_1} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & \dfrac{\mu_i S_i^{-1}}{\nu_i} & \dfrac{G_{i+1}+\mu_i G_i}{-\nu_i}-E & \dfrac{S_{i+1}^{-1}}{\nu_i} & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \dfrac{\mu_{N-1}S_{N-1}^{-1}}{\nu_{N-1}} & \dfrac{1+\mu_{N-1}G_{N-1}}{-\nu_{N-1}}-E \end{bmatrix}=0 \tag{3.5}$$

$$\nu_i=1-\mu_i$$

Сравним (3.5) и (1.13) с матрицей M (1.12). В последнем положим $l_1=l_N=l$ и устремим $l\to\infty$. При $l=\infty$ имеем $S_1=\infty$, $G_1=G_N=1$. В результате приходим к требуемой формуле (3.4).

Действуя точно так же в случае профиля $\{\mu_{ui}, l_{ui}\}$, получаем аналогичную (3.4) формулу

$$\{E_u\}_{\mathrm{I}}(l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \{E_u\}_{\mathrm{I}}(\infty)=\{E_u\}_{\mathrm{II}}+(E=-1) \tag{3.6}$$

Из (3.4) и (3.6) следует, что если $\{E\}_{\mathrm{I}}(l)=\{E_u\}_{\mathrm{I}}(l)$, то $\{E\}_{\mathrm{II}}=\{E_u\}_{\mathrm{II}}$.

Другой предельный переход позволяет доказать теорему 2, обратную к теореме 1.

Теорема 2. Если $\{E\}_{\mathrm{II}}=\{E_u\}_{\mathrm{II}}$, то $\{E\}_{\mathrm{I}}=\{E_u\}_{\mathrm{I}}$.

Для доказательства необходимо рассмотреть задачу II с профилем $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{N-1}, \mu_N$; $l_1, \ldots, l_N$ и задачу I с $\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}$; $l_1, \ldots, l_N$.

Преобразуя уравнение (3.5) для случая расширенного набора $\mu_0, \ldots, \mu_N$, полагая $\mu_0=\mu_N=\mu$, устремляя $\mu\to 0$ и сравнивая получающееся уравнение с характеристическим уравнением (1.13) с матрицей M (1.12), без труда находим, что

$$\{E\}_{\mathrm{II}}(\mu) \underset{\mu\to 0}{\longrightarrow} \{E\}_{\mathrm{II}}(0)=\{E\}_{\mathrm{I}}+(E=-1) \tag{3.7}$$

Из (3.7) и аналогичной (3.7) формулы для профиля $\{\mu_{ui}, l_{ui}\}$ следует, что если $\{E\}_{\mathrm{II}}(\mu)=\{E_u\}_{\mathrm{II}}(\mu)$, то $\{E\}_{\mathrm{I}}=\{E_u\}_{\mathrm{I}}$.

В [5] численно рассчитывалась спектральная задача II. Рассматривались ступенчатые профили с конечным числом ступенек (например, $N\leqslant 8$) и некоторыми конкретными наборами $\{\mu_i, l_i\}$. Анализ численных результатов позволил высказать гипотезу об инвариантности при инверсии (2.1) в случае граничных условий II.

Кроме того, в [5] показано, что если инвариантность имеет место в случае II, то из этого следует

$$\{E\}_{\mathrm{III}}-(E=\pm1)=\{E_u\}_{\mathrm{IV}}; \quad \{E_u\}_{\mathrm{III}}-(E_u=\pm1)=\{E\}_{\mathrm{IV}}$$

Отметим, что моды $E=\pm1$ соответствуют движениям с «вмороженными» изобарами [6], при которых значения давления сохраняются в жидких частицах. Эти моды тесно связаны с трохоидальными волнами.

4. Степенной профиль. Рассмотрим степенной профиль, при котором уравнение (1.1) приводится к допускающему полное исследование уравнению для вырожденной гипергеометрической функции.

