МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1985

УДК 532.546

ЯВЛЕНИЕ ВРЕМЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ПРОЦЕССАХ ИСТОЩЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ПЛАСТОВ НЕФТИ И ГАЗА

ПАНФИЛОВ М. Б.

Современные методы разработки подземных залежей нефти и газа характеризуются медленно меняющимися во времени показателями, что позволяет рассматривать их на значительном временно́м интервале как процессы, близкие к равновесным, и применить для анализа эффективные методы теории возмущений. В то же время в течение короткого начального периода такие системы ведут себя как существенно неравновесные, благодаря чему возникает явление временного пограничного слоя.

Для задач истощения замкнутых пластов вводится мера неравновесности пластовой системы, обосновывается ее малость для реальных залежей, устанавливается существование пограничного слоя, формулируются внешняя и внутренняя задачи, а также условия их сращивания. Установлена общая форма внешней асимптотики, в которой пространственные переменные и время разделяются и исходная параболическая система сводится к линейному уравнению Пуассона. Даются примеры решения задач.

1. Мера неравновесности истощения пласта. Рассмотрим насыщенный пористый пласт, возмущаемый в начальный момент дискретно размещенной системой скважин. Возмущение приводит залежь в неравновесное состояние с резко неравномерным распределением масс флюида. Возникают внутренние перетоки масс — залежь релаксирует. Пусть t_* — время полного истощения, t^* — время релаксации системы после ее мгновенного возмущения. Отношение $\varepsilon=t^*/t_*$ является мерой степени неравновесности системы.

Если полное истощение произошло, то хотя бы в последний момент распределение масс выровнялось (ноль в каждой точке), т. е. релаксация закончилась, поэтому $t^*\leqslant t_*$. Следовательно, $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$.

Поскольку степень неравновесности всегда связана с характерной скоростью протекания процесса, величина ε является и мерой интенсивности истощения. При $\varepsilon\to0$ темп истощения мал, система быстро релаксирует, при $\varepsilon\to1$ темп максимален, наблюдается сильная неравновесность.

Определим время релаксации t^*. Если площадь σ дренируется n скважинами, то $a=\sqrt{\sigma/n}$ — масштаб неоднородности распределения масс, а $\varkappa/a$ — характерная скорость перераспределения, где $\varkappa$ — пьезопроводность. Тогда $t^*=a^2/\varkappa$. В частности, для одномерного радиального притока жидкости к центральной скважине в пласте радиуса R_* можно взять $t^*=R_*^2/\varkappa$.

На практике параметр ε всегда мал: $\varepsilon\ll1$, так как времена t^* и t_* несопоставимы ($t^*\ll t_*$). Действительно, период истощения составляет десятки лет, тогда как время релаксации имеет порядок нескольких суток. О характерной величине времени t^* можно судить по времени выравнивания депрессионной воронки после остановки скважины.

Малость меры ε является достаточно универсальным свойством современных способов разработки подземных пластов нефти и газа.

Из малости ε вытекает, что в масштабе медленного времени t_* процесс является квазистатическим, за исключением короткого начального периода релаксации системы.

2. Сингулярный характер задач истощения. Рассмотрим общий случай фильтрации в плоскости X, Y сжимаемого флюида с плотностью $\rho(P)$ и вязкостью $\mu(P)$ в неоднородном деформируемом пласте с пористостью $m(P,X,Y)=\alpha(P)m^\circ(X,Y)$ и проницаемостью $K(P,X,Y)=\beta(P)K^\circ(X,Y)$, где P — давление, индекс градус означает начальное невозмущенное состояние. Тогда $\alpha(P^\circ)=\beta(P^\circ)=1$. Фильтрационное поле описывается связной областью D с границей γ, представляющей собой внешний замкнутый контур γ_0, в который вложены n непересекающихся замкнутых контуров γ_j (скважин), на каждом из них задана плотность $h_j(t,\gamma)=\partial G_j/\partial\gamma$ массового расхода отбираемого флюида $G_j(t)$. Пусть σ — площадь области D. Задача истощения имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\rho m)=\operatorname{div}(K\rho\mu^{-1}\operatorname{grad}P)\\ P(X,Y,0)=P^\circ,\qquad \left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{\gamma_0}=0\\ HK\rho\mu^{-1}\left.\frac{\partial P}{\partial\nu}\right|_{\gamma_j}=-h_j(t,\gamma),\qquad j=1,\ldots,n\end{gathered}\tag{2.1}$$

Здесь H — толщина пласта, $\boldsymbol{\nu}$ — вектор внешней нормали к границе γ.

Введем линейный масштаб $a=\sqrt{\sigma/n}$, имеющий смысл среднего диаметра области дренирования скважины. Преобразованием $x=X/a$, $y=Y/a$ область D отображается на плоскость x,y. Далее всюду под областью D и ее границей γ будем понимать их образы на плоскость x,y. Площадь области D теперь равна n.

Времена t^* и t_* определим соотношениями

$$t^*=\frac{a^2}{\varkappa^\circ},\qquad H\sigma\rho^\circ\langle m^\circ\rangle=\int_0^{t_*}G(t)\,dt$$

$$\varkappa^\circ=\frac{\langle K^\circ\rangle P^\circ}{\langle m^\circ\rangle\mu^\circ},\qquad G(t)=\sum_{j=1}^{n}G_j(t),\qquad G_j=\int_{\gamma_j}h_j\,d\gamma$$

$$\langle A\rangle\equiv n^{-1}\iint_D(A)\,dx\,dy$$

Для меры неравновесности получаем

$$\varepsilon=\langle G_0\rangle\mu^\circ[\langle K^\circ\rangle HP^\circ\rho^\circ]^{-1}$$

$$\langle G_0\rangle\equiv\langle G\rangle n^{-1},\qquad \langle G\rangle\equiv t_*^{-1}\int_0^{t_*}G(t)\,dt$$

где $\langle G_0\rangle$ — средний по скважинам и по времени дебит одной скважины, $\langle G\rangle$ — средний по времени суммарный дебит всех скважин.

Задача (2.1) в переменных $p=P/P^\circ$, x,y, $\tau=t/t_*$ принимает вид

$$\varepsilon\varphi(p)F(x,y)\frac{\partial p}{\partial\tau}=\operatorname{div}[\psi(p)f(x,y)\operatorname{grad}p],\qquad x,y\in D,\ \ \tau\in[0,1]\tag{2.2}$$

$$p(x,y,0)=1,\qquad \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\gamma_0}=0\tag{2.3}$$

$$\psi(p)f(x,y)\frac{\partial p}{\partial \nu}\bigg|_{\gamma_j}=-\varepsilon q_j(\tau,\gamma), \qquad j=1,\ldots,n \tag{2.4}$$

$$\varphi(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho\alpha}{\rho^\circ}\right), \qquad \psi(p)=\frac{\rho\beta\mu^\circ}{\mu\rho^\circ}, \qquad q_j=\frac{h_j a}{\langle G_0\rangle}$$

$$F(x,y)=\frac{m^\circ(x,y)}{\langle m^\circ\rangle}, \qquad f(x,y)=\frac{K^\circ(x,y)}{\langle K^\circ\rangle}$$

Таким образом, процесс истощения описывается нелинейным параболическим уравнением с малым параметром при временной производной. Подобная ситуация встречалась в задачах для уравнения Шредингера [1], в теории фильтрации в работах [2, 3]. При $\varepsilon=0$ происходит перерождение типа уравнения, в этом смысле задача (2.2)–(2.4) является сингулярно возмущенной [4]. Узкая область малых значений τ порядка ε играет роль пограничного слоя, в котором проявляются неравновесные эффекты.

Асимптотическое при $\varepsilon\to 0$ разложение решения задачи, равномерно сходящееся при любых $\tau\in(0,1]$, строится методом сращиваемых асимптотик.

3. Внутреннее разложение. Введем быстрое время $\theta=\tau/\varepsilon$, имеющее порядок единицы в пограничном слое. Подстановка обычного ряда возмущений в исходную задачу, записанную в новых переменных, приводит к следующему разложению:

$$p^*(x,y,\theta,\varepsilon)=1+\varepsilon p_1^*(x,y,\theta)+O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon\to 0, \quad \theta=O(1) \tag{3.1}$$