После инверсии R профиль (4.1) преобразуется к виду (4.2). Общее решение (1.1) в случаях (4.1), (4.2) имеет вид (4.3)

$$\rho \propto [\xi^\beta (\xi>0),\ 0(\xi<0)], \quad \beta>0 \tag{4.1}$$

$$\rho \propto [\infty(\xi>0),\ (-\xi)^{-\beta}(\xi<0)] \tag{4.2}$$

$$ve^{-\xi}=c_1F(\alpha,\ \pm\beta,\ -2\xi)+c_2|\xi|^{1\mp\beta}F(\alpha\mp\beta+1,\ 2\mp\beta,\ -2\xi) \tag{4.3}$$

где $2\alpha=\mp\beta(E-1)$ — верхний и нижний знаки, относятся к случаям (4.1) и (4.2) соответственно, $F(\alpha,\ \beta,\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Ниже будет показано, что из условия при $\xi=0$ в случае (4.1) следует отбросить особое, а в случае (4.2) — регулярное при $\xi=0$ решение.

Асимптотическое разложение $F(\alpha,\ \beta,\ z)$ имеет вид

$$F=\frac{\Gamma(\beta)G(\alpha,\alpha-\beta+1,-z)}{\Gamma(\beta-\alpha)(-z)^\alpha}+\frac{\Gamma(\beta)e^zG(\beta-\alpha,1-\alpha,z)}{\Gamma(\alpha)z^{\beta-\alpha}}$$
$$G(\alpha,\beta,z)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\,z}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,z^2}+\ldots \tag{4.4}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. При возведении в степень в (4.4) переменные $-z$ и z должны браться с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента.

В случаях (4.1) и (4.2) требуем, чтобы $v\to0$ при $\xi\to\infty$ и $\xi\to-\infty$ соответственно. Имеем

$$E_m=-1-2m\beta^{-1}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{4.5}$$

$$E_m=-1-2(m+1)\beta^{-1}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{4.6}$$

Спектры (4.5), (4.6) относятся к случаям (4.1) и (4.2) соответственно. Как и должно быть, эти спектры совпадают. Спектр (4.5) по сравнению с (4.6) содержит дополнительную моду $E=-1$, появление которой связано со свободной границей, имеющейся в случае (4.1).

Обсудим процедуру отбора решения из условия при $\xi=0$. Рассмотрим случай распределения (4.1) и свободного граничного условия при $\xi=0$. Общее решение имеет в этом случае вид $v=c_1f_1+c_2\Phi_2$, где $\Phi_2=|\xi|^{1-\beta}f_2$, f_1, f_2 — регулярные в нуле функции. Пусть свободная граница находится в точке $\xi=\varepsilon>0$. Подставляя общее решение в условие $(v'-Ev)|_{\xi=\varepsilon}=0$, получаем

$$\frac{c_2}{c_1}=\frac{(f_1'-Ef_1)\varepsilon^\beta}{(\beta-1)f_2-\varepsilon(f_2'-Ef_2)}$$

где значения функций берутся в $\xi=\varepsilon$. При $\varepsilon\to0$, $c_2/c_1\to0$, т. е. вне малой окрестности точки $\xi=\varepsilon$ особым решением можно пренебречь по сравнению с регулярным. Аналогично обстоит дело с отбором решения в случае изэнтропического идеального газа [4], в котором $\beta=(\varkappa-1)^{-1}$, $E=-\omega^2/kg$, $\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона.

В случае (4.2) при $\xi=0$ ставится жесткая стенка $v(0)=0$. Отсюда следует, что необходимо отбросить регулярное в нуле решение.

Автор благодарит С. И. Анисимова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дикий Л. А.* Теория колебаний земной атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 194 с.
2. *Yih C.—S.* Waves in a Stratifeid Fluid.— In: Nonlinear Waves. Ithaca — London: Cornell Univ. Press, 1974, p. 263–290. (Рус. перев.: Йи Чиашун. Волновые движения в слоистых жидкостях.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Мир, 1977, с. 271–296.)
3. *Иногамов Н. А.* Неустойчивость фронта абляции при ускорении слоя абляционным давлением.— Письма в ЖТФ, 1983, т. 9, № 18, с. 1136–1139.
4. *Иногамов Н. А.* Тейлоровская неустойчивость плоского изэнтропического слоя, ограниченного изобарическими границами.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 1, с. 158–161.
5. *Mikaelian K. O.* Normal modes and symmetries of the Rayleigh-Taylor instability in stratified fluids.— Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, № 19, p. 1365–1368.
6. *Иногамов Н. А.* Движение с «вмороженными» изобарами: трохоидальные волны и изобарическая рэлей-тейлоровская мода.— Докл. АН СССР, 1984, т. 278, № 1, с. 57–61.

Москва

Поступила в редакцию
24.IV.1984