где p_1^* удовлетворяет решению задачи

$$\varphi^\circ F(x,y)\frac{\partial p_1^*}{\partial\theta}=\operatorname{div}[f(x,y)\operatorname{grad}p_1^*]$$

$$p_1^*(x,y,0)=0, \qquad \frac{\partial p_1^*}{\partial\nu}\bigg|_{\gamma_0}=0$$

$$f\frac{\partial p_1^*}{\partial\nu}\bigg|_{\gamma_j}=-q_j(+0,\gamma), \qquad j=1,\ldots,n$$

Будем считать, что оператор $L(x,y)$, определяемый как

$$Lw\equiv-(F\varphi^\circ)^{-1}\operatorname{div}[f(x,y)\operatorname{grad}w], \qquad \frac{\partial w}{\partial n}\bigg|_{\gamma}=0$$

имеет простой дискретный спектр λ_k, $k\geqslant 0$. Тогда решение внутренней задачи выписывается явно в виде рядов Фурье по собственным функциям w_k оператора L

$$p_1^*=g(x,y)+\frac{1}{2}w_0(h_0\theta+g_0)+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{-\lambda_k\theta}+h_k\lambda_k^{-1})w_k \tag{3.2}$$

где g_k, h_k – коэффициенты Фурье функций $g(x,y)$ и $h(x,y)$, таких, что

$$h(x,y)=(F\varphi^\circ)^{-1}\operatorname{div}(f\operatorname{grad}g), \qquad \frac{\partial g}{\partial\nu}\bigg|_{\gamma_0}=0$$

$$f\frac{\partial g}{\partial\nu}\bigg|_{\gamma_j}=-q_j(+0,\gamma), \qquad j=1,\ldots,n; \qquad c_k=-\left(g_k+\frac{h_k}{\lambda_k}\right)$$

4. Сведение внешней задачи к линейной для уравнения Пуассона. На практике наибольший интерес представляет исследование внешней, регулярной по ε асимптотики, описывающей квазистатическое истощение пласта при временах $\tau \gg \varepsilon$. При этом вместо условия при $\tau=0$ (2.3) для внешней задачи, вообще говоря, следует брать условие гладкого сращивания с внутренним разложением в переходной зоне. Однако далее будет показано, что эти условия эквивалентны.

Поскольку внешняя асимптотика описывает прежде всего интегральные эффекты, при ее построении удобно использовать интегральное соотношение

$$\iint\limits_D \varphi(p) F(x,y) \frac{\partial p}{\partial \tau} dx\, dy = -nQ(\tau), \qquad Q = \frac{G(\tau)}{\langle G \rangle} \tag{4.1}$$

которое получается из (2.2) интегрированием его по области D с учетом теоремы Гаусса — Остроградского и условий на границе.

Для первых членов асимптотики ($\varepsilon \to 0$, $\tau = O(1)$) вытекает следующий результат.

Для задачи (2.2)—(2.4) имеет место равномерно по x, y, τ при $\varepsilon \to 0$, $0 < \varepsilon \ll \tau_0 \leqslant \tau \leqslant 1$

$$p(x,y,\tau;\varepsilon) = p_0(\tau) + \varepsilon p_1(x,y,\tau) + O(\varepsilon^2) \tag{4.2}$$

$$\varphi_0 p_0' = -Q(\tau), \quad p_0(0) = 1 \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}[f \operatorname{grad} p_1(x,y;\tau)] = F(x,y) u(\tau) \\
\left.\frac{\partial p_1}{\partial \nu}\right|_{\gamma_0} = 0, \qquad \langle p_1 F \rangle = 0 \\
f \left.\frac{\partial p_1}{\partial \nu}\right|_{\gamma_j} = -q_j(\tau,\gamma) \psi_0^{-1}, \qquad j = 1, \ldots, n \\
u(\tau) \equiv -Q(\tau) \psi_0^{-1}(\tau)
\end{gathered} \tag{4.4}$$

В частном случае при условии

$$q_j(\tau, \gamma)/Q(\tau) = \lambda_j(\gamma), \qquad \forall j, \; p_1(x, y, \tau) = u(\tau) v(x, y) \tag{4.5}$$

где v — решение задачи

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}[f \operatorname{grad} v(x,y)] = F(x,y) \\
\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\gamma_0} = 0, \qquad \langle vF \rangle = 0 \\
f \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\gamma_j} = \lambda_j(\gamma), \quad j = 1, \ldots, n
\end{gathered} \tag{4.6}$$

Здесь обозначено: $\varphi_0 \equiv \varphi(p_0)$, $p_0' \equiv dp_0/d\tau$ и т. п.

Докажем основные положения. Приводимое ниже доказательство одновременно можно рассматривать как изложение техники метода возмущений в задачах типа (2.2)—(2.4).

Подстановка ряда (4.2) в (2.2) приводит сразу к уравнению $\operatorname{div}(\psi_0 f \operatorname{grad} p_0) = 0$ с однородными граничными условиями; решение такой задачи есть функция, не зависящая от x, y: $p_0(x, y, \tau) \equiv p_0(\tau)$. Тогда из (4.1) с учетом того, что $\langle F \rangle = 1$, вытекает (4.3).

Для первого приближения получаем задачу

$$\begin{gathered}
\varphi_0 F p_0'/\psi_0 = \operatorname{div}(f \operatorname{grad} p_1), \qquad p_1(x, y, 0) = 0 \\
\left.\frac{\partial p_1}{\partial \nu}\right|_{\gamma_0} = 0, \qquad f \left.\frac{\partial p_1}{\partial \nu}\right|_{\gamma_j} = -\frac{q_j}{\psi_0} \\
\iint\limits_D \left[\varphi_0 \frac{\partial p_1}{\partial \tau} + \varphi_{p0}' p_1 p_0'\right] F\, dx\, dy = 0 \\
\varphi_{p0}' \equiv \left.\frac{d\varphi}{dp}\right|_{p=p_0}
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Покажем, что из нее вытекает (4.4). Последнее соотношение в (4.7) имеет вид

$$\varphi_0 \frac{\partial}{\partial\tau}(\langle p_1F\rangle) + \varphi_{p0}'p_0'\langle p_1F\rangle = 0$$

с начальным условием $\langle p_1F\rangle|_{\tau=0}=0$. Это линейная однородная задача для однородного уравнения, решение которой тривиально: $\langle p_1F\rangle\equiv 0$, $\forall\tau$.

Задача (4.6) является частным случаем (4.4).

Докажем, что условие сращивания внешнего и внутреннего разложений для внешней задачи совпадает с начальным условием (2.3).

Введем новое время $\eta=\tau/\Delta=\varepsilon\theta/\Delta$, где $\Delta=o(1)$, $\varepsilon=o/(\Delta)$, имеющее порядок единицы в переходной области между внутренней и внешней. Представим внутреннее разложение (3.1), (3.2) через переменную η в виде асимптотического ряда при $\varepsilon\to 0$, $\eta=O(1)$

$$p^*(x,\ y,\ \eta\Delta/\varepsilon)=1+{}^1/_2h_0w_0\eta\Delta+o(\Delta) \tag{4.8}$$

Для аналогичного представления внешнего разложения запишем соотношение (4.3) для p_0 в виде интегрального уравнения

$$p_0(\tau)=-\int\limits_0^\tau \varphi_0^{-1}(s)Q(s)\,ds+C \tag{4.9}$$

Положим, что начальное условие в (2.3) для внешней задачи теряется и константу C определим из условий сращивания.

Внешнее разложение в переходной зоне имеет вид

$$p(x,\ y,\ \eta\Delta)=C-\eta Q(+0)\Delta/\varphi^\circ+o(\Delta) \tag{4.10}$$

Поскольку разложения в переходной зоне должны совпадать, то из сравнения (4.8), (4.10) следует, что $C=1$. Но интегральное уравнение (4.9) при $C=1$ эквивалентно задаче (4.3).

Системы (4.4) или (4.6) представляют собой внутреннюю задачу Неймана для уравнения Пуассона. Внутренняя задача Неймана определяет решение только с точностью до аддитивной константы, которая в данном случае доопределяется с помощью условия интегрального типа, что доказывает единственность решения. Существование решения (при $f\neq 0$) в классе обобщенных функций при достаточно слабых условиях на функции f, F следует из общей теории уравнений эллиптического типа.

Из общей теории возмущений следует сходимость ряда (4.2), построенного изложенным способом, на интервале $\tau_0^*<\tau\leqslant 1$, $\tau_0^*\gg\varepsilon$, и равномерная сходимость на отрезке $[\tau_0,\ 1]$, $\tau_0>\tau_0^*$ [5].

5. Обсуждение результатов. Основные следствия предыдущего раздела заключаются в следующем: а) общая нелинейная нестационарная задача истощения (2.2)—(2.4) сведена в первом приближении к линейной задаче для уравнения Пуассона, в которой время играет роль параметра (4.4), либо выпадает вовсе (4.6); б) вся нелинейность выделена в главном члене, описывающем истощение в среднем (с весом F) по пласту и зависящем только от времени.

Эти результаты вносят существенные упрощения в численное решение двумерных задач истощения, ибо не только линеаризуют краевую задачу, но и понижают ее размерность. Во многих случаях задачи (4.4), (4.6) решаются явно. При одномерном течении с одним стоком, когда условие (4.5) выполняется тождественно, решение определяется в квадратурах. Так, в задаче радиального притока идеального газа в однородном недеформируемом пласте ($\varphi, F, f\equiv 1$, $\psi=p$) к скважине конечного радиуса R_+ можно получить из (4.2), (4.3), (4.6) для квадрата давления с точностью $O(\varepsilon^2)$

$$p^2(r,\tau)=p_0^2(\tau)-\frac{1}{2}\varepsilon\frac{Q(\tau)}{1-r_+^2}\left[r^2-\ln r^2-\frac{2r_+^2\ln r_+^2+3-2r_+^2-r_+^4}{2(1-r_+^2)}\right]$$

$$p_0(\tau)=1-(1-r_+^2)^{-1}\int\limits_0^\tau Q(\theta)\,d\theta,\qquad r=\frac{R}{R_*}$$

$$t^*=R_*^2/\varkappa,\quad t_*=\pi R_*^2mH\rho^\circ/\langle G\rangle$$

Остальные обозначения прежние.

Это соотношение совпадает с решением для функции p линейной задачи ($\psi=1$). Тем самым подтвержден известный результат о возможности линеаризации относительно квадрата давления задач фильтрации газа [6]. Существенно, однако, что этот результат имеет место лишь при малых ε.

Полученные результаты могут быть особенно полезны для задач оптимального управления пластом. В частности, необходимые условия оптимальности для функционалов при дифференциальных ограничениях (4.4) или (4.6) типа принципа максимума Понтрягина могут быть сведены к линейным краевым задачам без времени.

Покажем, что результаты данной работы позволяют обосновать идеи других приближенных методов теории фильтрации. Сделаем в задаче (2.2)–(2.4) обратный переход от функции v к исходной функции p, заменив приближенно асимптотическое равенство (4.2) точным

$$v=\frac{1}{\varepsilon u(\tau)}[p-p_0(\tau)]$$

Тогда основное уравнение задачи (4.6) примет вид

$$\Delta p=\varepsilon p_0' \tag{5.1}$$

где для простоты изложения принято, что $f, F, \varphi, \psi=1$, и учтено выражение для $u(\tau)$, Δ – лапласиан. Перейдем далее от p_0 к функции p, используя осреднение по пласту и учтя, что $\langle p_1\rangle=0$

$$p_0=\langle p_0\rangle=\langle p-\varepsilon p_1\rangle=\langle p\rangle$$

Тогда (5.1) после перехода к размерным переменным принимает вид

$$\varkappa\,\Delta P=\left\langle\frac{\partial P}{\partial t}\right\rangle \tag{5.2}$$

Первое приближение решения задачи (2.2)–(2.4) методом возмущений удовлетворяет уравнению (5.2). Таким образом, получено теоретическое обоснование метода осреднения временной производной. Одновременно доказано, что он правомерен только при малых ε и при $\tau\gg\varepsilon$. Заметим, что метод возмущений в первом приближении и метод осреднения временной производной дают одинаковые результаты только в случае, если исходная задача линейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
2. *Кочина И. Н., Филинов М. В.* К гидродинамике подземных газохранилищ.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 3, с. 56–63.
3. *Кочина И. Н., Филинов М. В., Епишин В. Д.* Гидродинамическое исследование динамики газового объема в пласте массивного типа.– Изв. вузов. Нефть и газ, 1977, № 8, с. 67–72.
4. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
5. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 231 с.
6. *Баренблатт Г. И.* О возможности линеаризации в некоторых задачах нестационарной фильтрации газа.– Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 11, с. 111–113.

Москва

Поступила в редакцию 9.VII.1984